Mathématiques 2

TSI **2015**

4 heures Calculatrices autorisées

Notations et définitions

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1. On notera par ailleurs :
- S_n l'ensemble des permutations de l'ensemble $[\![1,n]\!]$ des entiers compris entre 1 et n, c'est-à-dire des applications de $[\![1,n]\!]$ vers lui-même qui sont bijectives. C'est un ensemble fini ayant $n!$ éléments et qui forme un groupe pour la loi de composition $\circ$, appelé groupe symétrique d'ordre n.
- $\mathcal{R}^n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Il est muni du produit scalaire défini par $\langle X, Y\rangle = X^T Y$ ainsi que de la norme associée définie par $\|X\| = \sqrt{\langle X, X\rangle}$.
- $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il est muni du produit scalaire défini par $(A \mid B) = \mathrm{tr}(A^T B)$ ainsi que de la norme associée définie par $N(A) = \sqrt{(A \mid A)}$.
- $I_n = \mathrm{diag}(1, ..., 1)$ la matrice unité de $\mathcal{M}_n$.
- $\mathcal{O}(n) = \{P \in \mathcal{M}_n \,:\, P^T P = I_n\}$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n$. On rappelle que c'est un groupe pour le produit matriciel appelé groupe orthogonal d'ordre n.
- $\mathcal{SO}(n) = \{P \in \mathcal{O}(n) : \det(P) = 1\}$.

On définit également les points suivants.
- Pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n$, on définit le segment $[A, B] = \{(1-t)A + tB,\ t \in [0,1]\}$.
- Une partie Φ de $\mathcal{M}_n$ est dite *convexe* lorsque pour tous $A, B \in \Phi$, on a $[A, B] \subset \Phi$.
- Si Φ est convexe, $A \in \Phi$ est dit *extrémal* (dans Φ) si l'égalité $A = (1-t)A_1 + tA_2$ avec $t \in]0,1[$ et A_1, A_2 dans Φ implique $A = A_1 = A_2$.

Ce problème a pour objectif d'étudier des propriétés de certains sous-ensembles de $\mathcal{M}_n$ et d'en donner quelques illustrations géométriques. Il est constitué de cinq parties, largement indépendantes entre elles.

I Étude de l'ensemble $\mathcal{E}_n$

Dans toute cette partie, on s'intéresse à l'ensemble défini par $\mathcal{E}_n = \{P \in \mathcal{M}_n :\ \forall X \in \mathcal{R}^n, \quad \|PX\| \leqslant \|X\|\}$.

I.A – Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ pour que la matrice $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ appartienne à $\mathcal{E}_2$.

I.B – Si $M \in \mathcal{E}_n$, que dire de ses valeurs propres réelles ?

Calculer le spectre de $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ et en déduire que A n'appartient pas à $\mathcal{E}_3$.

I.C – Montrer que $\mathcal{E}_n$ est convexe.

I.D – Soit $M \in \mathcal{M}_n$. On note $C_1, C_2, ..., C_n$ ses vecteurs colonnes.

Montrer que $N(M)^2 = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \|C_j\|^2$. En déduire une expression de $N(M)$ à l'aide des coefficients de M.

I.E – Montrer alors que $\mathcal{E}_n$ contient la boule unité fermée de $\mathcal{M}_n$.

On pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

I.F – Montrer que $\mathcal{E}_n$ est contenu dans la boule fermée de centre 0 et de rayon $\sqrt{n}$. Montrer de plus que cette inclusion est stricte dans le cas $n = 3$.

I.G – Soit $A \in \mathcal{M}_n$ symétrique (vérifiant $A^T = A$). Montrer que $A \in \mathcal{E}_n$ si et seulement si toutes ses valeurs propres sont dans $[-1, 1]$.

I.H – Soit $B \in \mathcal{M}_n$ et $A = B^T B$. Montrer que $B \in \mathcal{E}_n$ si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont dans $[0, 1]$.

II Matrices de permutation

II.A – ***Cas*** $n = 3$

L'ensemble S_3 des permutations de $[\![1,3]\!]$ contient 6 éléments. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathcal{R}^3$.

