Proposition de corrigé de l'épreuve de math 1, concours Centrale-Supéléc : 2015, section PC

Proposé par : Icheha Mohammed,
Professeur de PSI aux CPGE
Meknes, Maroc

4 juin 2015

1 Partie I

I.A) Soit $F = \mathrm{Vect}(u), (u \in E, u \neq 0)$, une droite de E.
$\Rightarrow$) On a $u \in F$, et, par hypothèse, F est stable par f donc $f(u) \in F$, donc $\exists \lambda \in \mathbb{K}, f(u) = \lambda u$. Comme $u \neq 0$, u est un vecteur propre de f.
$\Leftarrow$) Par hypothèse, u est un vecteur propre de f, alors $\exists \lambda \in \mathbb{K}, f(u) = \lambda u$. Soit $x \in F = \mathrm{Vect}(u)$, alors $\exists \alpha \in \mathbb{K}, x = \alpha u$, donc $f(x) = f(\alpha u) = \alpha f(u) = \alpha \lambda u$ donc $f(x) \in F$ et F est stable par f.

I.B)
I.B.1) $\bullet$ $\{0\}$ et E sont évidement des sous-espaces vectoriels de E, stables par f et $E \neq \{0\}$.
$\bullet$ Donnons un exemple d'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ qui n'admet que deux s.e.v. stables par f.
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tel que :

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}} f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

où $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
Soit F un s.e.v de $\mathbb{R}^2$.
$\bullet$ Si $\dim F = 0$ alors $F = \{0\}$ qui est un un s.e.v stable par f.
$\bullet$ Si $\dim F = 2$ alors $F = \mathbb{R}^2$ qui est un un s.e.v stable par f.
$\bullet$ Si $\dim F = 1$ alors il existe $u \in E \backslash \{0\}$ tel que $F = \mathrm{Vect}\{u\}$. Si F est stable par f alors d'après **I-A)**, u est un vecteur propre de f, donc f admet une valeur propre réelle, ce qui n'est pas possible car $\chi_f = x^2 + 1$ est sans racines réelles. On conclut que f n'admet aucune droite stable.
Conclusion : f n'admet que deux s.e.v stables, à savoir : $\{0\}$ et $E = \mathbb{R}^2$.

I.B.2) $\dim E = n \geq 2$.
$\bullet$ On a : $\{0\} \subsetneq \ker f \subsetneq E$ car f non injectif et $f \neq 0$ et ces trois s.e.v sont stables par f.
$\bullet$ Supposons de plus que $n = \dim E$ est impair. On a : $\dim \ker f + \dim \mathrm{Im}\, f = n$. Comme n est impair les entiers $\dim \ker f$ et $\dim \mathrm{Im}\, f$ ont des parités différentes, donc $\mathrm{Im}\, f \neq \ker f$. De plus, on a :

$$\begin{cases} \{0\} \subsetneq \ker f \subsetneq E \\ \{0\} \subsetneq \mathrm{Im}\, f \subsetneq E \end{cases}$$

car $f \neq 0$ et f non bijectif (car non injectif en dimension finie). On conclut qu'il existe au moins quatre sous-espaces vectoriels stables par f, à savoir : $\{0\}, \ker f, \mathrm{Im}\, f$ et E.

$\bullet$ Un exemple de $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ qui n'admet que trois sous-espaces vectoriels stables : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tel que

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}_c} f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(où $\mathcal{B}_c$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$). Cherchons les droites stables par f, donc on cherche les vecteurs propres de f. On a $\chi_f = \begin{vmatrix} x & -1 \\ 0 & x \end{vmatrix} = x^2$, donc 0 est l'unique valeur propre de f.

$u = (x, y) \in E_0(f) = \ker f \Leftrightarrow f(u) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow y = 0$, donc les vecteurs propres de f sont $u = (x, 0)$, $x \neq 0$. $F = \operatorname{Vect}\{(1, 0)\}$ est alors l'unique droite stable par f. Comme les sev stables par f qui sont de dimensions respectives 0 et 2 sont $\{0\}$ et E, f admet exactement trois sev stables à savoir : $\{0\}, \operatorname{Vect}\{(1, 0)\}$ et E.

I.C)

I.C.1) Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs propres associés à une famille de valeurs propres $(\lambda_i)_{i\in I}$ (i.e : $\forall i \in I, e_i \neq 0$ et $f(e_i) = \lambda_i e_i$).

Posons $F = \operatorname{Vect}(e_i)_{i\in I}$. On a : $f(F) = f(\operatorname{Vect}(e_i)_{i\in I}) = \operatorname{Vect}(f(e_i)_{i\in I}) = \operatorname{Vect}(\lambda_i e_i)_{i\in I} \subset \operatorname{Vect}(e_i)_{i\in I} = F$. Ainsi F est stable par f.

$\bullet$ Posons $E_\lambda(f) = \ker(f - \lambda \operatorname{Id}_E)$, λ étant une valeur propre de f. Pour tout $x \in E_\lambda(f)$, on a $f(x) = \lambda x \in E_\lambda(f)$, donc f induit un endomorphisme f_λ sur $E_\lambda(f)$ tel que $\forall x \in E_\lambda(f), \quad f_\lambda(x) = \lambda x$, donc $f_\lambda = \lambda \operatorname{Id}_{E_\lambda(f)}$ et f_λ est une homothétie.

I.C.2) Supposons que f admet un sous-espace propre $E_\lambda = \ker(f - \lambda \operatorname{Id})$ tel que $\dim E_\lambda \geq 2$, alors $\exists e_1, e_2 \in E_\lambda$ tel que (e_1, e_2) est libre. Posons, pour $\alpha \in \mathbb{K}$, $u_\alpha = \alpha e_1 + e_2$.

$\bullet$ On a $u_\alpha \neq 0$ car (e_1, e_2) libre, de plus $u_\alpha \in E_\lambda$ (car $f(u_\alpha) = \lambda u_\alpha$). Ainsi u_α est un vecteur propre de f donc la droite $D_\alpha = \operatorname{Vect}(u_\alpha)$ est stable par f d'après **I-A**).

$\bullet$ Montrons que si $\alpha \neq \alpha'$ alors $D_\alpha \neq D_{\alpha'}$. On a :

$$\begin{aligned} D_\alpha = D'_\alpha &\Rightarrow \operatorname{Vect}(u_\alpha) = \operatorname{Vect}(u'_\alpha) \\ &\Rightarrow u'_\alpha \in \operatorname{Vect}(u_\alpha) \\ &\Rightarrow \exists \beta \in \mathbb{K}, u'_\alpha = \beta u_\alpha \end{aligned}$$

L'égalité $u'_\alpha = \beta u_\alpha \Rightarrow \alpha' e_1 + e_2 = \beta(\alpha e_1 + e_2)$, donc $\begin{cases} \alpha' = \beta\alpha \\ 1 = \beta \end{cases}$ car (e_1, e_2) libre), donc $\alpha = \alpha'$. Ainsi $\forall \alpha, \alpha' \in \mathbb{K}, \alpha \neq \alpha' \Rightarrow D_\alpha \neq D'_\alpha$. Comme $\mathbb{K}$ est infini, il y'a une infinité de droites stables par f.

I.C.3) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que tous les sous-espaces vectoriels de E sont stables par f, alors pour tout $x \in E\backslash\{0\}$, la droite $D_x = \operatorname{Vect} x$ est stable par f. On a $x \in D_x$ et $f(D_x) \subset D_x$ donc $\exists \lambda_x \in \mathbb{K}, f(x) = \lambda_x x$. Soit $x, y \in E\backslash\{0\}$. Montrons que $\lambda_x = \lambda_y$.

