ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

CONCOURS D'ADMISSION 2014 **FILIÈRE MP**

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES D – (U)

(Durée : 6 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆ ⋆ ⋆

Notations

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes. Le cardinal d'un ensemble fini E est noté $|E|$. Si $i, j \in \mathbb{N}$, on note $\delta_{i,j}$ le symbole de Kronecker défini par $\delta_{i,j} = 0$ si $i \neq j$ et $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$.

Si G désigne un groupe, on note $[x, y] = x\,y\,x^{-1}\,y^{-1}$ le commutateur de $x, y \in G$. Si X, Y sont des sous–groupes de G, on note $[X, Y]$ le sous–groupe de G formé des produits $[x_1, y_1]^{\pm 1}\,[x_2, y_2]^{\pm 1} \ldots [x_s, y_s]^{\pm 1}$ avec s entier naturel ≥ 1, $x_1, x_2, \ldots, x_s \in X$ et $y_1, y_2, \ldots, y_s \in Y$.

Une $\mathbb{C}$-algèbre $\mathscr{A}$ est un $\mathbb{C}$–espace vectoriel muni d'une loi de multiplication associative $\mathscr{A} \times \mathscr{A} \to \mathscr{A}$, $(a_1, a_2) \mapsto a_1\,a_2$, qui est $\mathbb{C}$–bilinéaire, c'est-à-dire satisfaisant $(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2)(\alpha_3 a_3 + \alpha_4 a_4) = \alpha_1\,\alpha_3\,a_1\,a_3 + \alpha_1\,\alpha_4\,a_1\,a_4 + \alpha_2\,\alpha_3\,a_2\,a_3 + \alpha_2\,\alpha_4\,a_2\,a_4$ pour tous $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathscr{A}$ et $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{C}$. On dit que $\mathscr{A}$ est avec unité s'il existe un élément (nécessairement unique) $1_{\mathscr{A}}$ satisfaisant $a = 1_{\mathscr{A}}\,a = a\,1_{\mathscr{A}}$ pour tout $a \in \mathscr{A}$. Si $\mathscr{A}$ est à unité, un élément $a \in \mathscr{A}$ est inversible s'il existe un élément a' (nécessairement unique) tel que $a\,a' = a'\,a = 1_{\mathscr{A}}$; on note $\mathscr{A}^{\times}$ le groupe des éléments inversibles de $\mathscr{A}$ où la multiplication est celle induite par $\mathscr{A}$.

Si $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont des $\mathbb{C}$–algèbres avec unité, un homomorphisme $\phi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ est une application $\mathbb{C}$–linéaire satisfaisant $\phi(1_{\mathscr{A}}) = 1_{\mathscr{B}}$, $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$ et $\phi(xy) = \phi(x)\,\phi(y)$ pour tous $x, y \in \mathscr{A}$. Enfin, on note $\mathrm{Aut}(\mathscr{A})$ le groupe des automorphismes de la $\mathbb{C}$–algèbre $\mathscr{A}$, c'est-à-dire le groupe des homomorphismes bijectifs de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{A}$.

Si $\mathscr{A}'$ est une $\mathbb{C}$–sous-algèbre avec unité de $\mathscr{A}$, on note $\mathrm{Aut}(\mathscr{A}, \mathscr{A}')$ le sous–groupe de $\mathrm{Aut}(\mathscr{A})$ formé des automorphismes $\phi : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ satisfaisant $\phi(\mathscr{A}') = \mathscr{A}'$.

Étant donné un entier $n \geq 1$, on note $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ l'algèbre des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{C}$, et $(E_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}$ sa base canonique définie par $E_{k,l} = (\delta_{i,k}\,\delta_{j,l})_{i,j=1,\ldots,n}$ pour tous $k, l = 1, \ldots, n$. On note $I_n = E_{1,1} + E_{2,2} + \cdots + E_{n,n}$ l'unité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, on note $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_\mathrm{n})$ la matrice diagonale d'entrées $\lambda_1 \ldots, \lambda_n$, c'est-à-dire $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_\mathrm{n}) = \lambda_1 \mathrm{E}_{1,1} + \cdots + \lambda_\mathrm{n} \mathrm{E}_{\mathrm{n,n}}$.

