1. S^{n-1} est un fermé borné de l'espace vectoriel normé de dimension finie $\mathbb{R}^n$, c'est donc un compact de $\mathbb{R}^n$.

   D'autre part, la continuité de l'application norme sur le compact S^{n-1} assure l'existence de ce maximum.

2. ..

   - Cette application vérifie la propriété de positivité.

   - L'homogénéité et l'inégalite triangulaire se font comme pour la norme infinie.

   - Soit maintenant $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   Si $\|M\|_{op} = 0$, alors $\max\left\{\|Mx\| \ ; \ x \in S^{n-1}\right\} = 0$, donc $\|Mx\| = 0$ pour tout $x \in S^{n-1}$ et si $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, alors $\left\|M\frac{y}{\|y\|}\right\| = 0$, donc $\frac{1}{\|y\|}\|My\|$ soit $My = 0$. Par suite $M = 0$. D'autre part, on vérifie que si $M = 0$, alors $\|M\|_{op} = 0$. D'où la séparation.

   Par suite l'application $M \to \|M\|_{op}$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   D'autre part, si $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, alors $\left\|M\frac{y}{\|y\|}\right\| \leq \|M\|_{op}$ ou encore $\|My\| \leq \|M\|_{op}\|y\|$. Inégalité valable si $y = 0$. Par suite

   $$\forall y \in \mathbb{R}^n, \|My\| \leq \|M\|_{op}\|y\|$$

   Et si $x, y \in \mathbb{R}^n$, alors $\|Mx - My\| = \|M(x - y)\| \leq \|M\|_{op}\|x - y\|$. D'où

   $$\forall x, y \in \mathbb{R}, \|Mx - My\| \leq \|M\|_{op}\|x - y\|$$

3. Soit $M = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ une matrice diagonale, alors pour tout $x = {}^t(x_1, ..., x_n) \in S^{n-1}$, $Mx = {}^t(\lambda_1 x_1, ..., \lambda_n x_n)$ et si $k \in \{1, ..., n\}$ est tel que $|\lambda_k| = \max\limits_{1\leq i\leq n}|\lambda_i|$, alors

   $$\|Mx\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2.x_i^2 = \sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2.x_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n}|\lambda_k|^2.x_i^2 = |\lambda_k|^2\sum_{i=1}^{n}.x_i^2 = |\lambda_k|^2\|x\|^2 = |\lambda_k|^2 1$$

   Donc

   $$\|Mx\| \leq |\lambda_k|$$

   Et cette inégalité devient une égalité pour $x = e_k \in S^{n-1}$($k^{ème}$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$)

   Donc

   $$\|M\|_{op} = \max\left\{\|Mx\| \ ; \ x \in S^{n-1}\right\} = |\lambda_k|$$

   Mais

   $$\sigma(M) = \{\lambda_i \ ; \ 1 \leq i \leq n\}$$

   Donc

   $$\|M\|_{op} = \max\{|\lambda| \ ; \ \lambda \in \sigma(M)\}$$

   Si maintenant M est symétrique réelle quelconque, alors d'après le théorème spectral, M est orthogonalement diagonalisable, donc ils existent $D = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ diagonale à coéfficients réels et $P \in O_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale telles que $M = P.D.P^{-1}$.

Donc compte tenu du fait que P conserve la norme $\|.\|$ euclidienne de $\mathbb{R}^n$,

$$\left\{\|Mx\| \ ; \ x \in S^{n-1}\right\} = \left\{\left\|P.D.P^{-1}x\right\| \ ; \ x \in S^{n-1}\right\} = \left\{\left\|D.P^{-1}x\right\| \ ; \ x \in S^{n-1}\right\}$$

Mais pour la même raison (P conserve la norme $\|.\|$), l'application définie de S^{n-1} dans lui même qui à x associe $P^{-1}x$ est bijective, par suite

$$\left\{\left\|D.P^{-1}x\right\| \ ; \ x \in S^{n-1}\right\} = \left\{\|D.y\| \ ; \ y \in S^{n-1}\right\}$$

Donc

$$\left\{\|Mx\| \ ; \ x \in S^{n-1}\right\} = \left\{\|D.y\| \ ; \ y \in S^{n-1}\right\}$$

Par suite

$$\|M\|_{op} = \max\left\{\|Mx\| \ ; \ x \in S^{n-1}\right\} = \max\left\{\|D.y\| \ ; \ y \in S^{n-1}\right\} = \|D\|_{op}$$

Mais compte tenue de la première étape,

$$\|D\|_{op} = \max\left\{|\lambda| \ ; \ \lambda \in \sigma(D)\right\}$$

Or

$$\sigma(M) = \sigma(D) = \{\lambda_i \, ; \, 1 \leq i \leq n\}$$

D'où

$$\|M\|_{op} = \max\left\{|\lambda| \ ; \ \lambda \in \sigma(M)\right\}$$

4. C'est classique

$$\begin{cases} \sigma(J_n) = \{0, n\} \\ E_0(J_n) = vect(e_1 - e_n, ..., e_{n-1} - e_n) \\ E_n(J_n) = vect(e_1 + ... + e_n) \end{cases}$$

où $(e_1, ..., e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. En particulier $\begin{cases} \dim E_0(J_n) = n-1 \\ \dim E_n(J_n) = 1 \end{cases}$.

