

Etude du dispositif de propulsion du lanceur Ariane 5

1. Analyse préliminaire

1. On considère le système fermé de vitesse \vec{v} par rapport au référentiel d'étude supposé galiléen, constitué à l'instant t de la masse $m(t)$ de la fusée et à l'instant $t+dt$ de sa masse $m(t+dt)$ et de la masse dm éjectée entre t et $t+dt$.

On a : $\vec{P}(t) = m\vec{v}(t)$ et $\vec{P}(t+dt) = (m(t) - dm)\vec{v}(t+dt) + dm(\vec{v}(t+dt) + \vec{v}_s) \Rightarrow d\vec{P}(t) = m(t)d\vec{v}(t) + dm\vec{v}_s$

$\frac{d\vec{P}(t)}{dt} = \sum \vec{F}_{ex} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + D\vec{v}_s$. de la forme : $m(t) \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \sum \vec{F}_{ex} + \vec{F}$. Avec : $\vec{F} = -D\vec{v}_s$: force de poussée.

2. la vapeur d'eau est assimilée à un gaz parfait en équilibre à la température T_0 dont l'énergie est purement cinétique (interactions entre molécules négligeables). le champ de vitesse est en plus isotrope. D'après le théorème de l'équipartition de l'énergie on a :

$$\frac{1}{2} m \langle \vec{v}^2 \rangle = \frac{3}{2} m \langle v_x^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T_0 \Rightarrow \langle \vec{v}^2 \rangle = \frac{3k_B T_0}{m} = \frac{3RT_0}{M_{H_2O}} = 3rT_0.$$

3. $F_{th} = Dv_{th} = \rho_0 A_0 v_{th}^2 = \rho_0 A_0 \times 3rT_0 = 3P_0 A_0$.

4. AN : $F_{th} \# 6,5 \cdot 10^6 N$. F_{th} est inférieure au poids de la fusée sur terre ($m_{F0}g_0 \# 7,8 \cdot 10^6 N$), donc insuffisante, d'où la nécessité de la tuyère.

5. La loi de Laplace, pour une transformation adiabatique réversible d'un gaz parfait, s'écrit :

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = cst \Rightarrow \frac{dp}{p} = \gamma \frac{d\rho}{\rho} \Rightarrow c^2 = \frac{dp}{d\rho} = \frac{\gamma p}{\rho} = \gamma rT.$$

6. $D = \rho_0 v_0 A_0 \Rightarrow v_0 = \frac{DA_0}{\rho_0} = \frac{DA_0 P_0}{rT_0}$. AN : $v_0 \# 330 m.s^{-1}$.

7. $c_0 = \sqrt{\gamma rT_0} \# 1450 m.s^{-1}$. $M_0 = \frac{v_0}{c_0} \# 0,23 < 1$: écoulement subsonique.

2. Relation de Hugoniot

8. en régime stationnaire, le débit massique $D = \rho v A$ est constant.

9. $\rho v A = cst \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{dA}{A} = 0 \Rightarrow \frac{dA}{A} = -\frac{d\rho}{\rho} - \frac{dv}{v} = -\frac{d\rho dp}{\rho dp} - \frac{dv}{v}$. Or : $\frac{d\rho}{dp} = \frac{1}{c^2}$ et $\frac{dp}{\rho} = -v dv$.

Donc : $\frac{dA}{A} = \frac{v dv}{c^2} - \frac{dv}{v} = \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right) \frac{dv}{v} = (M^2 - 1) \frac{dv}{v}$ (5).

10. pour $M < 1$, $\frac{dv}{v} > 0 \Rightarrow \frac{dA}{A} < 0$: la tuyère (a), divergente ne convient pas (décroissance de v dans (a))

11. pour $M < 1$, $\frac{dv}{dA} < 0$: dans une tuyère de Lavale, la vitesse croit dans la partie convergente et décroît

dans la partie divergente. Elle est maximale au col de section minimale.

12. Avions supersoniques ($M > 1$).

3. Dépendance des grandeurs avec le nombre de Mach

13. on a : $M^2 = \frac{v^2}{c^2} = \frac{v^2}{\gamma rT} \Rightarrow \frac{dM}{M} = \frac{dv}{v} - \frac{dT}{2T}$ (5').