Si A est un élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on note

$$C(A) = \Big\{ X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \ | \ XA = AX \Big\}$$

le *commutant* de A, c'est une sous-algèbre avec unité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Si F désigne un ensemble fini, on rappelle qu'une *partition* de F est un ensemble fini $P = \{P_1, P_2, \cdots, P_s\}$ de parties de F satisfaisant :

(a) $P_i \neq \emptyset$ pour tout $i = 1, \ldots, s$;

(b) $F = \bigcup_{i=1,\ldots,s} P_i$;

(c) $P_i \cap P_j = \emptyset$ pour tous $i, j = 1, \ldots, s$ tels que $i \neq j$.

On dit qu'une partition $\{Q_1, \ldots, Q_t\}$ de F est plus fine qu'une partition $\{P_1, \ldots, P_s\}$ de F et on note $P \leq Q$ si pour tout $i = 1, \ldots, s$, on a

$$P_i = \bigcup_{j \in J_i} Q_j$$

où J_i désigne l'ensemble des entiers j de $[1, t]$ satisfaisant $P_i \cap Q_j \neq \emptyset$.

Les parties IV, V et VI sont indépendantes de la partie III (en particulier la question III.3) ; les questions VI.1 et VI.2 sont indépendantes de V.

I

Soit $n \geq 1$ un entier. On note $\mathscr{P}_n$ l'ensemble des partitions de $\Omega_n = \{1, \ldots, n\} \subset \mathbb{N}$. On note P_+ la partition $\big\{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}\big\}$ et P_- la partition $\big\{\Omega_n\big\}$.

1. Montrer que $P_- \leq P \leq P_+$ pour tout $P \in \mathscr{P}_n$.

2. Soient $P, Q \in \mathscr{P}_n$ avec les notations $P = \{P_1, \ldots, P_s\}$ et $Q = \{Q_1, \ldots, Q_t\}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $P \leq Q$;

(ii) Pour tous $i = 1, \ldots, s$, $j = 1, \ldots, t$, $P_i \cap Q_j \neq \emptyset \implies Q_j \subset P_i$.

3. Établir les faits suivants :

3.a. La relation $\leq$ est une relation d'ordre partiel sur $\mathscr{P}_n$.

3.b. La relation $\leq$ est une relation d'ordre total si et seulement si $n \leq 2$.

4. Si $P, Q \in \mathscr{P}_n$, montrer que le sous–ensemble suivant de $\mathscr{P}_n$

$$\Big\{E \in \mathscr{P}_n \;|\;\; P \leq E \text{ et } \;Q \leq E\Big\}$$

admet un plus petit élément.

On note $P \wedge Q$ le plus petit élément de la question I.4.

II

Soit $n \geq 2$ un entier.

On note S_n le groupe des permutations de l'ensemble $\Omega_n = \{1, \ldots, n\} \subset \mathbb{N}$. Etant donnés un entier $s \geq 2$ et des éléments $m_1, \cdots, m_s$ de Ω_n distincts deux à deux, on note $c = (m_1, \cdots, m_s) \in S_n$ le cycle associé défini par $c(m_i) = m_{i+1}$ pour tout $i = 1, \ldots, s-1$, $c(m_s) = m_1$ et $c(m) = m$ pour tout $m \in \Omega_n \setminus \{m_1, \cdots, m_s\}$. L'ensemble $\{m_1, \cdots, m_s\}$ est appelé le support du cycle c et s sa longueur. Etant donnée une partition $P = \big\{P_1, P_2 \ldots, P_s\big\}$ de Ω_n, on note

$$S_{n,P} = \Big\{\sigma \in S_n \;|\;\; \sigma(P_i) = P_i \text{ pour tout } i = 1, \ldots, s\Big\}.$$

1. Soit $P = \big\{P_1, P_2 \ldots, P_s\big\}$ une partition de Ω_n.

1.a. Soient $a, b \in \Omega_n$ deux éléments distincts. Montrer que la transposition (a, b) appartient à $S_{n,P}$ si et seulement s'il existe un entier $i \in [1, s]$ tel que $a, b \in P_i$.

1.b. Montrer que $S_{n,P}$ est un sous–groupe de S_n et qu'il est isomorphe au groupe produit $S_{|P_1|} \times S_{|P_2|} \cdots \times S_{|P_s|}$.