II.A.1) Sachant qu'une application σ de S_3 est déterminée par la donnée du triplet $(\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3))$, expliciter les 6 applications de S_3.

II.A.2) Justifier que $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et préciser ses valeurs propres complexes.

II.A.3) Justifier que $L \in \mathcal{SO}(3)$. En déduire l'existence de $M \in \mathcal{SO}(3)$ telle que $M^3 = L$. Combien existe-t-il de matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $M^3 = L$?

II.A.4) Soit $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Le segment $[K, L]$ est-il contenu dans $\mathcal{O}(3)$?

Les ensembles $\{K^r L^h \ : \ r \in \{0,1\}, h \in \{0,1,2\}\}$ et $\{M_\sigma : \ \sigma \in S_3\}$ sont-ils égaux ?

II.A.5) Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel (réel) de $\mathcal{M}_3$ engendré par l'ensemble $\{M_\sigma : \ \sigma \in S_3\}$.

II.B – ***Cas général*** $n \geqslant 1$

II.B.1) On note $(e_1, e_2, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathcal{R}^n$. Pour tout $\sigma \in S_n$, on note M_σ l'unique matrice de $\mathcal{M}_n$ telle que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $M_\sigma e_j = e_{\sigma(j)}$.

Préciser les coefficients de M_σ et justifier que $M_\sigma \in \mathcal{O}(n)$.

II.C – Une matrice de la forme M_σ est dite *matrice de permutation* et on note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des matrices de permutations de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que l'application $\varphi : \sigma \mapsto M_\sigma$ du groupe $(S_n, \circ)$ dans le groupe multiplicatif $\mathcal{O}(n)$ est injective et que, pour tout σ et σ' de S_n, $\varphi(\sigma \circ \sigma') = \varphi(\sigma) \circ \varphi(\sigma')$.

On en déduit que $\mathcal{P}_n$ est un sous-groupe de $\mathcal{O}(n)$, fini de cardinal $n!$.

II.C.1) Pour tout $\sigma \in S_n$, montrer que $\{(M_\sigma)^k : \ k \in \mathbb{N}^*\}$ est fini. En déduire l'existence de $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $(M_\sigma)^p = I_n$.

III Matrices magiques

Une matrice $M = (m_{i,j})$ dans $\mathcal{M}_n$ est dite *magique* s'il existe un réel $s(M)$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on ait :

$$\sum_{k=1}^{n} m_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} m_{k,i} = s(M)$$

On note Π_n l'ensemble des matrices magiques de $\mathcal{M}_n$.

On note encore $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^n$ et $J = UU^T = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n$.

Soient également $D = \mathrm{vect}(U)$ la droite de $\mathcal{R}^n$ engendrée par U et $H = \left\{ \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^n : \sum_{i=1}^{n} h_i = 0 \right\}$ (l'ensemble des vecteurs colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont la somme des coordonnées vaut 0).

III.A – Montrer que les matrices de permutations sont magiques, c'est-à-dire que $\mathcal{P}_n \subset \Pi_n$.

III.B – Montrer que les sous espaces D et H sont supplémentaires dans $\mathcal{R}^n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

III.C – Soit $M \in \mathcal{M}_n$.

III.C.1) Montrer que M est magique si et seulement s'il existe un réel λ tel que $MJ = JM = \lambda J$.

III.C.2) Montrer que M est magique si et seulement si M laisse stable D et H.

III.C.3) Montrer que Π_n est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n$ stable pour le produit matriciel.

III.C.4) Montrer que $s : M \in \Pi_n \mapsto s(M) \in \mathbb{R}$ est une application linéaire, vérifiant $s(MM') = s(M)s(M')$ pour tous $M, M' \in \Pi_n$.

III.C.5) Soit M magique et inversible. Montrer que M^{-1} est magique et calculer $s(M^{-1})$.

III.D – Déterminer $\dim(\Pi_n)$.

III.E – Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $J^k \in \Pi_n$ et que $Z = \mathrm{vect}(I_n, J)$ est stable pour le produit matriciel.

III.F – Déterminer le centre de Π_n c'est-à-dire : $\{M \in \Pi_n : \forall A \in \Pi_n, AM = MA\}$.