$\bullet$ Si (x, y) est libre, alors $x + y \neq 0$ et on a $\begin{cases} f(x) = \lambda_x x \quad \text{et} \quad f(y) = \lambda_y y \\ f(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) \end{cases}$

L'égalité

$$f(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y)$$

s'écrit :

$$f(x) + f(y) = \lambda_{x+y}(x+y)$$

donc
$$\lambda_x x + \lambda_y y = \lambda_{x+y} x + \lambda_{x+y} y,$$
et par liberté de (x, y) on obtient
$$\lambda_x = \lambda_y = \lambda_{x+y}.$$

• Si (x, y) est liée, comme $x \neq 0$, $\exists \alpha \in \mathbb{K}$ tel que $y = \alpha x$, donc$f(y) = \alpha f(x) = \alpha \lambda_x x$, donc $\lambda_y y = \lambda_x y$ et alors $\lambda_y = \lambda_x$ cra $y \neq 0$.
On conclut que $\forall x, y \in E \backslash \{0\}, \lambda_x = \lambda_y$. Soil λ la valeur commune des $\lambda_x, x \in E \backslash \{0\}$ alors
$$\forall x \in E \backslash \{0\}, f(x) = \lambda x$$
égalité qui est aussi vraie si $x = 0$, donc f est l'homothétie de E de rapport λ.

I.D)
I.D.1)
Ici, $\dim E = n \geq 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Par hypothèse, f est diagonalisable ; donc E admet une base $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ formée de vecteurs propres de f.
Soit F un sev de E.
• Si $F = \{0\}$ alors $F \oplus E = E$ et E est stable par f.
• Si $F = E$ alors $F \oplus \{0\} = E$ et $\{0\}$ est stable par f.
• Si $\{0\} \subsetneq F \subsetneq E$, soit $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$ une base de F. Puisque $\mathscr{B}$ est une famille génératrice de E, d'après le théorème de la base incomplète, il existe des vecteurs $\varepsilon_{p+1}, \cdots, \varepsilon_n$ de la famille $\mathscr{B}$ tel que $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ est une base de E. On a alors $E = F \oplus G$ où $G = \mathrm{Vect}(\varepsilon_{p+1}, \cdots, \varepsilon_n)$. Comme G est engendré par une famille de vecteurs propres de f, on a d'après le **I-C-1)**, G est stable par f.

I.D.2) On va montrer par récurrence sur $p \in [\![1, n]\!]$, où $n = \dim E$, que :
$$\forall p \in [\![1, n]\!], \exists e_1, \cdots, e_p \in E, \exists H_p \text{ sev de } E \text{ tel que } \begin{cases} E = \mathrm{Vect}(e_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Vect}(e_p) \oplus H_p \\ \text{Les } e_i, i = 1 \cdots p \text{ sont des vecteurs propres de } f \\ H_p \text{ est stable par } f \end{cases}$$
• **Démarrage :** Pour $p = 1$, on a E est $\mathbb{C}-$ev non nul, donc f admet au moins une valeur propre $\lambda_1 \in \mathbb{C}$, donc il existe $e_1 \in E \backslash \{0\}$ tel que $f(e_1) = \lambda_1 e_1$. On a $\mathrm{Vect}(e_1)$ est un sous-espace vectoriel stable par f, donc par hypothèse, il admet un sous-espace vectoriel H_1 de E supplémentaire dans E et stable par f. On a donc :
$$\begin{cases} E = \mathrm{Vect}(e_1) \oplus H_1 \\ e_1 \text{ est un vecteur propre de } f \\ H_1 \text{ est stable par } f. \end{cases}$$
• **Hérédité :** Soit $p \in [\![1, n-1]\!]$ tel que la propriété est vraie au rang p. Alors :
$$\exists e_1, \cdots, e_p \in E, \exists H_p \text{ sev de } E \text{ tel que } \begin{cases} E = \mathrm{Vect}(e_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Vect}(e_p) \oplus H_p \quad (\star) \\ \text{Les } e_i \text{ sont des vecteurs propres de } f \\ H_p \text{ est stable par } f \end{cases}$$
$(\star)$ implique $\dim H_p = n - p \geq 1$. H_p étant stable par f, f induit un endomorphisme f_p sur H_p. Comme H_p est un $\mathbb{C}-$espace vectoriel et $\dim H_p \geq 1$, f_p admet au moins une valeur propre $\lambda_{p+1} \in \mathbb{C}$ et par suite

$\exists e_{p+1} \in H_p \backslash\{0\}$ tel que $f_p(e_{p+1}) = \lambda_{p+1} e_{p+1}$, donc e_{p+1} est un vecteur propre de f. Comme $e_{p+1} \in H_p$ et que H_p est en somme directe avec $\operatorname{Vect}(e_1) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Vect}(e_p)$, alors la somme $(\operatorname{Vect}(e_1) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Vect}(e_p)) + \operatorname{Vect} e_{p+1}$ est directe. Comme cette somme est un sous-espace vectoriel stable par f(car engendré par une famille de vecteurs propres de f) alors, par hypothèse, elle admet un supplémentaire H_{p+1} stable par f. Ainsi, on a :

$$\begin{cases} E = \operatorname{Vect}(e_1) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Vect}(e_p) \oplus \operatorname{Vect}(e_{p+1}) \oplus H_{p+1} \\ \text{Les } e_i, i = 1 \cdots p+1 \text{ sont des vecteurs propres de } f \\ H_{p+1} \text{ est stable par } f \end{cases}$$

D'où la propriété est vraie pour $p+1$.
Le principe de recurrence permet de conclure que la propriété est vraie pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, en particulier pour $p = n$, on obtient :

$$\begin{cases} E = \operatorname{Vect}(e_1) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Vect}(e_n) \oplus H_n \\ \text{Les } e_i, i = 1 \cdots, n \text{ sont des vecteurs propres de } f \\ H_n \text{ est stable par } f \end{cases}$$

Comme $\forall i \in [\![1, n]\!], e_i \neq 0$, on déduit de : $E = \operatorname{Vect}(e_1) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Vect}(e_n) \oplus H_n$ que $n = n + \dim H_n$, donc $H_n = \{0\}$ de sorte que : $E = \operatorname{Vect}(e_1) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Vect}(e_n)$ avec $e_1, \cdots, e_n$ des vecteurs propres de f. Ainsi f est diagonalisable.
Traitons maintenant le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
On peut affirmer que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la propriété est en général fausse et on donne le contre-exemple suivant ; $E = \mathbb{R}^2$, $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}_c} f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. On a vu que les seuls sous-espaces vectoriels stables par f sont $\{0\}$ et E eux même admettant des sous-espaces vectoriels supplémentaires stables, mais f n'est pas diagonalisable car le polynôme caractéristique de f est $\chi_f = x^2 + 1$ qui n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.

2 Partie II

$\dim E = n \geq 2$, $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable de valeurs propres 2 à 2 distinctes, $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ ($p \geq 2$). $E_i = \ker(f - \lambda_i \operatorname{Id}), \forall i \in [\![1, p]\!]$.)

II.A)

II.A.1) Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que $F = \overset{p}{\underset{i=1}{\oplus}} (F \cap E_i)$. Soit $x \in F$, donc $\exists (x_1, \cdots, x_p) \in (F \cap E_1) \times \cdots \times (F \cap E_p)$ tel que $x = \sum\limits_{i=1}^{p} x_i$, donc : $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{p} f(x_i) = \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$. Or les $x_i \in F$, et F est un sous-espace vectoriel de E, donc $f(x) \in F$ et alors F est stable par f.

II.A.2)
Soit $x \in F \backslash\{0\}$, on a $x \in E$ et $E = \overset{p}{\underset{i=1}{\oplus}} E_i$ (car f est diagonalisable), donc

$$\exists! (x_1, \cdots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p, \quad x = \sum_{i=1}^{p} x_i.$$

II.A.3) $H_x = \{i \in [\![1, p]\!] / x_i \neq 0\}$. On a $H_x \neq \emptyset$ car sinon, on aurait $x = 0$, chose fausse. On suppose comme indiqué par l'énoncé que $H_x = [\![1, r]\!], 1 \leq r \leq p$. Alors $x = \sum_{i=1}^{r} x_i$ et $\forall i \in [\![1, r]\!], x_i \neq 0$. On a $V_x = \text{Vect}\{x_1, \cdots, x_r\}$ et $\mathscr{B}_x = (x_1, \cdots, x_r)$. Montrons que $\mathscr{B}_x$ est une base de V_x.