14. évolution adiabatique réversible du gaz parfait: $c^2 = \frac{\gamma P}{\rho}$ et $p^{1-\gamma} T^\gamma = cst \left(\frac{dp}{\gamma P} = -\frac{dT}{(1-\gamma)T} \right)$. Et

d'après(4) on a : $dp = -\rho v dv \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{dp}{\rho v^2} = -\frac{\gamma P}{\rho v^2} \frac{dp}{\gamma P} = -\frac{1}{M^2} \frac{dp}{\gamma P}$. Soit : $\frac{dv}{v} = \frac{1}{(1-\gamma)M^2} \frac{dT}{T}$ (5'').

15. (5') et (5'') $2 \frac{dM}{M} = \frac{2dv}{v} - \frac{dT}{T} = \left(\frac{2}{(1-\gamma)M^2} - 1 \right) \frac{dT}{T} = \left(\frac{2-(1-\gamma)M^2}{(1-\gamma)M^2} \right) \frac{dT}{T}$ et d'après (5) et (5'')

$$\frac{dA}{A} = (M^2 - 1) \frac{dv}{v} = \frac{(M^2 - 1)}{(1-\gamma)M^2} \frac{dT}{T} = \frac{(M^2 - 1)}{(1-\gamma)M^2} \times \frac{2(1-\gamma)M^2}{2-(1-\gamma)M^2} \frac{dM}{M}. \text{ Soit :}$$

$$\frac{dA}{A} = \frac{M^2 - 1}{1 + \frac{(\gamma-1)}{2} M^2} \frac{dM}{M} = \frac{M^2 - 1}{1 + \alpha M^2} \frac{dM}{M}. \text{ Avec : } \alpha = \frac{\gamma-1}{2}.$$

$$16. \forall M, \frac{C_1}{M} + \frac{C_2 + C_3 M}{(1 + \alpha M^2)} = \frac{(\alpha C_1 + C_3) M^2 + C_2 M + C_1}{M(1 + \alpha M^2)} = \frac{M^2 - 1}{(1 + \alpha M^2)} \Rightarrow C_1 = -1; C_2 = 0; C_3 = \alpha + 1.$$

$$17. \frac{dA}{A} = -\frac{dM}{M} + \frac{(\alpha+1)}{2\alpha} \frac{2\alpha M dM}{(1 + \alpha M^2)} \Rightarrow \frac{dA}{A} + \frac{dM}{M} - \beta \frac{2\alpha M dM}{(1 + \alpha M^2)} = 0 \Rightarrow \ln \left[\frac{AM}{(1 + \alpha M^2)^\beta} \right] = cst.$$

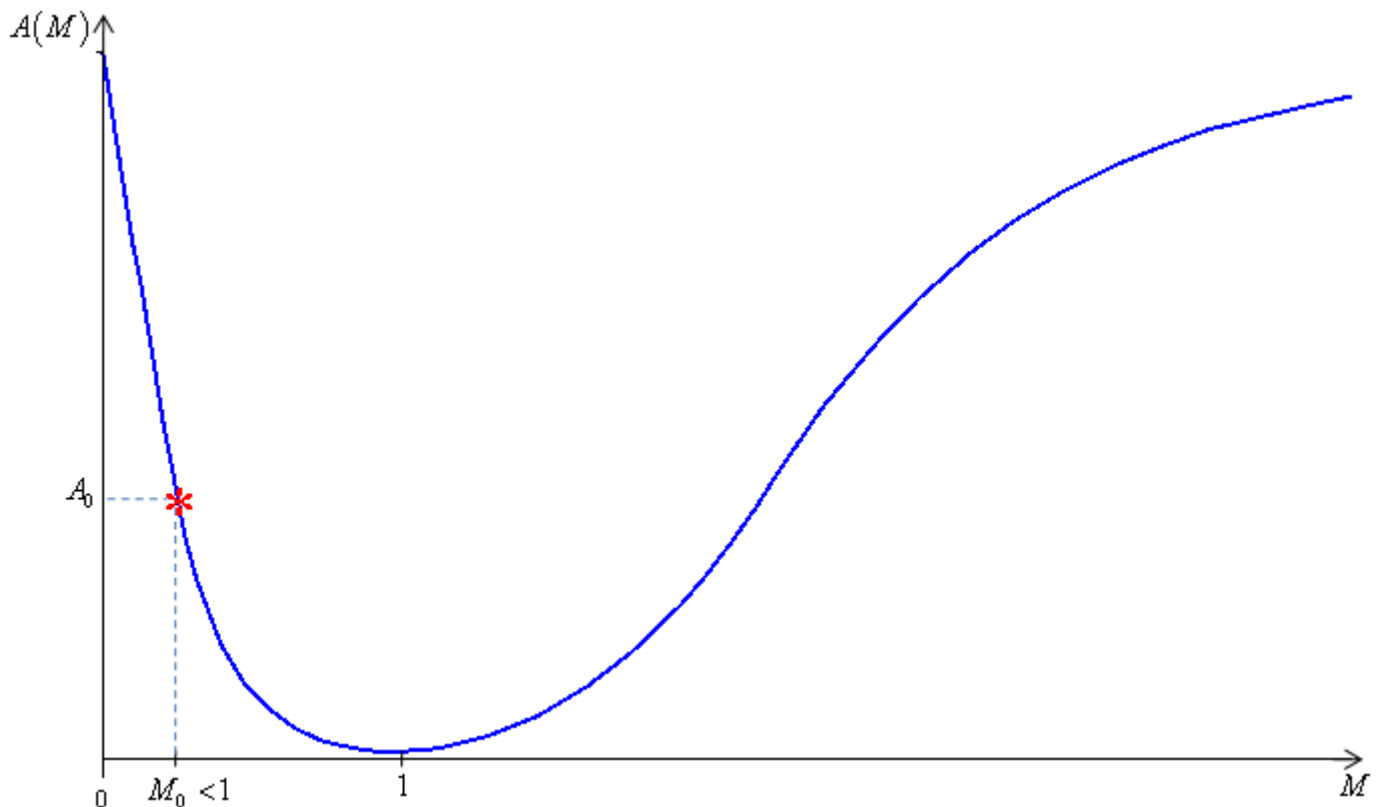
Soit : $Af(M) = cst$. Avec : $f(M) = \frac{M}{(1 + \alpha M^2)^\beta}$. On a bien : $\lim_{M \rightarrow 0} \frac{f(M)}{M} = 1$.