On pourra utiliser les matrices de permutation élémentaire $P_{i,j}$ avec $i < j$, associée à la permutation de $[\![1, n]\!]$ qui échange i et j et laisse invariant les autres éléments.

III.G – Déterminer un supplémentaire de $\ker(s)$ dans Π_n.

III.H – ***Matrices super-magiques***

Une matrice M à coefficients dans $\mathbb{R}$ de taille $n \times n$ est dite *super-magique* s'il existe un nombre $s(M)$ tel que les sommes des coefficients sur les lignes, sur les colonnes et sur les deux diagonales soient toutes égales à $s(M)$.

III.H.1) Exprimer les conditions précédentes en fonction des $M_{i,j}$ (coefficient de M à la i-ème ligne et j-ème colonne).

III.H.2) On choisit $n = 3$. Déterminer une base de l'espace vectoriel des matrices super-magiques de $\mathcal{M}_3$.

IV Matrices bistochastiques

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n$ est dite *bistochastique* si M est magique ($M \in \Pi_n$), tous les coefficients de M sont positifs et $s(M) = 1$. Ainsi si $M = \left(m_{i,j}\right)$ on doit avoir : $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$, $m_{i,j} \geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} m_{k,i} = 1$.

On note $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des matrices bistochastiques de $\mathcal{M}_n$.

IV.A – Montrer que les matrices de permutation sont bistochastiques, c'est-à-dire que $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{B}_n$.

IV.B – Les matrices bistochastiques sont-elles toujours inversibles ?

IV.C – Montrer que $\mathcal{B}_n$ est stable pour le produit matriciel.

IV.D – Montrer que $\mathrm{vect}(\mathcal{B}_n) = \Pi_n$.

IV.E* – *Exemple 1

IV.E.1) Pour tout $a \in [0, 1]$, on note $U_a = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$.

Justifier qu'une telle matrice U_a est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

IV.E.2) Déterminer $a \in [0, 1]$ tel que U_a soit une matrice orthogonale.

IV.E.3) Déterminer le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ engendré par $\mathcal{B}_2 = \{U_a : \ a \in [0, 1]\}$.

IV.F* – *Exemple 2

Pour tout $b \in [0, \frac{1}{2}]$, on note $V_b = \begin{pmatrix} 1-2b & b & b \\ b & 1-2b & b \\ b & b & 1-2b \end{pmatrix}$.

IV.F.1) Justifier qu'une telle matrice est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

IV.F.2) Existe-t-il $b \in [0, \frac{1}{2}]$ tel que V_b soit une matrice orthogonale ?

IV.G* – *Exemple 3

IV.G.1) Soit $\Gamma = \left\{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \in \mathcal{O}(3) \right\}$.

Montrer que Γ est la réunion de deux cercles de $\mathbb{R}^3$ (muni de son produit scalaire canonique) dont on précisera les centres et rayons.

IV.G.2) Soient $a, b, c \in [0, 1]$ tels que $a + b + c = 1$ et $W = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

Préciser dans quels cas $W \in \mathcal{O}(3)$.

V Points extrémaux de $\mathcal{B}_n$

V.A – Les sous-ensembles suivants de $\mathcal{M}_n$ sont-ils convexes : $\mathcal{P}_n$, $\mathcal{O}(n)$, $\mathcal{B}_n$, Π_n et $GL_n(\mathbb{R})$?

V.B* – *Matrices de permutations

V.B.1) Décomposer la matrice $A = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ comme combinaison linéaire, à coefficients positifs et de somme 1, de matrices de permutations. Y a-t-il unicité de cette décomposition ?

V.B.2) Montrer que les matrices de permutation sont des points extrémaux de $\mathcal{B}_n$.

V.C – On peut en fait établir la réciproque et le théorème (de Birkhoff) : « Les points extrémaux de $\mathcal{B}_n$ sont exactement les matrices de permutations $\mathcal{P}_n$ ».

On souhaite juste ici établir ce résultat dans le cas simple $n = 2$.

En supposant que $U_a = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}_2$, avec $a \in [0, 1]$ est un point extrémal, justifier que U_a est une matrice de permutation.

• • • FIN • • •