- Par définition, $\mathscr{B}_x$ est une famille génératrice de V_x.
- Soit $\alpha_1, \cdots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ tel que $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i = 0$. Comme pour tout $i \in [\![1, r]\!], \alpha_i x_i \in E_i$ et la somme $\sum E_i$ est directe (car les λ_i sont deux à deux distincts), on a $\alpha_i x_i = 0, \forall i \in [\![1, r]\!]$, et comme en plus $x_i \neq 0, \forall i \in [\![1, r]\!]$, on conclut que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0$. Il en résulte que $\mathscr{B}_x$ est une famille libre, donc une base de V_x.

II.A.4)

On a : $x = \sum_{i=1}^{r} x_i$ ($x_i \in E_i$), donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $f^k(x) = \sum_{i=1}^{r} f^k(x_i)$. Or $\forall i \in [\![1, r]\!], f(x_i) = \lambda_i x_i$, on a donc $f^k(x_i) = \lambda_i^k x_i$ de sorte que $f^k(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^k x_i$, en particulier,

$$\forall j \in [\![1, r]\!], \quad f^{j-1}(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^{j-1} x_i \in V_x$$

De plus, ces relations montrent que :

$$\text{mat}_{\mathscr{B}_x}(f^{j-1}(x))_{1 \leq j \leq r} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{r-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{r-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_r & \cdots & \lambda_r^{r-1} \end{pmatrix}$$

II.A.5) Montrons que la famille $(f^{j-1}(x))_{1 \leq j \leq r}$ est une base de V_x.

- D'abord, $\forall j \in [\![1, r]\!], \quad f^{j-1}(x) \in V_x$.

Ensuite, d'après la question précédente $A = \text{mat}_{\mathscr{B}_x}(f^{j-1}(x))_{1 \leq j \leq r}$ est une matrice carrée de Vandermonde (remarquons que sa taille r est la dimension de V_x)). On sait que $\det(A) = \prod_{1 \leq i < j \leq r} (\lambda_j - \lambda_i)$, donc $\det(A) \neq 0$ puisque les λ_i sont deux à deux distincts. Donc $\text{mat}_{\mathscr{B}_x}((f^{j-1}(x))_{1 \leq j \leq r})$ est inversible, et la famille $(f^{j-1}(x))_{1 \leq j \leq r}$ est une base de V_x.

Démonstration directe de l'inversibilité de la matrice $\text{mat}_{\mathscr{B}}(f^{j-1}(x))_{1 \leq j \leq r}$:
Montrons que les colonnes de cette matrice forment une famille libre.

Soit $\alpha_1, \cdots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ tel que $\sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k C_k = 0$ avec , pour tout $k \in [\![0, r-1]\!]$: $C_k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k \\ \lambda_2^k \\ \vdots \\ \lambda_r^k \end{pmatrix}$

Alors : $\forall i \in [\![1, r]\!], \sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k \lambda_i^k = 0 \quad (\star)$.

Soit le polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k X^k$. D'après $(\star)$, on a $\forall i \in [\![1, r]\!], P(\lambda_i) = 0$, donc P admet au moins r racines , et comme $\deg(P) \leq r - 1 < r$, alors $P = 0$. D'où $\forall k \in [\![0, r-1]\!], \alpha_k = 0$, donc la famille des colonnes $(C_k)_{0 \leq k \leq r-1}$ est libre.Ainsi la matrice $\text{mat}_{\mathscr{B}_x}(f^{j-1}(x))_{1 \leq j \leq r}$ est inversible (c'est une matrice carrée), donc la famille $(f^{j-1}(x))_{1 \leq j \leq r}$ est une base de V_x.

II.A.6) On vient de voir que pour tout $x \in F \backslash \{0\}$, la famille $(f^{j-1}(x))_{1 \leq j \leq r}$ est une base de V_x. Comme $x_i \in V_x$ pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, x_i est combinaison linéaire des $f^{j-1}(x), 1 \leq j \leq r$. Ainsi $x_i \in$

$\text{Vect}((f^{j-1}(x))_{1\leq j\leq r})$. Or $x \in F$ et F est stable par f, donc $\forall j \in [\![1, r]\!], f^{j-1}(x) \in F$; ainsi $\forall i \in [\![1, r]\!], x_i \in F$ ($x_i \in \text{Vect}((f^{j-1}(x))_{1\leq j\leq r}) \subset F$.)
Si $i > r$, on a $x_i = 0 \in F$. Ainsi $\forall i \in [\![1, p]\!], x_i \in F$.
Conclusion : Soit F un sous-espace vectoriel stable par f. On vient de voir que :
$\forall x \in F\backslash\{0\}$, x s'écrit de manière unique sous la forme :

$$x = \sum_{i=1}^{p} x_i, \text{ avec } x_i \in E_i \text{ et } x_i \in F$$

donc

$$x = \sum_{i=1}^{p} x_i, \text{ avec } x_i \in E_i \cap F, \forall i \in [\![1, p]\!]$$

Si $x = 0$, on a aussi : $0 = \sum\limits_{i=1}^{p} x_i$ avec $x_i = 0 \in E_i \cap F, \forall i \in [\![1, p]\!]$.
Comme $E_i \cap F$ est un sous-espace vectoriel de F pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, alors on a : $F = \overset{p}{\underset{i=1}{\oplus}} F \cap E_i$.
Remarque : ce raisonnement englobe le cas $F = \{0\}$ qui pourrait être traité à part puisque si $F = \{0\}$, il est clair que $F = \overset{p}{\underset{i=1}{\oplus}} F \cap E_i$ a lieu.

II.B)
II.B.1) On a $\dim E = n$ et par hypothèse f admet n valeurs propres 2 à 2 distinctes $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, donc :

$$\begin{cases} \forall i \in [\![1, n]\!], \dim E \geq 1 \\ \text{La somme } \sum\limits_{i=1}^{n} E_i \text{ est directe} \end{cases}$$

ainsi, ona :

$$n = \dim E \geq \dim \sum_{i=1}^{n} E_i = \sum_{i=1}^{n} \dim E_i \geq \sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

donc $\sum\limits_{i=1}^{n} \dim E_i = n$.
Comme $\forall i \in [\![1, n]\!], \dim E_i \geq 1$, alors $\forall i \in [\![1, n]\!], \dim E_i = 1$

II.B.2) Soit $D = \text{Vect}(u), (u \neq 0)$ une droite stable par f. Alors, d'après **I-A)**, u est un vecteur propre de f, donc $\exists i \in [\![1, n]\!]$ tel que $u \in E_i$; ainsi $\text{Vect}(u) = D \subset E_i$; et comme $\dim D = 1 = \dim E_i$ alors $D = E_i$.
Ainsi D est stable par $f \Rightarrow \exists i \in [\![1, n]\!], D = E_i$.
Réciproquement, si $D = E_i, 1 \leq i \leq n$ alors D est stable par f
Conclusion : Il y'a exactement n droites stables par$f$. Ce sont les droites E_i, $1 \leq i \leq n$.
N.B. On peut aussi utiliser le résultat de la question **II-A)** à savoir F est stable par f si et seulement si $F = \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} F \cap E_i$, pour determiner les droites stables par f.