18. on a : $Af = cst$. A est minimale au col, donc f y est maximale.

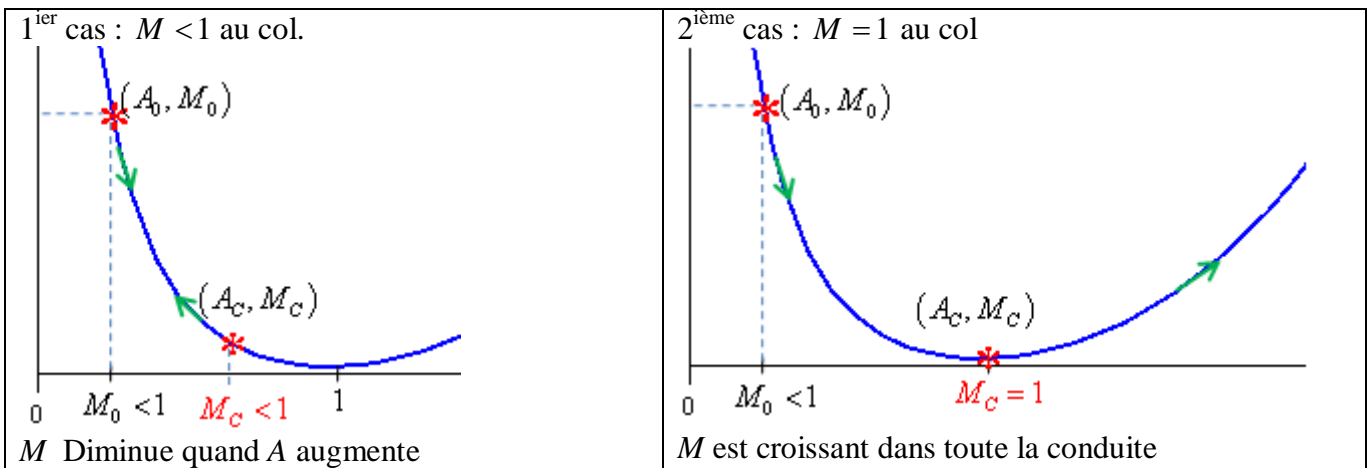
$$19. \text{ on a : } f(0) = 0. \lim_{M \rightarrow \infty} f(M) = 0. (1 + \alpha M^2)^{2\beta} f'(M) = (1 + \alpha M^2)^\beta - 2\alpha\beta M^2 (1 + \alpha M^2)^{\beta-1}.$$

$$f'(M) = 0 \Rightarrow 1 + \alpha M^2 = 2\alpha\beta M^2 \Rightarrow M = \sqrt{\frac{1}{\alpha(2\beta-1)}} = 1 \quad (2\beta = 1 + 1/\alpha) : \text{ Donc } f \text{ est maximale en } M_c.$$

A y est minimale. $\lim_{M \rightarrow +\infty} A(M) = +\infty$. $\lim_{M \rightarrow +\infty} A(M) = +\infty$.