En particulier $\max\{|\lambda| \ ; \ \lambda \in \sigma(J_n)\} = n$ et donc compte tenu du résultat de la troisième question,

$$\|J_n\|_{op} = n$$

5. Soit i, j dans $\{1, ..., n\}$, alors par définition de $\|M\|_{op}$, on a $\|M.e_j\| \leq \|M\|_{op}$, mais $M.e_j = \begin{pmatrix} M_{1,j} \\ \vdots \\ M_{n,j} \end{pmatrix}$ est la $j^{ème}$ colonne de M, donc

$$\left(\sum_{k=1}^{n} M_{k,j}^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|M\|_{op}$$

Mais $|M_{i,j}| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} M_{k,j}^2\right)^{\frac{1}{2}}$, donc $|M_{i,j}| \leq \|M\|_{op}$.

Par suite

$$\max\left\{|M_{i,j}| \ ; \ 1 \leq i, j \leq n\right\} \leq \|M\|_{op}.$$

6. Soit $x = {}^t(x_1, ..., x_n) \in S^{n-1}$ tel que $\|M\|_{op} = \|M.x\|$.
Un calcul donne
$$M.x = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} M_{1,j}.x_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} M_{n,j}.x_j \end{pmatrix}$$
donc
$$\|M.x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} M_{i,j}.x_j \right)^2 \right)^{\dfrac{1}{2}}.$$
Mais pour tout i dans $\{1, ..., n\}$ fixé, on a par inégalité de Cauchy Schwartz,
$$\left(\sum_{j=1}^{n} M_{i,j}.x_j \right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{n} M_{i,j}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right).$$
Ou encore puisque $\|x\|^2 = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2 = 1$,
$$\left(\sum_{j=1}^{n} M_{i,j}.x_j \right)^2 \leq \sum_{j=1}^{n} M_{i,j}^2$$
Donc compte tenue de ce qui précède on obtient,
$$\|M\|_{op} = \|M.x\| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} M_{i,j}^2 \right)^{\dfrac{1}{2}}.$$
D'autre part, cette inégalité est une égalité ssi
$$\left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} M_{i,j}.x_j \right)^2 \right)^{\dfrac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} M_{i,j}^2 \right)^{\dfrac{1}{2}}$$
ssi
$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} M_{i,j}.x_j \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} M_{i,j}^2 \right)$$
ssi
$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} M_{i,j}.x_j \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} M_{i,j}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right)$$
ssi $\forall i \in \{1, ..., n\}$,
$$\left(\sum_{j=1}^{n} M_{i,j}.x_j \right)^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} M_{i,j}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right)$$

Puisque toujours d'après l'inégalité de Cauchy Schwartz,

$$\forall i \in \{1, ..., n\}\,,\ \left(\sum_{j=1}^{n} M_{i,j}.x_j\right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{n} M_{i,j}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)$$

Donc il y'a égalité

$$\|M\|_{op} = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M_{i,j}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

ssi $\forall i \in \{1, ..., n\}$, il y'a égalité dans l'inégalité de Cauchy Schwartz,

$$\left(\sum_{j=1}^{n} M_{i,j}.x_j\right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{n} M_{i,j}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)$$

ssi $\forall i \in \{1, ..., n\}$, les vecteurs $(M_{i,1}, ..., M_{i,n})$ et $x = {}^t(x_1, ..., x_n)$ sont liés
ssi tous les vecteurs lignes de M sont proportionel à $x \neq 0$.
ssi le rang de M est ≤ 1.
En conclusion, la condition chérchée est

$$rg(M) \leq 1.$$

7. Soit $M = (M_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ dans $\sum_n$, alors $\forall i, j \in \{1, ..., n\}$,

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M_{i,j}^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |M_{i,j}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 1\right)^{\frac{1}{2}} = \left(n^2\right)^{\frac{1}{2}} = n \quad (*)$$

Et compte tenu du résultat de la question 6 précédente, il vient

$$\|M\|_{op} \leq n.$$

On a donc

$$\|M\|_{op} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M_{i,j}^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq n$$

D'autre part, supposons $\|M\|_{op} = n$, alors d'après les inégalités précédentes,

$$\|M\|_{op} = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M_{i,j}^2\right)^{\frac{1}{2}} = n = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 1\right)^{\frac{1}{2}}.$$

D'après le 6), la première égalité implique $rg(M) \leq 1$ et donc $rg(M) = 1$ puisque $\|M\|_{op} = n \neq 0$.
La deuxième égalité et le fait que $\forall i, j \in \{1, ..., n\}$, $M_{i,j}^2 \leq 1$ implique $\forall i, j \in \{1, ..., n\}$, $M_{i,j}^2 = 1$.
Donc l'égalité $\|M\|_{op} = n$ implique $rg(M) = 1$ et $\forall i, j \in \{1, ..., n\}$, $M_{i,j}^2 = 1$.