II.B.3) $n \geq 3; k \in [\![2, n-1]\!]$.
Soit F un sous-espace vectoriel de E ; on a :
F est stable par f et $\dim F = k \Leftrightarrow F = \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} F \cap E_i$ et $\dim F = k$
Or $\forall i \in [\![1, n]\!], 0 \leq \dim F \cap E_i \leq 1$ ou encore $F \cap E_i = \{0\}$ ou $F \cap E_i = E_i$. donc

F est stable par f et $\dim F = k \Leftrightarrow \exists i_1, \cdots, i_k \in [\![1,n]\!], F = E_{i_1} \oplus \cdots \oplus E_{i_k}$, ou encore $\exists I \subset [\![1,n]\!]$ tel que $\operatorname{card} I = k$ et $F = \underset{i \in I}{\oplus} E_i$.Et comme pour tout $I, I' \subset [\![1,n]\!]$, on a $I \neq I' \Rightarrow F_I \neq F_{I'}$, le nombre de tels sev stables par f est donc égal au nombre de parties I de $[\![1,n]\!]$ à k éléments, à savoir $\binom{n}{k}$. Notons que ce résultat reste vrai même si $k \in [\![0,n]\!]$.

II.C)

II.C.1) Soit $k \in [\![0,n]\!]$. On vient de voir que le nombre de sous-espaces vectoriels stables par f tel que $\dim F = k$ est $\binom{n}{k}$. Donc le nombre de sous-espaces vectoriels de E stables par f est $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$. Ces sous-espaces vectoriels sont les $F_I = \underset{i \in I}{\oplus} E_i$ où $I \in \mathscr{P}([\![1,n]\!])$ avec la convention $F_\emptyset = \{0\}$.

3 Partie III

$D : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]; D(P) = P'$. Il est aisé de voir que D est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

III.A)

III.A.1) On a $\mathbb{K}_n[X] = \operatorname{Vect}(1, X, \cdots, X^n)$, donc $D(\mathbb{K}_n[X]) = \operatorname{Vect}(D(1), D(X), \cdots, D(X^n))$.
On a :
$D(1) = 0 \in \mathbb{K}_n[X]$
$\forall j \in [\![1,n]\!], D(X^j) = jX^{j-1} \in \mathbb{K}_n[X]$.
Donc $D(\mathbb{K}_n[X]) \subset \mathbb{K}_n[X]$. Ainsi $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par D, donc D induit un endomorphisme D_n de $\mathbb{K}_n[X]$, et on a :

$$\underset{\mathscr{B}_c=(1,X,\cdots,X^n)}{\operatorname{mat}}(D_n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} = A_n$$

III.A.2) On se donne un sous-espace vectoriel F de dimension finie non nulle , stable par D.
a) Posons $\dim F = q \geq 1$. Notons $I = \{\deg(P) / P \in F \backslash \{0\}\}$
• $I \neq \emptyset$; en effet, on a $F \neq \{0\}$, donc $\exists P_0 \in F \backslash \{0\}$; ainsi $\deg(P_0) \in I$.
• $I \subset \mathbb{N}$: clair.
• Supposons que I est infini, alors $\exists P_1, P_2, \cdots, P_{q+1} \in F \backslash \{0\}$ tel que

$$\deg(P_1) < \cdots < \deg(P_{q+1})$$

La famille $(P_1, \cdots, P_{q+1})$ est une famille de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts, donc c'est une famille libre. En effet, soit $\alpha_1, \cdots, \alpha_{q+1} \in \mathbb{R}$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{q+1} \alpha_i P_i = 0$. Supposons qu'il existe $i \in \{1, \cdots, q+1\}$ tel que $\alpha_i \neq 0$. Soit alors k le plus grand de ces entiers i. On a donc : $\sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_i P_i = 0$ et $\alpha_k \neq 0$. Ainsi en posant $P_k = a_d X^d + Q_k$ avec $a_d \neq 0$; $\deg(Q) < d$, la relation ci-dessus peut s'écrire : $\underbrace{\alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_{k-1} P_{k-1} + \alpha_k Q_k}_{\text{Le degré de ce polynôme est } <d} + \alpha_k a_d X^d = 0$

Ainsi $\alpha_k a_d = 0$ donc $a_d = 0$ absurde, donc $\forall i \in \{1, \cdots, q+1\}, \alpha_i = 0$ donc la famille $(P_1, \cdots, P_{q+1})$ est libre. Comme cette famille comprend $q+1$ éléments et que $\dim F = q$, alors $q+1 \leq q$, chose absurde.
On conclut que I est une partie de $\mathbb{N}$, finie et non vide, donc I admet un plus grand éléments n ($\max I = n$). on a donc $n \in I$ donc $\exists R \in F \backslash \{0\}$ tel que $\deg(R) = n$. Soit $P \in F \backslash \{0\}$, alors $\deg(P) \in I$, donc $\deg(P) \leq \max I = n$, ainsi $P \in \mathbb{K}_n[X]$; ceci $\forall P \in F \backslash \{0\}$. Comme $0 \in F$ et $0 \in \mathbb{K}_n[X]$, alors $\forall P \in F, P \in \mathbb{K}_n[X]$, ainsi $F \subset \mathbb{K}_n[X]$.
Conclusion [1] **:** $\exists n \in \mathbb{N}, \exists R \in F$ tel que $\deg(R) = n$ et $F \subset \mathbb{K}_n[X]$.
b) On a $R \in F$ et F est stable par D, donc $\forall i \in [\![0, n]\!], D^i(R) \in F$, or $\forall i \in [\![0, n]\!], \deg(D^i(R)) = n - i \in \mathbb{N}$ où $n = \deg(R)$. Ainsi $(D^i(R))_{0 \leq i \leq n}$ est une famille de polynômes non nuls de degrés échelonnés (2 à 2 distincts) ; donc elle est libre (voir question précédente).
c) D'après b), $\forall i \in [\![0, n]\!]$, on a : $D^i(R) \in F$ et d'après a) , $F \subset \mathbb{K}_n[X]$, ainsi :

$$\underbrace{\mathrm{Vect}(D^i(R))_{0 \leq i \leq n}}_{L} \subset F \subset \mathbb{K}_n[X].$$

Comme $\dim L = n + 1 = \dim \mathbb{K}_n[X]$ on a $L = F = \mathbb{K}_n[X]$.

III.A.3) Soit F un sous-espace vectoriel de $E = \mathbb{K}(X)$.
• Si $F = \{0\}$, F est bien un sous-espace vectoriel stable par D.
• Si F est non nul et F de dimension finie et si F est stable par D alors d'après **III-A-2)**, $F = \mathbb{K}_n[X]$, ce qui est bien un sous-espace vectoriel stable par D d'après **III-A-1)**.
• Si F est de dimension infinie et stable par D, on va montrer que $F = \mathbb{K}[X]$:
$\rightarrow$ Soit $P \in \mathbb{K}[X] \backslash \{0\}$. Posons $\deg(P) = m$. On a $F \not\subset \mathbb{K}_m[X]$ car sinon , on aurait $F \subset \mathbb{K}_m[X]$ et F serait de dimension finie, ce qui contredit l'hypothèse faite sur F. Donc il existe $Q \in F$ tel que $Q \notin \mathbb{K}_m[X]$. Posons $n = \deg(Q)$, alors $n > m$. on a $Q \in F$ et F stable par D, donc $\mathrm{Vect}(D^i(Q))_{i \in [\![0,n]\!]} \subset F$. La famille $(D^i(Q))_{i \in [\![0,n]\!]}$ est une famille de $n+1$ polynômes linéairement indépendants de $\mathbb{K}_n[X]$ donc une base de $\mathbb{K}_n[X)$, par suite $\mathbb{K}_n[X] \subset F \quad (\star)$. Or $\deg(P) = m < n$, donc $P \in \mathbb{K}_n[X]$ alors $P \in F$ d'après $(\star)$.
$\rightarrow$ pour $P = 0$, on a $P \in F$.
Ainsi $\forall P \in \mathbb{K}[X], P \in F$, donc $F = \mathbb{K}[X]$.
Conclusion : Les sous-espace vectoriels stables par D sont $\{0\}, \mathbb{K}[X]$ et les $\mathbb{K}_n[X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

III.B) On se donne $f \in \mathcal{L}(E)$; $\dim E = n \geq 2$ tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