20.



21. pour une conduite amorcée, M augmente avec x au long de la conduite.

22. pour un nombre de Mach $M_0 < M_c < 1$, on aura $M_c < 1$. Donc M croît dans le convergent et décroît dans le divergent.

4. Caractérisation de la situation au sol

23. $k_{c0} = \frac{A_c}{A_0} = \frac{f_0}{f_c} = M_0 \left(\frac{1+\alpha}{1+\alpha M_0^2} \right)^\beta$. Le rapport k_{c0} diminue avec M_0 : plus M_0 est grand plus il faut

réduire la section au col de la conduite pour qu'elle soit amorcée.

24. $\alpha \neq 0,15, \beta \neq 3,83$ et $M_0 \neq 0,23 \Rightarrow k_{c0} \neq 0,83$ et $A_c \neq 0,075m^2$.

Graphiquement, pour $M_0 \neq 0,23$ $A_0 / A_c \approx 2,5 \Rightarrow k_{c0} \neq 0,4$.

5. Adaptation en pression

25. si $p_s = p_e$, le jet ne sera pas déformé. si la pression extérieure est supérieure à celle du gaz, le jet sera comprimé vers l'intérieur. D'où l'association : (a) : $p_s = p_e$; (b) : $p_s < p_e$; (c) : $p_s > p_e$.

$$26. (5)'' \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{1}{(1-\gamma)M^2} \frac{dT}{T} \Rightarrow vdv = \frac{c^2}{(1-\gamma)} \frac{dT}{T} = \frac{\gamma r T}{(1-\gamma)} \frac{dT}{T} = \frac{\gamma r}{(1-\gamma)} dT.$$

Soit : $\frac{\gamma r}{(\gamma-1)} dT + vdv = 0$ (6). (6) $\Rightarrow d\left(c_p T + \frac{v^2}{2}\right) = 0$. Soit $h + e_c = cst$. $h = \frac{\gamma r}{(\gamma-1)} T + cst$: enthalpie

massique du gaz. $\frac{v^2}{2}$: son énergie cinétique massique.

$$27. \text{d'après "13."} \frac{dM}{M} = \frac{dv}{v} - \frac{dT}{2T} \Rightarrow M dM = M^2 \frac{dM}{M} = \frac{v^2}{c^2} \frac{dv}{v} - M^2 \frac{dT}{2T} = \frac{v dv}{\gamma r T} - M^2 \frac{dT}{2T}.$$

$$\text{"26."} vdv = -\frac{\gamma r T}{(\gamma-1)} \frac{dT}{T}. \text{Donc : } 2M dM = -\left(\frac{2}{(\gamma-1)} + M^2\right) \frac{dT}{T} \Rightarrow 2\alpha M dM = -(1+\alpha M^2) \frac{dT}{T} \Rightarrow$$

$$\frac{2\alpha M dM}{(1+\alpha M^2)} + \frac{dT}{T} = 0 = d \ln [T(1+\alpha M^2)]. \text{ Soit : } T(1+\alpha M^2) = cst.$$

$$28. T(1+\alpha M^2) = cst \Rightarrow \frac{p}{\rho} (1+\alpha M^2) = cst. \text{ On a en plus : } \frac{p}{\rho^\gamma} = cst.$$

$$\text{Donc : } \frac{p}{p^{1/\gamma}} (1+\alpha M^2) = p^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}} (1+\alpha M^2) = cst. \text{ Ou encore : } p^{-\frac{2\alpha}{1+2\alpha}} (1+\alpha M^2) = cst.$$

$$29. (1 + \alpha M_s^2) = \left(\frac{p_e}{p_c} \right)^{\frac{2\alpha}{1+2\alpha}} (1 + \alpha) \Rightarrow M_s = \left[\frac{(1 + \alpha) \left(\frac{p_e}{p_c} \right)^{\frac{2\alpha}{1+2\alpha}}}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \right]^{1/2}$$

30. Au décollage, $p_e = 10^5 Pa$. $\frac{p_e}{p_0} \# 9 \cdot 10^{-3}$. D'après la figure 4, $M_s \approx 3,6$.

31. D'après la figure 2, pour $M_s \approx 3,6$, $k_{sc} = \frac{A_s}{A_c} \approx 11$.

32. D'après la figure 5, $\frac{T_s}{T_0} \approx 0,35 \Rightarrow T_s \# 1225 K$; $c_s = \sqrt{\gamma r T_s} \# 860 m \cdot s^{-1}$; $v_s = M_s c_s \# 3090 m \cdot s^{-1}$. Donc:

$F_s = Dv_s \# 8 \cdot 10^5 N$. $F_s < F_{th} < m_{F0} g$: en régime adapté, la force de poussée est insuffisante au décollage.