Réciproquement, supposons $rg\left(M\right)=1$ et $\forall i,j\in\left\{1,...,n\right\}$, $M_{i,j}^{2}=1$.

Alors $rg\left(M\right)\leq 1$, donc d'après le résultat de la question 6), on a l'égalité $\left\|M\right\|_{op}=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}M_{i,j}^{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ et comme

$$\forall i,j\in\left\{1,...,n\right\},M_{i,j}^{2}=1.$$

Alors

$$\left\|M\right\|_{op}=\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}M_{i,j}^{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}1\right)^{\frac{1}{2}}=\left(n^{2}\right)^{\frac{1}{2}}=n$$

Donc il y'a égalité $\left\|M\right\|_{op}=n$ ssi $rg\left(M\right)=1$ et $\forall i,j\in\left\{1,...,n\right\}$, $M_{i,j}^{2}=1$.

Notons alors

$$E=\left\{M=\left(M_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n}\in\mathcal{M}_{n}\left(\mathbb{R}\right)\ ;\ rg\left(M\right)=1\text{ et }\forall i,j\in\left\{1,...,n\right\},M_{i,j}^{2}=1.\right\}$$

Et pour $\varepsilon=\left(\varepsilon_{1},...,\varepsilon_{n}\right)\in\left\{-1,1\right\}^{n}$, notons $X_{\varepsilon}=\begin{pmatrix}\varepsilon_{1}\\ \vdots\\ \varepsilon_{n}\end{pmatrix}$.

Alors on vérifie que E est l'ensemble des matrices dont les colonnes sont $\left(X_{\varepsilon},\mu_{1}.X_{\varepsilon},...,\mu_{n-1}.X_{\varepsilon}\right)$, avec $\varepsilon\in\left\{-1,1\right\}^{n}$ et $\mu_{1},...,\mu_{n-1}\in\left\{-1,1\right\}$ et que l'application définie de $\left\{-1,1\right\}^{n}\times\left\{-1,1\right\}^{n-1}$ qui à $\left(\varepsilon,\left(\mu_{1},...,\mu_{n-1}\right)\right)$ associe la matrice dont les colonnes sont $\left(X_{\varepsilon},\mu_{1}.X_{\varepsilon},...,\mu_{n-1}.X_{\varepsilon}\right)$ est bijective. En particulier

$$card\left(E\right)=2^{n}.2^{n-1}=2^{2n-1}.$$

8. Soit t réel.

On a pour tout $n\in\mathbb{N}^{*}$, et pour tout $k\in\left\{1,...,n\right\}$, $2\leq n+k$, donc

$$2^{n}=\prod_{k=1}^{n}2\leq\prod_{k=1}^{n}\left(n+k\right)\text{ et }2^{n}.n!\leq n!\prod_{k=1}^{n}\left(n+k\right)=\left(2n\right)!$$

De plus cette inégalité est valable pour $n=0$.

Donc pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$2^{n}.n!\leq\left(2n\right)!$$

Donc pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\frac{t^{2n}}{\left(2n\right)!}\leq\frac{t^{2n}}{2^{n}.n!},$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2n}}{\left(2n\right)!}\leq\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2n}}{2^{n}.n!},$$

ou encore

$$ch\left(t\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2n}}{\left(2n\right)!}\leq\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{t^{2}}{2}\right)^{n}}{n!}=\exp\left(\frac{t^{2}}{2}\right)$$

9. Comme $x \in [-1,1]$, alors $\dfrac{1+x}{2} \in [0,1]$ et par convexité de la fonction exponentielle, on a

$$\exp\left(\frac{1+x}{2}.t+\left(1-\frac{1+x}{2}\right)(-t)\right) \leq \frac{1+x}{2}.\exp(t)+\left(1-\frac{1+x}{2}\right).\exp(t).$$

Ou encore après simplification :

$$\exp(tx) \leq \frac{1+x}{2}.\exp(t)+\left(\frac{1-x}{2}\right).\exp(-t).$$

10. Soit $t \in \mathbb{R}$.

Comme X admet une espérance finie (nulle), alors d'après le théorème de transfert, $\exp(tX)$ admet aussi une espérance finie et

$$E(\exp(tX)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \exp(tx).P(X=x) \quad (*)$$

D'autre part comme X est bornée par 1, alors $X(\Omega) \subset [-1,1]$, donc d'après le 9, on a pour tout $x \in X(\Omega)$,

$$\exp(tx) \leq \frac{1+x}{2}.\exp(t)+\left(\frac{1-x}{2}\right).\exp(-t) = ch(t)+x.sh(t)$$

Et compte tenue de la positivité de P, on a pour tout $x \in X(\Omega)$,

$$\exp(tx).P(X=x) \leq ch(t).P(X=x).+sh(t).(x.P(X=x)). \; (**)$$

Or les familles $(P(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ et $(x.P(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ sont sommables et

$$\begin{cases} \sum\limits_{x\in X(\Omega)} P(X=x) = 1 \text{ car } ((X=x))_{x\in X(\Omega)} \text{ est un système complet d'événements} \\ \sum\limits_{x\in X(\Omega)} x.P(X=x) = E(X) = 0 \text{ car } X \text{ est supposée centrée} \end{cases}.$$

Donc les familles $(ch(t).P(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ et $(sh(t).(x.P(X=x)))_{x\in X(\Omega)}$ sont sommables et

$$\begin{cases} \sum\limits_{x\in X(\Omega)} ch(t).P(X=x) = ch(t) \\ \sum\limits_{x\in X(\Omega)} sh(t).(x.P(X=x)) = 0 \end{cases} \quad (***)$$

Donc compte tenues de (*), (**) et (***),

$$E(\exp(tX)) \leq ch(t).$$

Mais par le 8,

$$ch(t) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right).$$

Donc

$$E(\exp(tX)) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

Et ceci pour tout t réel. Donc X est $1-$sous-gaussienne.