Le groupe $S_{n,P}$ est appelé le sous-groupe **parabolique** *attaché à la partition P. On dit qu'un sous-groupe G de S_n est parabolique s'il existe $Q \in \mathscr{P}_n$ satisfaisant $G = S_{n,Q}$.*

2. Soient $P, Q \in \mathscr{P}_n$.

2.a. Montrer que $P \leq Q$ si et seulement si $S_{n,Q} \subset S_{n,P}$.

2.b. Montrer que $P = Q$ si et seulement si $S_{n,Q} = S_{n,P}$.

3. Soient $P, Q \in \mathscr{P}_n$. Montrer que $S_{n,P\wedge Q} = S_{n,P} \cap S_{n,Q}$.

4. Montrer qu'une intersection non vide de sous-groupes paraboliques de S_n est un sous-groupe parabolique de S_n.

5. Soit H un sous-groupe de S_n.

5.a. Montrer que l'ensemble des sous–groupes paraboliques de S_n contenant H admet un unique élément minimal (pour l'inclusion). On le note $S_n(H)$.

5.b. On note $P(H)$ l'unique partition de Ω_n satisfaisant $S_{n,P(H)} = S_n(H)$. Si $P(H) = \{P_1, P_2, \ldots, P_s\}$, montrer que H agit *transitivement* sur chaque P_i, c'est-à-dire que pour chaque i et chaque $p \in P_i$, on a $\{h(p) \mid h \in H\} = P_i$.

5.c. On suppose que H est le sous-groupe de S_n engendré par un cycle c. Exprimer $P(H)$ en termes du support de c.

6. Soit $\sigma \in S_n$. On note $H(\sigma)$ le sous–groupe cyclique de S_n engendré par σ.

6.a. Montrer que σ est un cycle de longueur n si et seulement si $P\big(H(\sigma)\big) = P_-$.

6.b. Montrer que σ se décompose en un produit de cycles $c_1 \ldots c_s$ à supports disjoints deux à deux.

7. Si $\sigma \in S_n$, on note $f(\sigma) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice $\big(\delta_{i,\sigma(j)}\big)_{i,j=1,\ldots,n}$.

7.a. Montrer que f définit un homomorphisme injectif de groupes $S_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

7.b. Montrer que le composé

$$\epsilon : S_n \xrightarrow{f} \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \xrightarrow{\det} \mathbb{C}^\times$$

est un homomorphisme de groupes et déterminer son image.

8. Soit $\sigma \in S_n$ décomposé en cycles à supports disjoints $c_1 c_2 \ldots c_s$ de longueurs respectives $l_1, \ldots, l_s$.

8.a. Montrer que le polynôme caractéristique de $f(\sigma)$ est égal à

$$(T-1)^{n-(l_1+\cdots+l_s)} \prod_{i=1,\ldots,s} (T^{l_i} - 1)$$

et en déduire $\epsilon(\sigma)$.

8.b. Calculer le polynôme minimal de $f(\sigma)$.

III

Soit $n \geq 2$ un entier.

Un sous–groupe H d'un groupe G est dit **maximal** *si $H \subsetneq G$ et si H et G sont les seuls sous-groupes de G contenant H.*

1. Soit G un groupe fini satisfaisant $|G| \geq 2$. Soit $H \subsetneq G$ un sous-groupe. Montrer que H est inclus dans un sous–groupe maximal de G.

2. Soit $P = \{P_1, P_2, \cdots, P_s\}$ une partition de Ω_n satisfaisant $s \geq 2$ et $|P_1| \geq |P_2| \geq \cdots \geq |P_s|$. On suppose que $S_{n,P}$ est un sous-groupe maximal de S_n.

(a) Montrer que $s = 2$;

(b) Si $n \geq 3$, montrer que $2\,|P_1| \neq n$.

3. Soit k un entier satisfaisant $1 \leq k < \frac{n}{2}$. On note $Q = \{Q_1, Q_2\}$ la partition de Ω_n donnée par $Q_1 = \{1, 2, \ldots, n-k\}$ et $Q_2 = \{n-k+1, n-k+2, \ldots, n\}$. Montrer que $S_{n,Q}$ est un sous–groupe maximal de S_n [On pourra commencer par le cas $k = 1$].

IV

Soit $\mathscr{A}$ une $\mathbb{C}$-algèbre avec unité. Etant donné $C \in \mathscr{A}^\times$, on note $\mathrm{Int}(C) : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ l'application $\mathbb{C}$-linéaire définie par $\mathrm{Int}(C).X = CXC^{-1}$ pour tout $X \in \mathscr{A}$.