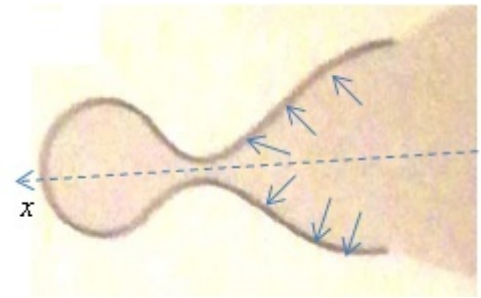
33. pour une valeur de plus élevée de k_{sc} que dans le cas adapté, M_s est plus élevé (figure 2). Donc

$p_s > p_e$ (29.): régime sous détendu.

34. (voir schéma ci-contre)

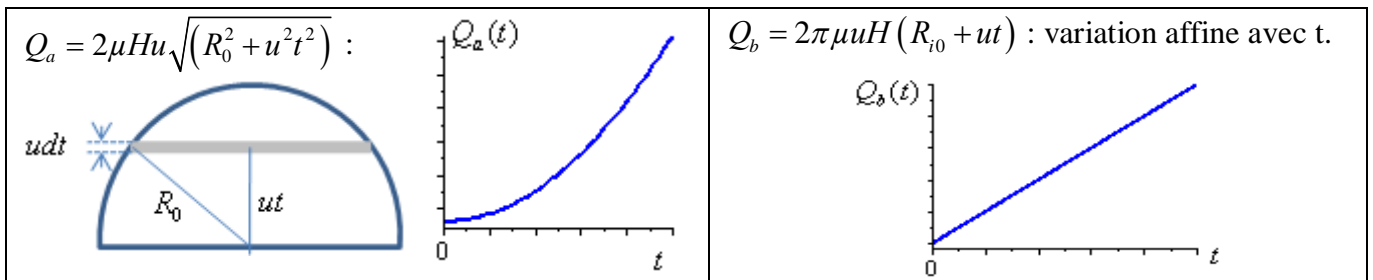
La surface est le courant doivent présenter un symétrie de révolution autour de Ox .

35. l'évolution ne peut pas être supposée réversible pour un écoulement supersonique.



6. Propulseur d'appoint

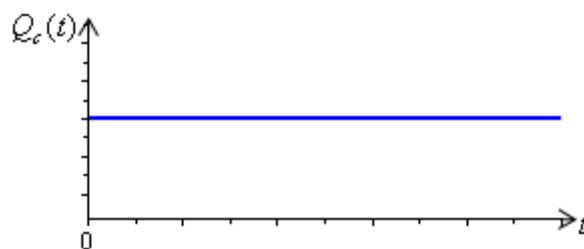
36.



$$37. Q = \frac{dm}{dt} = \frac{\mu d\tau}{dt} \cdot d\tau = 2\pi (R_e + R_i) H u dt. \text{ Avec : } R_i = \frac{R_0}{2} - ut \text{ et } R_e = \frac{R_0}{2} + e_0 + ut.$$

$$\text{Donc : } Q = 2\pi \mu H (R_0 + e_0) u \approx 2\pi \mu R_0 H u.$$

38. Représentation graphique :



39. Le canal annulaire est le mieux approprié car il présente un débit contrôlable instantanément établi. Dans les cas (a) et (b) le débit est variable, initialement faible et peut être destructif lorsqu'il est assez important.

40. canal à section en étoile.

41. la pente de variation de v est plus que deux fois plus grande avant t^* qu'après malgré le largage des boosters après t^* : la contribution des boosters à la propulsion au démarrage est plus importante que

celle du moteur Vulcain. $F \approx \frac{\Delta m}{t^*} v^* \# 9,8 \cdot 10^6 N$.

Le pourcentage de la contribution du moteur Vulcain à la poussée totale est de 8%.