Si maintenant X est bornée par α et centrée, alors on vérifie que $\frac{1}{\alpha}.X$ est bornée par 1 et centrée.

Donc d'après ce qui précède, $\frac{1}{\alpha}.X$ est $1-$sous-gaussienne.

Donc pour tout t réel,

$$E\left(\exp\left(t.\left(\frac{1}{\alpha}.X\right)\right)\right) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

ou encore $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$E\left(\exp\left(\frac{1}{\alpha}t..X\right)\right) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

ou encore $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$E\left(\exp\left(t..X\right)\right) \leq \exp\left(\frac{\alpha^2.t^2}{2}\right)$$

Donc X est $\alpha-$sous-gaussienne.

11. Soit t réel.

Comme $X_1, ..., X_n$ sont mutuellement indépendantes et chacune admet une espérance finie, alors les variables aléatoires

$\exp\left(t.\mu_1.X_1\right), ..., \exp\left(t.\mu_1.X_n\right)$ sont mutuellement indépendantes et chacune admet une espérance finie, donc leur produit

$\exp\left(t.\mu_1.X_1\right) ... \exp\left(t.\mu_1.X_n\right)$ admet une espérance finie et

$$E\left(\exp\left(t.\mu_1.X_1\right) ... \exp\left(t.\mu_1.X_n\right)\right) = E\left(\exp\left(t.\mu_1.X_1\right)\right) ... E\left(\exp\left(t.\mu_1.X_n\right)\right)$$

Mais

$$\exp\left(t.\mu_1.X_1\right) ... \exp\left(t.\mu_1.X_n\right) = \exp\left(t.\sum_{i=1}^{n}\mu_i.X_i\right)$$

et $\forall i \in \{1, ..., n\}$, X_i est $\alpha-$sous-gaussienne, donc .

$$E\left(\exp\left(t.\mu_i.X_i\right)\right) \leq \exp\left(\frac{\alpha^2\left(t.\mu_i\right)^2}{2}\right)$$

Donc

$$E\left(\exp\left(t.\sum_{i=1}^{n}\mu_i.X_i\right)\right) \leq \exp\left(\frac{\alpha^2\left(t.\mu_1\right)^2}{2}\right) ... \exp\left(\frac{\alpha^2\left(t.\mu_n\right)^2}{2}\right)$$

ou encore

$$E\left(\exp\left(t.\sum_{i=1}^{n}\mu_i.X_i\right)\right) \leq \exp\left(\frac{\alpha^2.t^2\left(\mu_1^2 + ... + \mu_n^2\right)}{2}\right)$$

Et compte tenue de l'hypothèse $\mu_1^2 + ... + \mu_n^2 = 1$, on obtient

$$E\left(\exp\left(t.\sum_{i=1}^{n}\mu_i.X_i\right)\right) \leq \exp\left(\frac{\alpha^2.t^2}{2}\right).$$

Donc $\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i.X_i$ est $\alpha-$sous-gaussienne.

12. Soit $t \rangle 0$.

Alors on vérifie que
$$(X \geq \lambda) = (\exp(t.X) \geq \exp(t.\lambda))$$
et donc
$$P(X \geq \lambda) = P(\exp(t.X) \geq \exp(t.\lambda)) \text{ (*)}$$
Mais la variable aléatoire X est supposé $\alpha-$sous-gaussienne.donc $\exp(t.X)$ admet une espérance finie et de plus c'est une

variable aléatoire positive.

Donc d'après l'inégalité de Markov,
$$P(\exp(t.X) \geq \exp(t.\lambda)) \leq \frac{E(\exp(t.X))}{\exp(t.\lambda)}$$
Mais toujours puisque X est supposé $\alpha-$sous-gaussienne, alors
$$E(\exp(t.X)) \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right).$$
Donc
$$P(\exp(t.X) \geq \exp(t.\lambda)) \leq \frac{\exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right)}{\exp(t.\lambda)}$$
ou encore
$$P(\exp(t.X) \geq \exp(t.\lambda)) \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t.\lambda\right)$$
Et compte tenue de l'égalité (*), on obtient :
$$P(X \geq \lambda) \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t.\lambda\right). \text{ (**)}$$
D'autre part,
$$(|X| \geq \lambda) = (X \geq \lambda) \cup (-X \geq \lambda)$$
Donc
$$P(|X| \geq \lambda) = P((X \geq \lambda) \cup (-X \geq \lambda)) \leq P(X \geq \lambda) + P(-X \geq \lambda) \text{ (***)}$$
Mais comme X est supposé $\alpha-$sous-gaussienne, alors on vérifie sans peine que $-X$ est aussi $\alpha-$sous-gaussienne.