III.B.1) • Soit $u \in E$ tel que $\mathscr{B}_{f,u} = (f^{n-i}(u))_{1 \leq i \leq n}$ est une base de E, alors tous les vecteurs de cette famille sont non nuls ; en particulier $f^{n-1}(u) \neq 0$.
• Réciproquement, soit $u \in E$ tel que $f^{n-1}(u) \neq 0$. Montrons que la famille $\mathscr{B}_{f,u}$ est libre. Supposons que cette famille est liée, alors $\exists \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls tel que :

$$\alpha_1 f^{n-1}(u) + \alpha_2 f^{n-2}(u) + \cdots + \alpha_{n-1} f(u) + \alpha_n u = 0 \quad (\star)$$

Soit k le plus grand entier i tel que $\alpha_i \neq 0$, donc $\forall i > k, \alpha_i = 0$ et $(\star)$ s'écrit :

$$\alpha_1 f^{n-1}(u) + \cdots + \alpha_k f^{(n-k)}(u) = 0 \quad (\star\star)$$

En appliquant l'endomorphisme f^{k-1} à $(\star\star)$, il vient :

$$0 + \cdots + 0 + \alpha_k f^{n-1}(u) = 0 \quad (\text{ car } \forall j \geq n, f^j = 0)$$

1. **Remarque :** Cette démonstration a l'avantage qu'elle n'utilise pas la stabilité de F. Il y'en a d'autres qui l'utilisent

et comme $f^{n-1}(u) \neq 0$, on obtient $\alpha_k = 0$, ce qui est faux. Donc $\alpha_k = 0, \forall k \in [\![1, n]\!]$ et la famille $\mathscr{B}_{f,u}$ est une famille libre donc une base de E puisque elle possède n vecteurs et $n = \dim E$.
Conclusion : Les vecteurs $u \in E$ pour lesquels $\mathscr{B}_{f,u}$ est une base de E sont ceux tel que $f^{n-1}(u) \neq 0$. De tels vecteurs existent car on a par hypothèse $f^{n-1} \neq 0$.

III.B.2) Soit $u \in E$ tel que $\mathscr{B}_{f,u} = (f^{n-i}(u))_{1 \leq i \leq n}$ est une base de E. on a

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}_{f,u}} f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

III.B.3) Posons $\mathscr{B}_{f,u} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ où $e_i = f^{n-i}(u)$. On sait que $f(e_1) = 0$ et si $2 \leq i \leq n$ alors $f(e_i) = e_{i-1}$.
Soit $e'_i = (i-1)!e_i, (1 \leq i \leq n)$. On a :
- $f(e'_1) = f(e_1) = 0$.
- Si $2 \leq i \leq n$, on a :

$$\begin{aligned} f(e'_i) &= f((i-1)!e_i) \\ &= (i-1)!f(e_i) \\ &= (i-1)!e_{i-1} \\ &= (i-1)!\frac{1}{(i-2)!}e'_{i-1} \\ &= (i-1)e'_{i-1} \end{aligned}$$

Ainsi en posant $\mathscr{B}' = (e'_i)_{1 \leq i \leq n}$, on a bien $\mathscr{B}'$ est une base de E et :

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}'} f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & n-1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} = A_{n-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

III.B.4) Notons $\mathscr{C} = (1, X, \cdots, X^{n-1})$ la base canonique de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ sur $\mathbb{K}$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$ la base de E définie comme à la question **III-B-3)** :$e'_i = (i-1)!e_i = (i-1)!f^{(n-1)}(u)$
On a donc : $\operatorname{mat}_{\mathscr{C}} D_{n-1} = A_{n-1} = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}'} f$.
Soit φ l'isomorphisme de $\mathbb{K}_{n-1}[X] \to E$ tel que : $\forall i \in [\![0, n-1]\!], \varphi(X^i) = e'_{i+1}$ (φ est l'application linéaire qui transforme la base $\mathscr{C}$ en la base $\mathscr{B}'$.)
Soit F' un sous-espace vectoriel de E , stable par f. Montrons que $F = \varphi^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ stable par D_{n-1}.
Remarquons d'abord que :

$$\forall P \in \mathbb{K}_{n-1}[X], \operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(P) = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}'}(\varphi(P)) \quad (\star).$$

Soit $P \in F = \varphi^{-1}(F')$; alors $\varphi(P) \in F'$, donc $f(\varphi(P)) \in F'$ (car F' est stable par f).
On a

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(\varphi(D_{n-1}(P))) & = & \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(D_{n-1}(P)) \quad (1) \\ & = & \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\, D_{n-1} \times \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(P) \\ & = & A_{n-1} \times \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(P) \\ & = & \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}\, f \times \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(\varphi(P)) \\ & = & \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(f(\varphi(P))). \end{array}$$

((1) étant d'après la remarque ($\star$) ci-dessus).
Donc : $\varphi(D_{n-1}(P)) = f(\varphi(P))$. Or $f(\varphi(P)) \in F'$, donc $\varphi(D_{n-1}(P)) \in F'$. Alors $D_{n-1}(P) \in \varphi^{-1}(F') = F$, ceci $\forall P \in F$ donc $F = \varphi^{-1}(F')$ est stable par D_{n-1}.
Poursuivons notre raisonnement pour determiner les F' stables par f. On a $F = \varphi^{-1}(F')$ est stable par D_{n-1} donc stable par D, donc en tenant compte du résultat de la question **III-A-3)** et du fait que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$, on conclut que $F = \{0\}$ ou $F = \mathbb{K}_p[X]$ avec $0 \leq p \leq n-1$. Ainsi

$$F' = \{0\}$$

ou

$$\begin{array}{rcl} F' & = & \varphi(\mathbb{K}_p[X]) \\ & = & \varphi(\mathrm{Vect}(1, X, \cdots, X^p) \\ & = & \mathrm{Vect}(\varphi(1), \varphi(X), \cdots, \varphi(X^p)) \\ & = & \mathrm{Vect}(e'_1, \ldots, e'_{p+1}) \\ & = & \mathrm{Vect}(f^{n-1}(u), \cdots, f^{n-(p+1)}(u)), 0 \leq p \leq n-1 \end{array}$$

on vérifie que F' est bien un sous-espace vectoriel de E, stable par f. En effet, si $F' = \mathrm{Vect}(f^{n-1}(u), \cdots, f^{n-(p+1)}(u))$ alors $f(F') = \mathrm{Vect}(f^n(u), \cdots, f^{n-p}(u)) = \mathrm{Vect}(0, \cdots, f^{n-p}(u))$ donc $f(F') \subset F'$
Conclusion : Les sous-espaces vectoriels F stables par f sont $F = \{0\}$ ou $F = \mathrm{Vect}(f^{n-1}(u), \cdots, f^{n-i}(u))$ avec $1 \leq i \leq n$.
Déterminons des relations simples entre ces sous-espaces vectoriels stables par f et les noyaux $\ker f^i, 0 \leq i \leq n$:
- Si $i = 0$ on a $\ker f^0 = \ker \mathrm{Id}_E = \{0\}$.
- Si $i = n$ on a $\ker f^n = \ker 0 = E = \mathrm{Vect}(f^{n-1}(u), \cdots, f(u), u)$.
- Si $1 \leq i \leq n-1$, soit $x = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j f^{n-j}(u) \in E$, écrit dans la base $\mathscr{B}_{f,u}$. On a $f^i(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j f^{n+i-j}(u)$. On a $n+i-j \leq n-1 \Leftrightarrow j \geq i+1$; ainsi $f^i(x) = \sum\limits_{j=i+1}^{n} \alpha_j f^{n+i-j}(u)$, somme pourvue de sens car $n \geq i+1$ puisque $i \leq n-1$.