Soit $n \geq 2$ un entier.

1. Montrer que Int définit un homomorphisme de groupes $\mathscr{A}^\times \to \mathrm{Aut}(\mathscr{A})$ et décrire son noyau. Discuter le cas de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Etant donnés $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in (\mathbb{C}^\times)^n$ *et* $\sigma \in S_n$*, on note*

$$g(\lambda, \sigma) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\, \mathrm{f}(\sigma) \in \mathrm{GL_n}(\mathbb{C})$$

où $f(\sigma)$ *est défini en II.7. On définit le sous-ensemble* G_n *de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *par*

$$G_n = \Big\{ g(\lambda, \sigma) \;\mid\; \lambda \in (\mathbb{C}^\times)^n,\, \sigma \in S_n \Big\}.$$

2. Montrer les faits suivants :

2.a. La partie G_n est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

2.b. L'application $g : (\mathbb{C}^\times)^n \times S_n \to G_n$ (appliquant (λ, σ) sur $g(\lambda, \sigma)$) est bijective.

2.c. L'application $w_n : G_n \to S_n$ définie par $g(\lambda, \sigma) \mapsto \sigma$ est un homomorphisme de groupes.

3. On pose $\mathscr{D}_n = \mathbb{C}\, E_{1,1} \oplus \mathbb{C}\, E_{2,2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}\, E_{n,n} \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

3.a. Montrer que $\mathscr{D}_n$ est une sous $\mathbb{C}$–algèbre avec unité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

3.b. Montrer que

$$\Big\{ X \in \mathscr{D}_n \;\mid\; X^2 = X \text{ et } \mathrm{Tr}(X) = 1 \Big\} = \Big\{ E_{1,1}, E_{2,2}, \ldots, E_{n,n} \Big\}.$$

3.c. On considère le sous-groupe $\mathrm{Aut}\big(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}), \mathscr{D}_n\big)$ de $\mathrm{Aut}\big(\mathscr{M}_n(\mathbb{C})\big)$ défini dans les notations préliminaires. Montrer que

$$G_n = \mathrm{Int}^{-1}\Big(\mathrm{Aut}\big(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}), \mathscr{D}_n\big)\Big).$$

4. On pose $\omega_n = e^{\frac{2i\pi}{n}} \in \mathbb{C}^\times$, $A = \mathrm{diag}(\omega_\mathrm{n}, \omega_\mathrm{n}^2, \ldots, \omega_\mathrm{n}^{\mathrm{n}-1}, 1)$, $B = f\big((1,\, 2\, \ldots,\, n)\big)$.

4.a. Montrer que $A^n = I_n$, $B^n = I_n$ et $AB = \omega_n\, BA$.

4.b. Montrer que

$$\mathbb{C}\,.\,I_n = \Big\{ X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \ \mid \ AX = XA \ \text{ et } \ BX = XB \ \Big\}.$$

5. Soient $X, Y \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ satisfaisant $X^n = I_n$, $Y^n = I_n$, $XY = \omega_n YX$. Montrer qu'il existe $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $A = \mathrm{Int}(C).X$ et $B = \mathrm{Int}(C).Y$.

6. Montrer que le morphisme de groupes $\mathrm{Int} : \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{Aut}\big(\mathscr{M}_n(\mathbb{C})\big)$ est surjectif.

V

Soient n, r des entiers ≥ 1. On considère la $\mathbb{C}$–algèbre produit $\mathscr{A}_{n,r} = \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^r = \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \times \cdots \times \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ (r fois). Pour tout $\sigma \in S_r$, on définit $h_{n,r}(\sigma) : \mathscr{A}_{n,r} \to \mathscr{A}_{n,r}$ suivant

$$h_{n,r}(\sigma).(X_1, \ldots, X_r) = (X_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, X_{\sigma^{-1}(r)})$$

pour tous $X_1, \ldots, X_r \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Établir les faits suivants :

1.a. Pour tout $\sigma \in S_r$, $h_{n,r}(\sigma)$ est un automorphisme de la $\mathbb{C}$–algèbre $\mathscr{A}_{n,r}$.