Donc en appliquant l'inégalité (**) à X et à $-X$, on obtient $\begin{cases} P(X \geq \lambda) \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t.\lambda\right) \\ P(-X \geq \lambda) \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t.\lambda\right) \end{cases}$

Et compte tenue de l'inégalité (***), on obtient
$$P(|X| \geq \lambda) \leq 2.\exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t.\lambda\right)$$

On a donc montré que pour tout $t\rangle 0$,

$$P\left(|X| \geq \lambda\right) \leq 2.\exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t.\lambda\right)$$

En appliquant cette inégalité pour $t = \dfrac{\lambda}{\alpha^2}\rangle 0$, on obtient l'inégalitée demandée, soit

$$P\left(|X| \geq \lambda\right) \leq 2.\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2.\alpha^2}\right).$$

13. Supposons X est d'espérance finie donc d'après le théorème de transfert, $[X]$ est d'espérance finie et

$$E\left([X]\right) = \sum_{x\in X(\Omega)} [x].P\left(X = x\right) \text{ (*)}$$

de plus comme $[X]$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$ puisque X est supposée à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

Donc d'après le résultat admis, la série $\sum P\left([X] \geq k\right)$ converge et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P\left([X] \geq k\right) = E\left([X]\right) \text{ (**)}$$

Or

$$\forall k \geq 1, P\left(X \geq k\right) = P\left([X] \geq k\right), \text{(***)}$$

puisqu'on vérifie sans peine l'égalitée $(X \geq k) = ([X] \geq k)$ pour tout $k \geq 1$.

Donc la série $\sum P\left(X \geq k\right)$ converge et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P\left(X \geq k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} P\left([X] \geq k\right)$$

Et compte tenues des égalitées (*) et (**), on obtient

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P\left(X \geq k\right) = \sum_{x\in X(\Omega)} [x].P\left(X = x\right)$$

Mais

$$\sum_{x\in X(\Omega)} [x].P\left(X = x\right) \leq \sum_{x\in X(\Omega)} x.P\left(X = x\right) = E\left(X\right).$$

Par suite

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P\left(X \geq k\right) \leq E\left(X\right).$$

Réciproquement, supposons la convergence de la série $\sum P\left(X \geq k\right)$, donc la série $\sum P\left([X] \geq k\right)$ de plus $[X]$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$,

donc d'après le résultat admis, $[X]$ admet une espérance finie et

$$E\left([X]\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} P\left([X] \geq k\right) \text{ (1)}$$

donc d'après le théorème de transfert, X admet une espérance finie.
Mais $X \leq 1 + [X]$, donc par croissance de l'espérance,

$$E(X) \leq 1 + E([X])$$

ou encore, en tenant compte de l'égalitée (1),

$$E(X) \leq 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} P([X] \geq k)$$

ou encore, en tenant compte de la relation (***),

$$E(X) \leq 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k).$$

14. Soit $k\rangle 0$.
On vérifie l'égalitée

$$\left(\exp\left(\frac{\beta^2.X^2}{2}\right) \geq k\right) = \left(|X| \geq \frac{\sqrt{2}}{\beta}.\sqrt{\ln(k)}\right) \text{ (*)}$$

Mais compte tenu du résultat du 12),

$$P\left(|X| \geq \frac{\sqrt{2}}{\beta}.\sqrt{\ln(k)}\right) \leq 2.\exp\left(-\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{\beta}.\sqrt{\ln(k)}\right)^2}{2.\alpha^2}\right)$$

ou encore

$$P\left(|X| \geq \frac{\sqrt{2}}{\beta}.\sqrt{\ln(k)}\right) \leq 2.\exp\left(-\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{\beta}.\sqrt{\ln(k)}\right)^2}{2.\alpha^2}\right)$$

Mais après simplification,

$$2.\exp\left(-\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{\beta}.\sqrt{\ln(k)}\right)^2}{2.\alpha^2}\right) = 2.k^{-\eta}$$

Donc

$$P\left(|X| \geq \frac{\sqrt{2}}{\beta}.\sqrt{\ln(k)}\right) \leq 2.k^{-\eta}$$

Et en tenant compte de l'égalitée (*), on obtient

$$P\left(\exp\left(\frac{\beta^2.X^2}{2}\right)\geq k\right)\leq 2.k^{-\eta}.(**)$$

D'autre part, si $\alpha.\beta\langle 1$, alors $\eta=\dfrac{1}{\alpha^2.\beta^2}\langle 1$, donc la série de Riemanne $\sum 2.k^{-\eta}$ converge et donc compte tenue de l'inégalité (**)

précédente, la série $\sum P\left(\exp\left(\dfrac{\beta^2.X^2}{2}\right)\geq k\right)$ converge et

$$\sum_{k=1}^{+\infty}P\left(\exp\left(\frac{\beta^2.X^2}{2}\right)\geq k\right)\leq\sum_{k=1}^{+\infty}2.k^{-\eta}=2\zeta\left(\eta\right).(***)$$

