ÉCOLE POLYTECHNIQUE - ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES
CONCOURS D'ADMISSION 2015
COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES -A- (XLCR)
(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

Pour $n \geq 1$, l'espace des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n est noté $\mathbb{R}_n[X]$. Étant donnés deux polynômes non nuls P et Q à coefficients réels, leur plus grand commun diviseur (pgcd) unitaire est noté $P \wedge Q$.

Si $r \geq 1$ est un second entier, $\mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices à r lignes et n colonnes à coefficients complexes. la notation $M = (m_{ij})$ signifie que le coefficient à la ligne i et colonne j de la matrice M est m_{ij}. On note plus simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, dont la matrice identité est $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le polynôme caractéristique χ_M de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est défini par :

$$\chi_M(X) = \det(XI_n - M).$$

Le polynôme caractéristique est donc unitaire. Pour $M \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{R})$, ${}^{\mathbf{t}}M \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{R})$ désigne la matrice transposée. On rappelle qu'une matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *symétrique* si ${}^{\mathbf{t}}M = M$, *orthogonale* si ${}^{\mathbf{t}}MM = I_n$. On notera $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (respectivement $O_n(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques (rep. orthogonales) de taille n. Étant donné un $n-$uplet $(a_1, \cdots, a_n)$ de nombres réels,

$$\Delta(a_1, \cdots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$$

Si $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, son spectre est réel. On convient de ranger ses valeurs propres (comptées avec leurs ordres de multiplicité) dans l'ordre *décroissant* $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$. On note alors $\mathrm{Sp}(M) = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, qui est donc un $n-$uplet *ordonné.*

Un $n+1-$uplet $\widehat{\lambda} = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et un $n-$uplet $\widehat{\mu} = (\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_n) \in \mathbb{R}^n$, ordonnés, sont dits *enlacés* si $\lambda_j \geq \mu_j \geq \lambda_{j+1}$ pour tout $j \in \{1, \cdots, n\}$. Il sont *strictement enlacés* si $\lambda_j > \mu_j > \lambda_{j+1}$ pour tout j. Par exemple, $(4, 3, 2, 1)$ et $\pi, e, \sqrt{2})$ sont strictement enlacés.

Questions préliminaires

1. (a) Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe du groupe $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles.
(b) Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Soit M et N dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $U \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $N = UMU^{-1}$, si et seulement si $\chi_M = \chi_N$.

3. Soit $\widehat{\lambda} = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $\widehat{\mu} = (\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_n) \in \mathbb{R}^n$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Formons

$$\widehat{\lambda'} = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_i \geq x \geq \lambda_{i+1} \cdots \geq \lambda_{n+1}$$

en choisissant l'entier $i \in \{0, \cdots, n+1\}$ convenablement. Si $x \geq \lambda_1$, on a donc $i = 0$; tandis que si $x \leq \lambda_{n+1}$, on a $i = n+1$. On forme de même

$$\widehat{\mu'} = (\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_j \geq x > \mu_{j+1} \geq \cdots \geq \mu_n).$$

On suppose que $\widehat{\lambda}$ et $\widehat{\mu}$ sont enlacés. Montrer que $j \leq i \leq j+1$. En examinant chacun des deux cas $j = i$ ou $i - 1$, montrer que $\widehat{\lambda'}$ et $\widehat{\mu'}$ sont enlacés.

Première Partie

Soit $\widehat{\mu} = (\mu_1 > \cdots > \mu_n) \in \mathbb{R}^n$.

4. On définit les polynômes

$$Q_0 = \prod_{k=1}^{n}(X - \mu_k) \quad \text{et} \quad \forall j \in \{1, \cdots, n\},\ P_j = \frac{Q_0}{(X - \mu_j)}.$$

(a) Montrer que la famille $(Q_0, P_1, P_2, \cdots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) Soit $i \in \{1, \cdots, n\}$. Vérifier que $(-1)^{j-1}P_j(\mu_j) > 0$.

5. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme unitaire de degré $n + 1$.

(a) Montrer qu'il existe un unique vecteur $(a, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$P = (X - a)Q_0 - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j P_j. \tag{1}$$

(b) On suppose que les nombres réels $\lambda_1, \cdots, \alpha_n$ sont tous strictement positifs. Montrer que P a $n + 1$ racines distinctes $\lambda_1 > \cdots > \lambda_{n+1}$; et que $\widehat{\lambda} = (\lambda_1 > \cdots > \lambda_{n+1})$ et $\widehat{\mu}$ sont strictement enlacés.