1.b. L'application $h_{n,r} : S_r \to \mathrm{Aut}(\mathscr{A}_{n,r})$ est un morphisme de groupes.

2. On suppose dans cette question que $n = 1$. Pour $j = 1, ..., r$, on note $F_j = (\delta_{k,j})_{k=1,..,r} \in \mathbb{C}^r$.

2.a. Montrer que

$$\Big\{ X \in \mathbb{C}^r \ \mid \ X^2 = X \Big\} = \Big\{ \sum_{i=1,\ldots,r} a_i\, F_i \ \mid \ a_i = 0, 1 \ \text{ pour tout } \ j = 1, \ldots, r \Big\}.$$

2.b. Soit $\psi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^r)$. Montrer qu'il existe une unique permutation $\sigma \in S_r$ telle que $\psi(F_j) = F_{\sigma(j)}$ pour tout $j = 1, ..., r$.

2.c. En déduire que l'application $h_{1,r} : S_r \to \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^r)$ est un isomorphisme de groupes.

3. On voit maintenant $\mathbb{C}^r = (\alpha_j)_{j=1,\ldots,r}$ comme la sous-algèbre de $\mathscr{A}_{n,r} = \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^r$ consistant en les r-uplets $(\alpha_1 I_n, \ldots, \alpha_r I_n)$.

3.a. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})^r = \mathscr{A}_{n,r}^{\times}$.

3.b. Soit $\psi \in \mathrm{Aut}(\mathscr{A}_{n,r})$. Montrer qu'il existe une unique permutation $\sigma \in S_r$ telle que $\psi(F_j) = F_{\sigma(j)}$ pour tout $j = 1, ..., r$.

3.c. Montrer que l'application $\xi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})^r \times S_r \to \mathrm{Aut}(\mathscr{A}_{n,r})$, $(C, \sigma) \mapsto \xi(C, \sigma) = \mathrm{Int}(C) \circ h_{n,r}(\sigma)$ est surjective [On pourra utiliser les sous-espaces $\mathscr{A}_{n,r}\, F_j$ de $\mathscr{A}_{n,r}$ pour $j = 1, ..., r$].

4. On suppose $r \geq 2$ et soit $C = (C_1, \ldots, C_r) \in \mathscr{A}_{n,r}^{\times}$. On considère l'automorphisme $u_C = \xi\big(C, (1, \ldots, r)\big)$ de la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathscr{A}_{n,r}$.

4.a. Expliciter $u_C^r = u_C \circ u_C \circ \cdots \circ u_C$ (r fois) et construire un isomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres entre le commutant (défini dans les préliminaires) du produit $C_r C_{r-1} \ldots C_1$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et le centralisateur

$$C_{\mathscr{A}_{n,r}}(u_C) = \Big\{ Y \in \mathscr{A}_{n,r} \ \mid \ u_C(Y) = Y \Big\}.$$

4.b. Si u_C est d'ordre fini (c'est-à-dire s'il existe un entier $m \geq 1$ satisfaisant $u_C^m = 1$), montrer qu'il existe $T \in \mathscr{A}_{n,r}^{\times}$ tel que

$$\mathrm{Int}(T) \circ u_C \circ \mathrm{Int}(T)^{-1} = u_{C'}$$

où $C' \in \mathscr{A}_{n,r}^{\times}$ est de la forme $C' = (I_n, \ldots, I_n, D)$ avec $D \in \mathscr{D}_n$.

4.c. Soit $\psi \in \mathrm{Aut}(\mathscr{A}_{n,r})$ satisfaisant $u_{C'} \circ \psi = \psi \circ u_{C'}$. Montrer que ψ se décompose de la façon suivante

$$\psi = u_{C'}^m \circ \mathrm{Int}(M, \ldots, M)$$

où m est un entier et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ satisfait $MD = DM$.