Mais la variable aléatoire $\exp\left(\dfrac{\beta^2.X^2}{2}\right)$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, donc d'après le résultat du 13),

$\exp\left(\dfrac{\beta^2.X^2}{2}\right)$ est d'espérance finie

et

$$E\left(\exp\left(\frac{\beta^2.X^2}{2}\right)\right)\leq 1+\sum_{k=1}^{+\infty}P\left(\exp\left(\frac{\beta^2.X^2}{2}\right)\geq k\right)$$

D'où

$$E\left(\exp\left(\frac{\beta^2.X^2}{2}\right)\right)\leq 1+2\zeta\left(\eta\right)$$

15. Raisonnons par l'absurde et supposons que pour toute partie finie A de K, K n'est pas inclus dans $\underset{a\in A}{\cup}B_{a,\frac{\varepsilon}{2}}$ et notons $\mathcal{H}$ cette hypothèse.

    K étant supposé non vide, donc contient un vecteur x_0, et l'hypothèse $\mathcal{H}$ appliquée à la partie $\{x_0\}$ assure l'existence de x_1 dans $K\backslash B_{x_0,\frac{\varepsilon}{2}}$.

    Soit $n\geq 1$ et supposons l'existence de $x_0,...,x_n$ dans K, tels que pour tout

$$k\in\{1,...,n\},x_k\in K\backslash\bigcup_{i=0}^{k-1}B_{x_i,\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Encore l'hypothèse $\mathcal{H}$ appliqué à la partie $\{x_0,...,x_n\}$ assure l'existence de x_{n+1} dans $K\backslash\bigcup_{i=0}^{n}B_{x_i,\frac{\varepsilon}{2}}$.

On a donc constuit par récurrence une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de K telle que

$$\forall n\in\mathbb{N},x_{n+1}\in K\backslash\bigcup_{i=0}^{n}B_{x_i,\frac{\varepsilon}{2}}\ (*)$$

Et comme K est compact, alors on peut extraire de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $\left(x\varphi_{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente dans K et si on note l sa

limite, alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq p$, $\left\|x\varphi_{(n)} - l\right\| \leq \dfrac{\varepsilon}{4}$ et donc par l'inégalité triangulaire,

$$\forall n \geq p, \left\|x\varphi_{(n+1)} - x\varphi_{(n)}\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

En particulier,

$$x\varphi_{(p+1)} \in B_{x\varphi_{(p)},\frac{\varepsilon}{2}}$$

Ceci contredit l'hypothèse (*).

D'où l'existence d'un sous-ensemble fini A de K tel que

$$K \subset \underset{a\in A}{\cup} B_{a,\frac{\varepsilon}{2}}$$

16. Soit A un ensemble du type considéré à la question précédente et notons p son cardinal.

On va raisonner par l'absurde et supposons que Λ contient au moins $p+1$ éléments $x_1, ..., x_{p+1}$ distincts deux à deux.

D'autre part, comme $\Lambda \subset K \subset \underset{a\in A}{\cup} B_{a,\frac{\varepsilon}{2}}$, alors

$$\forall i \in \{1, ..., p+1\}, \exists a_i \in A \text{ tel que } x_i \in B_{a_i,\frac{\varepsilon}{2}}$$

D'autre part, puisque $card\,(A) = p$, alors $\exists i, j \in \{1, ..., p+1\}$ tel que $i \neq j$ et $a_i = a_j$.

Donc x_i et x_j sont dans la même boule $B_{a_i,\frac{\varepsilon}{2}}$, donc $\begin{cases} \|x_i - a_i\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ \|x_j - a_i\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$ et par l'inégalité triangulaire, $\|x_i - x_j\| \leq \varepsilon$.

Ceci contredit l'hypothèse :

$$\forall x \neq y \in \Lambda, \|x - y\| \rangle \varepsilon \text{ (*)}$$

Donc Λ est fini et son cardinal est majoré par celui de A.

Si de plus Λ est de cardinal maximal parmi les sous ensembles de K vérifiant la propriété (*) précédente, alors $K \subset \underset{a\in\Lambda}{\cup} B_{a,\varepsilon}$.

En effet raisonnons par l'absurde et supposons K non inclus dans $\underset{a\in\Lambda}{\cup} B_{a,\varepsilon}$, alors il existe $b \in K$ et $b \notin \underset{a\in\Lambda}{\cup} B_{a,\varepsilon}$, donc

$$\forall a \in \Lambda, \|b - a\| \rangle \varepsilon.$$

Donc si on note $\Lambda' = \Lambda \cup \{b\}$, alors Λ' vérifie la propriété (*) si dessus et $card\,(\Lambda') = card\,(\Lambda) + 1 \rangle card\,(\Lambda)$.

Ceci contredit l'hypothèse faite sur Λ.