(c) Réciproquement, on suppose que p a $n + 1$ racines réelles distinctes $\lambda_1 > \cdots > \lambda_{n+1}$, et que $\widehat{\lambda} = (\lambda_1 > \cdots > \lambda_{n+1})$ et $\widehat{\mu}$ sont strictement enlacés. Montrer que, pour tout $j \in \{1, \cdots, n\}$, $\alpha_j > 0$.

6. On se donne des entiers $m_k \geq 1$ pour $k = 1, \cdots, n$. On pose

$$Q_1 = \prod_{k=1}^{n}(X - \mu_k)^{m_k} \text{ et, cette fois-ci, } P_j = \frac{Q_1}{X - \mu_j}.$$

Montrer que

$$Q_1 \wedge Q_1' = \prod_{k=1}^{n}(X - \mu_k)^{m_k - 1}.$$

7. Soit $(a, \alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et soit $P \in \mathbb{R}[X]$ défini par la formule

$$P = (X - a)Q_1 - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j P_j.$$

(a) Donner une expression de $P \wedge Q_1$ en fonction des μ_j, des m_j et de l'ensemble J des indices pour lesquels $\alpha_j = 0$.

(b) On suppose que les nombres $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ sont positifs ou nuls.
Montrer que les racines de P sont réelles.

On admettra par la suite que, dans ce cas le plus général, le $(N + 1)-$uplet des racines de P et le $N-$uplet des racines de Q_1 sont enlacés.

Deuxième Partie

8. Soit r et s deux entiers non nuls. Soit $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{s,r}(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_s(\mathbb{R})$. On suppose de plus que A est inversible. On considère la matrice $M \in \mathcal{M}_{r+s}(\mathbb{R})$ ayant la forme par blocs suivante

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Trouver deux matrices $U \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{R})$ et $V \in \mathcal{M}_s(\mathbb{R})$ telles que

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & I_r \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} I_r & U \\ 0 & V \end{pmatrix}$$

et en déduire que

$$\det(M) = \det(A). \det(D - CA^{-1}B).$$

On pourra admettre par la suite que cette formule reste vraie lorsque M et ses blocs $A, \cdots, D$ sont à coefficients dans le corps $\mathbb{R}(X)$ des fractions rationnelles.

9. Soit $M \in \mathcal{S}_{n+1}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. On écrit M sous la forme par blocs

$$M = \begin{pmatrix} A & u \\ {}^{\mathbf{t}}y & a \end{pmatrix}.$$

avec $a \in \mathbb{R}, u \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

(a) Si le spectre de A est $\mathrm{Sp}(A) = (\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_n)$, montrer qu'il existe $U \in O_{n+1}(\mathbb{R})$ et $z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que

$$UM{}^{\mathbf{t}}U = \begin{pmatrix} \Delta(\mu_1, \cdots, \mu_n) & z \\ {}^{\mathbf{t}}z & a \end{pmatrix}$$

(b) En déduire qu'il existe des nombres réels positifs ou nuls α_j (pour $j = 1, \cdots, n$) tels que

$$\chi_M = (X - a)Q_0 - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{Q_0}{(X - \mu_j)}, \text{ où } Q_0 = \prod_{k=1}^{n} (X - \mu_k).$$

(c) Montrer que $\mathrm{Sp}(M)$ et $\mathrm{Sp}(A)$ sont enlacés.

10. Pour $t = (t_{ij}) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$, on note $T_{\leq n}$ la matrice extraite de taille n dont les coefficients sont les t_{ij} pour $1 \leq i, j \leq n$. Soit $M \in \mathcal{S}_{n+1}(\mathbb{R})$. Montrer que l'ensemble

$$\{\mathrm{Sp}((UMU^{-1})_{\leq n}) \in \mathbb{R}^n, \text{ pour } U \text{ parcourant } O_{n+1}(\mathbb{R})\}$$

noté $\mathcal{C}_M$, est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$.

11. On suppose de plus que les valeurs propres de M sont distinctes. On a donc $\mathrm{Sp}(M) = (\lambda_1 > \cdots > \lambda_{n+1})$.

(a) Soit $\widehat{\mu} = (\mu_1 > \cdots > \mu_n)$ tel que $\mathrm{Sp}(M)$ et $\widehat{\mu}$ soient strictement enlacés. Montrer que $\widehat{\mu}$ appartient à $\mathcal{C}_M$.