$x \in \ker f^i \Leftrightarrow f^i(x) = 0 \Leftrightarrow \sum\limits_{j=i+1}^{n} \alpha_j f^{n+i-j}(u) = 0$.
Pour j tel que $i+1 \leq j \leq n$, on a $i \leq n+i-j \leq n-1$, donc la famille $(f^{n+i-j}(u))_{j \in [\![i+1, n]\!]}$ est libre. Ainsi $\forall j \in [\![i+1, n]\!], \alpha_j = 0$ donc

$$x \in \ker f^i \Leftrightarrow x = \sum_{j=1}^{i} \alpha_j f^{n-j}(u) \Leftrightarrow x \in \mathrm{Vect}(f^{n-1}(u), \cdots, f^{n-i}(u))$$

ainsi $\ker f^i = \mathrm{Vect}(f^{n-1}(u), \cdots, f^{n-i}(u))$. On a ainsi exprimé tous les sous-espace stables par f en fonction des $\ker f^i$ pour $i \in [\![0, n]\!]$.

4 Partie IV

On se donne $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f : E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \to E$ tel que $\forall X \in E, f(X) = MX$.
Il est clair que f est bien définie et que $f \in \mathcal{L}(E)$.

IV.A) On a :

$$X_i = \begin{pmatrix} \delta_{1,i} \\ \delta_{2,i} \\ \vdots \\ \delta_{n,i} \end{pmatrix}$$

avec $\delta_{i,j} = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & \text{si} & i = j \\ 0 & \text{si} & i \neq j \end{array} \right.$, donc

$$X_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad i \text{ ème place}$$

$\mathscr{B}_n = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ la base canonique de E.

Posons $M = (m_{ij})_{i,j}$. On a $f(X_j) = MX_j = \begin{pmatrix} m_{1j} \\ \vdots \\ m_{nj} \end{pmatrix}$, donc :

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}_n} f = \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1j} & \cdots & m_{1n} \\ \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \\ m_{11} & \cdots & m_{1j} & \cdots & m_{1n} \end{pmatrix} = M$$

D'ailleurs f est l'endomorphisme de E canoniquement associé à M.

IV.B) Supposons que n est impair. Soit $\chi_f(x) = \chi_M(x) = x^n + \cdots + a_0$ le polynôme caractéristique de f. On a χ_f est une fonction polynôme d'une variable réelle à coefficients <u>réels</u> car E est une $\mathbb{R}-$espace vectoriel. Donc χ_f est à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On a $\lim\limits_{-\infty} \chi_f = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} \chi_f = +\infty$ car n est impair. χ_f est continue sur $\mathbb{R}$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires $\exists \lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\chi_f(\lambda_0) = 0$. Ainsi f admet au moins une valeurs propre réelle.

IV.C) On se donne $\lambda = \alpha + i\beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$; $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ donc $\beta \neq 0$, et $Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $Z \neq 0$ et $MZ = \lambda Z$. On pose $X = \frac{1}{2}(Z + \overline{Z})$ et $Y = \frac{1}{2i}(Z - \overline{Z})$

IV.C.1) Posons $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ avec $z_k \in \mathbb{C}, \forall k \in [\![1, n]\!]$

On a :

$$X = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ \vdots \\ \overline{z_n} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{z_1+\overline{z_1}}{2} \\ \vdots \\ \frac{z_n+\overline{z_n}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathscr{R}e(z_1) \\ \vdots \\ \mathscr{R}e(z_n) \end{pmatrix}$$

et

$$Y = \frac{1}{2i}\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ \vdots \\ \overline{z_n} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{z_1-\overline{z_1}}{2i} \\ \vdots \\ \frac{z_n-\overline{z_n}}{2i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathscr{I}m(z_1) \\ \vdots \\ \mathscr{I}m(z_n) \end{pmatrix}$$

Donc $X, Y \in E$ Montrons que (X, Y) est libre dans E. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $xX + yY = 0$, alors $x\left(\frac{Z+\overline{Z}}{2}\right) + y\left(\frac{Z-\overline{Z}}{2i}\right) = 0$, donc (1) $\quad x'Z + y'\overline{Z} = 0$ où $x' = \frac{x}{2} + \frac{y}{2i}$ et $y' = \frac{x}{2} - \frac{y}{2i}$. En multipliant par M il vient : $x'MZ + y'M\overline{Z} = 0$, c'est-à-dire : $x'MZ + y'\overline{MZ} = 0$ (car $M\overline{Z} = \overline{MZ}$ puisque M est à coefficients réels). Alors $x'\lambda Z + y'\overline{\lambda Z} = 0$, donc $x'\lambda Z + y'\overline{\lambda Z} = 0 \quad$ (2). multiplions (1) par $\overline{\lambda}$ et faisons la différence avec (2), il vient : $(\lambda - \overline{\lambda})x'Z = 0$. Or $Z \neq 0$ et $\lambda - \overline{\lambda} \neq 0$ car λ n'est pas réel. Il en découle que $x' = 0$ et d'après (1) on a $y'\overline{Z} = 0$ d'où $y' = 0$. Compte tenu des expressions donnant x', y' en fonction de x et y il vient $x = y = 0$. Ainsi la famille (X, Y) est une famille libre de E.

IV.C.2) Soit $F = \text{Vect}(X, Y)$. On a F est un plan de E car (X, Y) est libre. On sait que $MZ = \lambda Z$, donc on a $M(X + iY) = (\alpha + i\beta)(X + iY)$ c'est-à-dire :

$$MX + iMY = (\alpha X - \beta Y) + i(\beta X + \alpha Y).$$

Les matrices $MX, MY, \alpha X - \beta Y$ et $\beta X + \alpha Y$ étant des matrices colonnes à coefficients réels on a donc [2] :

$$\begin{cases} MX = \alpha X - \beta Y \\ MY = \beta X + \alpha Y \end{cases}$$

Ainsi : $\begin{cases} f(X) = \alpha X - \beta Y \\ f(Y) = \beta X + \alpha Y \end{cases}$, donc $f(F) = f(\text{Vect}(X, Y) = \text{Vect}(f(X), f(Y)) \in \text{Vect}(X, Y) = F$ d'où $f(F) \subset F$ et alors F est stable par f. La matrice de l'endomorphisme f_F induit par F sur F dans la base $\mathscr{B}_F = (X, Y)$ est

$$\text{mat}_{\mathscr{B}_F}(f_F) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

IV.D) L'énoncé :
Tout endomorphisme d'un $\mathbb{R}-$ espace vectoriel <u>*non nul*</u> *de dimension fini admet au moins une droite ou un plan stable.*
est vrai [3]
En effet :
• Si f admet une valeur propre réelle alors toute droite $\text{Vect}(u)$ où u est un vecteur propre de f, est une

2. Résultat : Si $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A + iB = C + iD$ alors $A = C$ et $B = D$. la démonstration est aisée en exprimant les termes généraux de telles matrices, à savoir : $(A+iB)_{kl} = a_{kl} + ib_{kl} = (C+iD)_{kl} = c_{kl} + id_{kl}$, d'où le résultat en appliquant l'unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe.

3. N.B Si E est un $\mathbb{C}-$espace vectoriel non nul de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ alors f admet au moins une valeur propre $\lambda_0 \in \mathbb{C}$. Donc $\exists u_0 \in E \backslash \{0\}$ tel que $f(u_0) = \lambda_0 u_0$ et la droite $D = \text{Vect}(u_0)$ est alors une droite stable par f.

droite stable par f.

• Si f n'admet aucune valeur propre réelle alors, en considérant une base $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ et en posant $M = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}} f$ alors M (qui n'a pas de valeur propre réelle comme f) a au moins une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, donc $\exists Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}), Z \neq 0$ tel que $MZ = \lambda Z$. Avec les notations précédentes $\lambda = \alpha + i\beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0)$, $X = \frac{1}{2}(Z + \overline{Z})$ et $Y = \frac{1}{2i}(Z - \overline{Z})$, on a :

$$\left\{\begin{array}{l} MX = \alpha X - \beta Y \\ MY = \beta X + \alpha Y \end{array}\right. \quad (\star).$$

Soit $x, y \in E$ tel que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(x) = X$ et $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(y) = Y$. $(\star)$ s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f(x)) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\alpha x - \beta y) \\ \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f(y)) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\beta x + \alpha y) \end{array}\right.$$

Ainsi $\left\{\begin{array}{l} f(x) = \alpha x - \beta y \\ f(y) = \beta x + \alpha y \end{array}\right.$. Posons $P = \mathrm{Vect}(x, y)$. On a (X, Y) est libre, donc (x, y) aussi. Ainsi P est un plan de E ; de plus $f(P) = f(\mathrm{Vect}(x, y)) = \mathrm{Vect}(f(x), f(y)) = \mathrm{Vect}(\alpha x - \beta y, \beta x + \alpha y) \subset P$ donc P est stable par f.