D'où

$$K \subset \underset{a\in\Lambda}{\cup} B_{a,\varepsilon}$$

Remarque :

L'existence de Λ partie de K et de cardinal maximal parmis les sous ensembles de K vérifiant la propriété (*), découle du fait que

la partie $\{card\Delta \ / \ \Delta \subset K$ et Δ vérifie (*)$\}$ est une partie de $\mathbb{N}$ non vide et majorée par $card\,(A)$

17. Soit $a \in \Lambda$. Si $x \in B_{a,\frac{\varepsilon}{2}}$, alors $\|x-a\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, donc par l'inégalité triangulaire,

$$\|x\| \leq \|x-a\| + \|a\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \|a\|$$

Mais $\Lambda \subset S^{n-1}$, donc $\|a\| = 1$.

Donc

$$\|x\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 1$$

Par suite

$$B_{a,\frac{\varepsilon}{2}} \subset B_{0,1+\frac{\varepsilon}{2}}$$

En particulier

$$\bigcup_{a\in\Lambda} B_{a,\frac{\varepsilon}{2}} \subset B_{0,1+\frac{\varepsilon}{2}}$$

Donc

$$\mu\left(\bigcup_{a\in\Lambda} B_{a,\frac{\varepsilon}{2}}\right) \leq \mu\left(B_{0,1+\frac{\varepsilon}{2}}\right)$$

Or Λ vérifie l'hypothèse (*) donc les compacts $B_{a,\frac{\varepsilon}{2}}$ pour $a \in \Lambda$ sont deux à deux disjoints, donc

$$\mu\left(\bigcup_{a\in\Lambda} B_{a,\frac{\varepsilon}{2}}\right) = \sum_{a\in\Lambda}\mu\left(B_{a,\frac{\varepsilon}{2}}\right) = \sum_{a\in\Lambda}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^n = card\,(\Lambda)\,.\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^n$$

Et en tenant compte de l'inégalité précédente, on obtient

$$card\,(\Lambda)\,.\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^n \leq \mu\left(B_{0,1+\frac{\varepsilon}{2}}\right) = \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^n$$

ou encore

$$card\,(\Lambda) \leq \left(\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^n$$

18. Soit $a \in S^{n-1}$ et $b = -a$, alors $\|a-b\| = 2.\,\|a\| = 2\rangle\frac{1}{2}$.

Donc en prenant $\Lambda = \{a, b\}$, alors Λ est un sous-ensemble du compact S^{n-1}, vérifiant

$$\forall x \neq y \in \Lambda, \|x-y\|\rangle\frac{1}{2} \text{ (*)}$$

Alors en appliquant le résultat du 16), si on note Λ_n un sous ensemble de S^{n-1}de cardinal maximal parmis les sous ensembles de

S^{n-1}vérifiant la propriété (*) ci dessus, on obtient

$$S^{n-1} \subset \bigcup_{a\in\Lambda_n} B_{a,\frac{1}{2}}$$

Et en appliquant le résultat du 17) à Λ_n, on obtient

$$card\left(\Lambda_n\right) \leq \left(\frac{2+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)^n = 5^n$$

19. Soit $i \in \{1,...,n\}$.
Alors

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} x_j.M_{i,j}^{(n)} \text{ (*)}$$

Mais par hypothèse $\sum\limits_{j=1}^{n}\left(x_j\right)^2 = 1$ puisque $x \in S^{n-1}$ et pour tout $j \in \{1,...,n\}$, $M_{i,1}^{(n)},...,M_{i,n}^{(n)}$ sont mutuellement indépendantes et

$\alpha-$sous-gaussienne, donc d'après le résultat du 11), $y_i = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j.M_{i,j}^{(n)}$ est $\alpha-$sous-gaussienne.

Donc d'après le résultat du 14), dit inégalité d'Orlicz,

$$0 \leq E\left(\exp\left(\gamma.y_i^2\right)\right) \leq 5$$

et ceci pour tout $i \in \{1,...,n\}$, donc

$$\prod_{i=1}^{n} E\left(\exp\left(\gamma.y_i^2\right)\right) \leq 5^n \text{ (**)}$$

D'autre part, les variables aléatoires $M_{i,j}^{(n)}$ pour i, $j \in \{1,...,n\}$ sont par hypothèse mutuellement indépendantes, donc en tenant

compte des égalités (*) ci dessus, les y_i sont aussi mutuellement indépendantes, donc les $\exp\left(\gamma.y_i^2\right)$ sont aussi mutuellement

indépendantes, par suite

$$\prod_{i=1}^{n} E\left(\exp\left(\gamma.y_i^2\right)\right) = E\left(\prod_{i=1}^{n}\exp\left(\gamma.y_i^2\right)\right)$$

ou encore

$$\prod_{i=1}^{n} E\left(\exp\left(\gamma.y_i^2\right)\right) = E\left(\exp\left(\gamma.\left\|y\right\|^2\right)\right)$$

Donc en tenant compte de l'inégalité (**) ci dessus, on obtient

$$E\left(\exp\left(\gamma.\left\|y\right\|^2\right)\right) \leq 5^n \text{ (***)}$$

Soit maintenant $r\rangle 0$.