(b) Montrer que

$$\mathcal{C}_M = \{\widehat{\mu} = (\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_n), \text{ tels que } \mathrm{Sp}(M) \text{ et } \widehat{\mu} \text{ soient enlacés}\} \qquad (2)$$

Troisième Partie

On considère l'application

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{Diag}_n & : & \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & & M = (m_{ij}) & \longmapsto & (m_{11}, m_{22}, \cdots, m_{nn}) \end{array}.$$

Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Dans cette partie, on se propose d'étudier l'ensemble suivant

$$\mathcal{D}_M = \{\mathrm{Diag}_n(UMU^{-1}), \text{ pour } U \text{ parcourant } O_n(\mathbb{R}).\}$$

1. On étudie d'abord le cas $n = 2$. On note alors $\mathrm{Sp}(M) = (\lambda_1 \geq \lambda_2)$.
Montrer que $\mathcal{D}_M$ est le segment de $\mathbb{R}^2$ dont les extrémités sont (λ_1, λ_2) et (λ_2, λ_1).

2. Soit $M = (m_{ij}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathrm{Sp}(M) = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. On se propose de démontrer que pour tout $s \in \{1, \cdots, n\}$, on a :

$$\sum_{i=1}^{s} m_{ii} \leq \sum_{i=1}^{s} \lambda_i. \tag{3}$$

(a) Que pensez-vous du cas $s = n$?

(b) Exprimer $\sum\limits_{i=1}^{n-1} m_{ii}$ au moyen des valeurs propres de la matrice $M_{\leq n}$ obtenue en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne de M. En déduire l'inégalité (3) lorsque $s = n-1$.

(c) En procédant par récurrence sur n, montrer l'inégalité (3), pour tout $s \in \{1, \cdots, n\}$.

Quatrième Partie

1. On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire standard et de la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$. On définit une base $\mathcal{C} = \{\omega_1, \omega_2\}$ de E par $\omega_1 = e_1$ et $\omega_2 = \frac{1}{2}(e_1 + \sqrt{3}e_2)$.

(a) Soit $s_1 : E \to E$ la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\mathbb{R}\omega_1$. Montrer que la matrice de s_1 dans la base $\mathcal{C}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) Soit $s_2 : E \to E$ la symétrie orthogonale par rapport à la droire $\mathbb{R}\omega_2$. Montrer que la matrice de s_2 dans la base $\mathcal{C}$ est $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Soit H l'ensemble des vecteurs $(m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que $m_1 + m_2 + m_3 = 0$. On note H^+ le sous-ensemble des $(m_1, m_2, m_3) \in H$ tels que $m_1 \geq m_2 \geq m_3$. On considère l'application

$$\begin{array}{rrcl} \varphi & : \qquad\qquad H & \longrightarrow & E \\ & (m_1, m_2, m_3) & \longmapsto & (m_1 - m_2)\omega_1 + (m_2 - m_3)\omega_2. \end{array}$$

(a) Montrer que φ est un isomorphisme linéaire. Décrire $\varphi(H^+)$.

(b) Montrer que, pour tout $(m_1, m_2, m_3) \in H$, on a

$$s_1 \circ \varphi(m_1, m_2, m_3) = \varphi(m_1, m_2, m_3) \text{ et } s_2 \circ \varphi(m_1, m_2, m_3) = \varphi(m_2, m_1, m_3).$$

(c) Soit $\widehat{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in H$ tel que $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$. On note $\mathcal{Q}_\lambda$ l'ensemble des $(m_1, m_2, m_3) \in H^+$ tels que $m_1 \leq \lambda_1$ et $m_1 + m_2 \leq \lambda_1 + \lambda_2$. Montrer que $\varphi(\mathcal{Q}_{\widehat{\lambda}})$ est un quadrilatère dont on décrira les sommets.

3. Soit $M \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ une matrice de trace nulle. On note $\mathrm{Sp}(M) = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3)$. On se propose de décrire $\varphi(\mathcal{D}_M)$.

(a) Soit $(m_1, m_2, m_3) \in H$. Soit σ une permutation de $\{1, 2, 3\}$. Montrer que $(m_1, m_2, m_3) \in \mathcal{D}_M$ si et seulement si $(m_{\sigma(1)}, m_{\sigma(2)}, m_{\sigma(3)}) \in \mathcal{D}_M$.

(b) En utilisant la question 13, montrer que l'intersection $H^+ \cap \mathcal{D}_M$ est incluse dans $\mathcal{Q}_{\widehat{\lambda}}$.

(c) Soit $(m_1, m_2, m_3) \in \mathcal{D}_M$. Montrer que le segment de H dont les sommets sont (m_1, m_2, m_3) est (m_2, m_1, m_3) est inclus dans $\mathcal{D}_M$. On pourra utiliser la question 12.
De même, montrer que le segment de H dont les sommets sont (m_1, m_2, m_3) est (m_1, m_3, m_2) est inclus dans $\mathcal{D}_M$.

(d) Montrer que $\mathcal{D}_M$ contient $\mathcal{Q}_{\widehat{\lambda}}$.

(e) Montrer que si $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ alors $\varphi(\mathcal{D}_M)$ est un hexagone, dont on déterminera les sommets.