IV.E) Soit $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ tel que $f(P) = XP$.

• Il est aisé de voir que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$.

• Supposons que f admet une droite ou un plan stable F et considérons alors $P_0 \in F$ tel que $P_0 \neq 0$. On a alors $f(P_0) \in F$, par suite $f^2(P_0) \in F$ donc $P_0 \in F$ et $XP_0 \in F$ et $X^2P_0 \in F$. Or la famille (P_0, XP_0, X^2P_0) est libre car si $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha_0 P_0 + \alpha_1 XP_0 + \alpha_2 X^2 P_0 = 0$ alors comme $P_0 \neq 0$ on a $\alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 = 0$, d'où $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$. On a donc $\mathrm{card}(\{P_0, XP_0, X^2P_0\}) \leq \dim F$. Ainsi $3 \leq \dim F$: absurde. Il en résulte que f n'admet ni droite stable ni plan stable.

N.B. : On montre de manière analogue que cet endomorphisme n'admet pas de sous-espace stable de dimension finie autre que $\{0\}$.

IV.F) $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $(S) \quad X' = AX$

IV.F.1) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A et $\mathscr{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_c} f = A$.

$$\chi_f(x) = \det(xI_3 - A) = \begin{vmatrix} x-1 & 4 & 0 \\ -1 & x+2 & 1 \\ -1 & -1 & x \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la première ligne ou la dernière colonne, on trouve :

$$\chi_f(x) = x^3 + x^2 + 3x - 5 = (x-1)(x^2 + 2x + 5) = \chi_A(x)$$

Le discriminent du trinôme $x^2 + 2x + 5$ est $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$ donc A admet une unique valeur propre réelle, à savoir $\lambda_0 = 1$ et deux valeurs propres complexes conjuguées $\lambda_1 = -1 + 2i$ et $\lambda_2 = -1 - 2i = \overline{\lambda_1}$.

• $u = (x, y, z) \in \ker(f - \mathrm{Id}) \Leftrightarrow (A - I_3)X = 0$ (où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$). Donc

$$u \in \ker(f - \mathrm{Id}) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -4y = 0 \\ x - 3y - z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = z.$$

Donc $E_1(f) = \text{Vect}(u)$ où $u = (1, 0, 1)$. On a $G = E_1(f)$ est une droite stable par f.

• $\lambda = -1 + 2i$ est une valeur propre complexe de A. Déterminons $Z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ tel que $Z \neq 0$ et $AZ = \lambda Z$. On a :

$$\begin{aligned} AZ = \lambda Z &\Leftrightarrow (A - (-1+2i)I_3)Z = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (2-2i)x - 4z = 0 \\ x + (-1-2i)y - z = 0 \\ x + y + (1-2i)z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = (1+i)y \\ z = -iy \\ y \in \mathbb{C} \end{cases} \end{aligned}$$

On choisit $Z = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$ obtenu pour $y = 1$. On a $Z = X + iY$ avec $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. On a $\lambda = \alpha + i\beta$ avec $\alpha = -1$ et $\beta = 2$.
Soit $x, y \in \mathbb{R}^3$ (On identifie $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^3$), tel que $\text{mat}_{\mathscr{B}_c}(x) = X$ et $\text{mat}_{\mathscr{B}_c}(y) = Y$ alors $x = (1, 1, 0)$ et $y = (1, 0, -1)$.
D'après ce qui précède, $P = \text{Vect}(x, y)$ est un plan stable par f et précisément on a

$$\begin{cases} f(x) = \alpha x - \beta y = -x - 2y \\ f(y) = \beta x + \alpha y = 2x - y \end{cases}$$

Montrons que $\mathscr{B} = (x, y, u)$ est une base de $\mathbb{R}^3$

$$\det_{\mathscr{B}_c} \mathscr{B} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

donc : $\mathscr{B} = (x, y, u)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Ainsi, on a $\mathbb{R}^3 = P \oplus G$ avec $P = \text{Vect}(x, y)$ et $G = \text{Vect}(u)$. On voit que G est une droite stable par f et P un plan stable par f.
De plus

$$T = \text{mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme $\text{mat}_{\mathcal{B}_c} f = A$, alors , d'après une formule de changement de base , en notant

$$P = \mathscr{P}_{\mathscr{B}_c}^{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

on a

$$P^{-1}AP = T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

avec $\alpha = -1, \beta = 2$ et $\gamma = 1$.

IV.F.2) Soit le problème de Cauchy :

$$\mathscr{P}_U : \quad \begin{cases} X' = AX \\ X(0) = U \end{cases}$$

où $U \in G = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

On a G est le sous-espace propre associé à la valeur propre $\alpha = 1$ de la matrice A.. Puisque $U \in G$, alors $AU = U$. Posons $X(t) = e^t U, t \in \mathbb{R}$. On a X est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = e^t U$. Or $AX(t) = A(e^t U) = e^t AU = e^t U$. donc $\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = AX(t)$. De plus $X(0) = e^0 U = U$.
Ainsi X verifie le problème de cauchy $\mathscr{P}_U$. Comme le problème admet une unique solution (théorème de Cauchy-Lipschitz) alors X est l'unique solution du problème de Cauchy $\mathscr{P}_U$.

IV.F.3) On se donne $\sigma = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ et on considère le problème de Cauchy :

$$\mathscr{C}_\sigma : \quad \begin{cases} x' = -x + 2y \\ y' = -2x - y \\ x'(0) = a, y'(0) = b \end{cases}$$

Soit $\varphi = (x, y)$ dans $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ l'unique solution de $\mathscr{C}_\sigma$. On a :

$$\begin{cases} x' = -x + 2y \\ y' = -2x - y \\ x'(0) = a, y'(0) = b \end{cases}$$

Donc $\begin{cases} x'(0) = -x(0) + 2y(0) = -a + 2b \\ y'(0) = -2x(0) - y(0) = -2a - b \end{cases}$

On a :

$$\begin{cases} x' = -x + 2y \quad (1) \\ y' = -2x - y \quad (2) \\ x \text{ et } y \text{ de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Donc x' et y' sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et on a : $\begin{cases} x'' = -x' + 2y' \\ y'' = -2x' - y' \end{cases}$

$\begin{cases} x'' = -x' + 2(-2x - y); & \text{d'après } (2) \\ y'' = -2(-x + 2y) - y'; & \text{d'après } (1) \end{cases}$

$\begin{cases} x'' = -x' - 4x - 2y \\ y'' = -y' - 4y + 2x \end{cases}$

$\begin{cases} x'' = -x' - 4x - (x' + x); & \text{d'après } (1) \\ y'' = -y' - 4y + (-y - y'); & \text{d'après } (2) \end{cases}$

Ainsi on a : $\begin{cases} x'' + 2x' + 5x = 0. \\ y'' + 2y' + 5y = 0. \end{cases}$

Donc x et y sont toutes deux solutions de l'équation différentielle

$$(E) \quad f'' + 2f' + 5f = 0$$

qui est linéaire homogène du 2 ème ordre à coefficients constants.
• L'équation caractéristique est : $r^2 + 2r + 5 = 0$.
$\Delta' = 1 - 5 = -5 < 0$, donc $r_1 = -1 + 2i, r_2 = -1 - 2i = \overline{r_1}$ Ainsi :

$$\begin{cases} x(t) = e^{-t}\left(c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)\right) \quad (\star) \\ y(t) = e^{-t}\left(k_1 \cos(2t) + k_2 \sin(2t)\right) \quad (\star\star) \end{cases}$$