Notation. *Soient $n_1, n_2, \ldots, n_s$ et $r_1, r_2, \ldots, r_s$ des entiers ≥ 1 satisfaisant $n_1 < n_2 < \cdots < n_s$. On considère la $\mathbb{C}$–algèbre produit*

$$\mathscr{A} = \mathscr{A}_{n_1,r_1} \times \mathscr{A}_{n_2,r_2} \times \cdots \times \mathscr{A}_{n_s,r_s}.$$

On considère le morphisme de groupes

$$\rho : \mathrm{Aut}(\mathscr{A}_{n_1,r_1}) \times \mathrm{Aut}(\mathscr{A}_{n_2,r_2}) \times \cdots \times \mathrm{Aut}(\mathscr{A}_{n_s,r_s}) \to \mathrm{Aut}(\mathscr{A}), \quad \phi = (\phi_1, \ldots, \phi_s) \mapsto \rho(\phi)$$

où $\rho(\phi)(Y_1, \ldots, Y_s) = \big(\phi_1(Y_1), \ldots, \phi_s(Y_s)\big)$ pour tout $(Y_1, \ldots, Y_s) \in \mathscr{A}$.

5. Montrer que ρ est surjectif.

6. Soit G un sous-groupe abélien fini de $\mathrm{Aut}(\mathscr{A})$. Montrer qu'il existe $T \in \mathscr{A}^{\times}$ tel que

$$\mathrm{Int}(T)\, G\, \mathrm{Int}(T)^{-1} \subset \mathrm{Aut}(\mathscr{A}, \mathscr{D})$$

où $\mathscr{D} = \mathscr{D}_{n_1}^{r_1} \times \mathscr{D}_{n_2}^{r_2} \times \cdots \times \mathscr{D}_{n_s}^{r_s}$ désigne la sous–algèbre des matrices diagonales de $\mathscr{A}$. [On pourra raisonner par récurrence sur la dimension de $\mathscr{A}$ en commençant par le cas où G contient un automorphisme intérieur (c'est-à-dire de la forme $\mathrm{Int}(T)$) non trivial].

7. Soient $n \geq 1$ un entier et H un sous–groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ satisfaisant $[H, H] \subset \mathbb{C}^{\times}$. Montrer qu'il existe $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ satisfaisant $C\, H\, C^{-1} \subset G_n$.

VI

Soit n un entier, $n \geq 2$. On considère le sous–groupe $G_n \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et le morphisme $w_n : G_n \to S_n$ de la partie IV. On note H_n le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ engendré par les matrices A et B de IV.4.

1. Montrer que H_n est un sous-groupe fini de G_n et que $|H_n| = n^3$.

On dit qu'un sous-groupe fini H de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est **anisotrope** *s'il n'existe aucune décomposition $\mathbb{C}^n = V \oplus W$ en sous-espaces vectoriels $V \neq 0$, $W \neq 0$ stables par H, c'est-à-dire satisfaisant $h(V) \subset V$ et $h(W) \subset W$ pour tout $h \in H$.*

2. Montrer que H_n est un sous-groupe anisotrope de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

3. Soit H un sous–groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ satisfaisant $[H, H] \subset \mathbb{C}^\times$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

i) Le groupe H est un sous–groupe anisotrope de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$;

ii) Pour tout $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ satisfaisant $CHC^{-1} \subset G_n$, la partition de Ω_n attachée en II.5 au sous-groupe $w_n\big(CHC^{-1}\big)$ de S_n est la partition minimale P_-.

On suppose désormais que $n = p$ est un nombre premier.

4. Soit H un sous-groupe fini de G_p satisfaisant $[H, H] \subset \mathbb{C}^\times$. On suppose que H est un sous–groupe anisotrope de $\mathrm{GL}_p(\mathbb{C})$.

4.a. Montrer que $w_p(H)$ est un sous–groupe cyclique d'ordre p de S_p.

4.b. Montrer qu'il existe $C \in G_p$ tel que $\mathrm{Int}(C\, H_p\, C^{-1}) = \mathrm{Int}(H)$.

5. Conclure que si H un sous–groupe fini anisotrope de $\mathrm{GL}_p(\mathbb{C})$ satisfaisant $[H, H] \subset \mathbb{C}^\times$, alors il existe $C \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{C})$ tel que $\mathrm{Int}(C\, H_p\, C^{-1}) = \mathrm{Int}(H)$.

FIN

Ce sujet porte sur le groupe symétrique S_n et sur le groupe des matrices monomiales G_n. Dans la partie V, on a établi qu'un sous–groupe fini presque commutatif de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est conjugué à un sous–groupe de G_n, il s'agit d'un cas particulier d'un théorème de Borel-Mostow sur les algèbres de Lie semi-simples. Dans la partie VI, on classifie les sous-groupes d'Heisenberg de $\mathrm{GL}_p(\mathbb{C})$ pour p premier.