On vérifie sans peine l'égalité

$$\left(\|y\| \geq r\sqrt{n}\right) = \left(\exp\left(\gamma \|y\|^2\right) \geq \exp\left(\gamma.r^2.n\right)\right)$$

Donc

$$P\left(\|y\| \geq r\sqrt{n}\right) = P\left(\exp\left(\gamma \|y\|^2\right) \geq \exp\left(\gamma.r^2.n\right)\right) \text{ (****)}$$

Mais d'après l'inégalité de Markov,

$$P\left(\exp\left(\gamma \|y\|^2\right) \geq \exp\left(\gamma.r^2.n\right)\right) \leq \frac{E\left(\exp\left(\gamma \|y\|^2\right)\right)}{\exp\left(\gamma.r^2.n\right)}$$

Et en tenant compte de l'inégalité (***) si dessus, on obtient

$$P\left(\exp\left(\gamma \|y\|^2\right) \geq \exp\left(\gamma.r^2.n\right)\right) \leq \frac{5^n}{\exp\left(\gamma.r^2.n\right)}$$

ou encore

$$P\left(\exp\left(\gamma \|y\|^2\right) \geq \exp\left(\gamma.r^2.n\right)\right) \leq \left(5.\exp\left(-\gamma.r^2\right)\right)^n$$

Enfin en tenant compte de l'égalité (****), on obtient,

$$P\left(\|y\| \geq r\sqrt{n}\right) \leq \left(5.\exp\left(-\gamma.r^2\right)\right)^n$$

En conclusion,

$$\forall x \in S^{n-1}, P\left(\left\|M^{(n)}.x\right\| \geq r\sqrt{n}\right) \leq \left(5.\exp\left(-\gamma.r^2\right)\right)^n$$

20. Soit $r\rangle 0$ et supposons $\left\|M^{(n)}\right\|_{op} \geq 2.r.\sqrt{n}$.

Soit $x \in S^{n-1}$ tel que

$$\left\|M^{(n)}\right\|_{op} = \left\|M^{(n)}.x\right\| \text{ (*)}$$

. On a donc

$$\left\|M^{(n)}.x\right\| \geq 2.r.\sqrt{n} \text{ (**)}$$

Mais comme $S^{n-1} \subset \bigcup\limits_{a \in \Lambda_n} B_{a,\frac{1}{2}}$, alors il existe $a \in \Lambda_n$ tel que $x \in B_{a,\frac{1}{2}}$, donc

$$\|x - a\| \leq \frac{1}{2} \text{ (***)}$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité triangulaire et le résultat du 2) et l'égalité (*) ci dessus on obtient succéssivement

$$= \left\|M^{(n)}.a - M^{(n)}.x + M^{(n)}.x\right\| \geq \left\|M^{(n)}.x\right\| - \left\|M^{(n)}.a - M^{(n)}.x\right\| \geq \left\|M^{(n)}.x\right\| (1 - \|x - a\|)$$

ou encore en utilisant les inégalités (**) et (***) ci dessus, on obtient

$$\left\|M^{(n)}.a\right\| \geq 2.r.\sqrt{n}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = r.\sqrt{n}$$

On vient alors de montrer l'inclusion

$$\left(\left\|M^{(n)}\right\|_{op} \geq 2.r.\sqrt{n}\right) \subset \bigcup_{a\in\Lambda_n} \left(\left\|M^{(n)}.a\right\| \geq r.\sqrt{n}\right)$$

Donc par croissance de P,

$$P\left(\left\|M^{(n)}\right\|_{op} \geq 2.r.\sqrt{n}\right) \leq P\left(\bigcup_{a\in\Lambda_n} \left\|M^{(n)}.a\right\| \geq r.\sqrt{n}\right)$$

Mais

$$P\left(\bigcup_{a\in\Lambda_n} \left\|M^{(n)}.a\right\| \geq r.\sqrt{n}\right) \leq \sum_{a\in\Lambda_n} \left(P\left\|M^{(n)}.a\right\| \geq r.\sqrt{n}\right)$$

Mais d'après le 19),

$$P\left(\left\|M^{(n)}.a\right\| \geq r.\sqrt{n}\right) \leq \left(5.\exp\left(-\gamma.r^2\right)\right)^n$$

Donc

$$\sum_{a\in\Lambda_n} \left(P\left\|M^{(n)}.a\right\| \geq r.\sqrt{n}\right) \leq \sum_{a\in\Lambda_n} \left(5.\exp\left(-\gamma.r^2\right)\right)^n = card\left(\Lambda_n\right).\left(5.\exp\left(-\gamma.r^2\right)\right)^n$$

Et en tenant compte des deux inégalités précédentes, on obtient

$$P\left(\left\|M^{(n)}\right\|_{op} \geq 2.r.\sqrt{n}\right) \leq card\left(\Lambda_n\right).\left(5.\exp\left(-\gamma.r^2\right)\right)^n$$

ou encore puisque d'après le 18), $card\left(\Lambda_n\right) \leq 5^n$,

$$P\left(\left\|M^{(n)}\right\|_{op} \geq 2.r.\sqrt{n}\right) \leq \left(25.\exp\left(-\gamma.r^2\right)\right)^n$$