$(c_1, c_2, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$)

On determine c_1, c_2, k_1, k_2 par les conditions initiales : $\begin{cases} x(0) = a, x'(0) = -a + 2b \\ y(0) = b, y'(0) = -2a - b \end{cases}$

Par dérivation de $(\star)$ et $(\star\star)$ on obtient :

$$\begin{cases} x'(t) = e^{-t}(c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t)) + e^{-t}\underbrace{(-2c_1\sin(2t) + 2c_2\cos(2t))}_{(1)'} \\ y'(t) = e^{-t}(k_1\cos(2t) + k_2\sin(2t)) + e^{-t}\underbrace{(-2k_1\sin(2t) + 2k_2\cos(2t))}_{(2)'} \end{cases}$$

En prenant les valeurs en $t = 0$ dans $(1), (2), (1)', (2)'$, on obtient :

$$\begin{cases} x(0) = c_1, x'(0) = -c_1 + 2c_2 \\ y(0) = b, y'(0) = -2a - b \end{cases}$$

ce qui fournit :

$$\begin{cases} c_1 = a, c_2 = b \\ k_1 = b, k_2 = -a \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} x(t) = e^{-t}(a\cos(2t) + b\sin(2t) \\ y(t) = e^{-t}(b\cos(2t) - a\sin(2t) \end{cases}$$

IV.F.4) Conservons les notations de la question **IV-F-1)**, on a $A = PTP^{-1}$. Pour $X : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, application , on pose $Y = P^{-1}X$. On a : X est une solution du système (S), $\quad X' = AX$ si et seulement si :

$$\begin{cases} X \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \\ \forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = AX(t) \end{cases}$$

si et seulement si :

$$\begin{cases} X \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \\ \forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = PTP^{-1}X(t) \end{cases}$$

si et seulement si :[4]

$$\begin{cases} Y \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \\ \forall t \in \mathbb{R}, Y'(t) = TY(t) \end{cases}$$

• Puisque A est constante , alors toute solutions X du système $X' = AX$ est de classe C^∞, donc $Y = P^{-1}X$ est aussi de classe C^∞ et on a $\forall k \in \mathbb{N}, Y^{(k)} = P^{-1}X^{(k)}$.
• Si la trajectoire d'une solution X est rectiligne ou plane alors $\forall t \in \mathbb{R}$, les vecteurs $X'(t), X''(t), X'''(t)$ sont linéairement dépendants , donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \det(X'(t), X''(t), X'''(t)) = 0$$

c'est-à-dire :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \det(PY'(t), PY''(t), PY'''(t)) = 0$$

donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \det(P)\det(Y'(t), Y''(t), Y'''(t)) = 0$$

Comme $\det(P) \neq 0$, il vient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \det(Y'(t), Y''(t), Y'''(t)) = 0$$

En particulier :

4. Car $Y = P^{-1}X$ et P^{-1} inversible indépendante de t

$$\det(Y'(0),Y''(0),Y'''(0))=0$$

Posons $Y(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}$. Le système $Y'=TY$ équivaut à :

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2&0\\-2&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

c'est-à dire :

$$\begin{cases}x'=-x+2y\\y'=-2x-y\\z'=z\end{cases}$$

En posant $x(0)=a;y(0)=b;z(0)=c$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$, alors d'après la question précédente :

$$\begin{cases}x(t)=e^{-t}(a\cos(2t)+b\sin(2t))\\y(t)=e^{-t}(b\cos(2t)-a\sin(2t))\\z(t)=ce^{t}\end{cases}\qquad(\star\star\star)$$

la dernière relation provient du fait que : $z'=z\Leftrightarrow z(t)=z(0)e^{t-0}=ce^{t}$.

Revenons au système $(S')\begin{cases}x'=-x+2y\\y'=-2x-y\\z'=z\end{cases}$

Puisque $x'(0)=-a+2b;y'(0)=-2a-b,z'(0)=z(0)=c$ alors en dérivant deux fois (S') et en faisant $t=0$, on aura :

$$\begin{cases}x''(0)=-x'(0)+2y'(0)=-(-a+2b)+2(-2a-b)=-3a-4b\\y''(0)=-2x'(0)-y'(0)=-2(-a+2b)-(-2a-b)=4a-3b\\z''(0)=z'(0)=c\end{cases}$$

$$\begin{cases}x'''(0)=-x''(0)+1y''(0)=-(-3a-4b)+2(4a-3b)=11a-2b\\y'''(0)=-2x''(0)-y''(0)=-2(-3a-4b)-(4a-3b)=2a+11b\\z'''(0)=z'(0)=c\end{cases}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\det(Y'(0),Y''(0),Y'''(0)) &= \begin{vmatrix}-a+2b&-3a-4b&11a-2b\\-2a-b&4a-3b&2a+11b\\c&c&c\end{vmatrix}\\ &\underbrace{=}_{C_3\leftarrow C_3-C_2\text{ puis }C_2\leftarrow C_2-C_1} \begin{vmatrix}-a+2b&-2a-6b&14a+2b\\-2a-b&6a-2b&-2a+14b\\c&0&0\end{vmatrix}\\ &= -80c(a^2+b^2)\end{aligned}$$

Il en découle que $\det(Y'(0),Y''(0),Y'''(0))\Leftrightarrow c=0\quad\text{ou}\quad a=b=0$

• Si $c=0$ alors d'après $(\star\star\star)$, on a

$$\begin{cases}x(t)=e^{-t}(a\cos(2t)+b\sin(2t))\\y(t)=e^{-t}(b\cos(2t)-a\sin(2t))\\z(t)=0\end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned}
X(t)=PY(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ 0 \end{pmatrix} = x(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= e^{-t}(a\cos(2t)+\sin(2t))\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{-t}(b\cos(2t)-a\sin(2t))\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi la trajectoire de la solution $t \mapsto X(t)$ est plane et se trouve dans le plan $P(X(0),u,v)$ avec $u=(1,1,0)$ et $v=(1,0,-1)$.
Si $(a,b)=(0,0)$, cette trajectoire est réduite au point $O=(0,0,0)$.
Si $(a,b)\neq(0,0)$, on vérifie que la famille $\left(X'(0), X'\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ est libre, donc cette trajectoire est plane et n'est contenue dans aucune droite de $\mathbb{R}^3$.
$\bullet$ Si $a=b=0$ alors d'après $(\star\star\star)$ on a

$$\begin{cases} x(t)=0 \\ y(t)=0 \\ z(t)=ce^t \end{cases}$$

, donc :

$$X(t)=PY(t)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z(t) \end{pmatrix} = z(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c\,e^t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi la trajectoire de la solution $t \mapsto X(t)$ est rectiligne et se trouve dans la droite $D(X(0),w)$ avec $w=(1,0,1)$.
Si $c=0$, cette trajectoire est réduite au point $O=(0,0,0)$.
Si $c\neq 0$, cette trajectoire est rectiligne et non réduite à un point.

5 Partie V

On se donne un $\mathbb{R}-$ espace vectoriel E et $\mathscr{B}=(e_1,\cdots,e_n)$ une base de E.

V.A)

V.A.1) $\bullet\bullet$ Existence :

pour $x,y\in E$ $\exists!(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n, \exists!(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$, $\begin{cases} x=\sum\limits_{i=1}^n x_ie_i \\ y=\sum\limits_{i=1}^n y_ie_i \end{cases}$. Posons :

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^n x_iy_i$$

$\bullet$ Il est aisé de vérifier qu'il s'agit d'un produit scalaire sur E.
$\bullet$ Il est immédiat que pour tout $i,j\in[\![1,n]\!]$, on a $\langle e_i,e_j\rangle=\delta_{ij}$ et que par suite la base $\mathscr{B}$ est une base orthonormée pour ce produit scalaire.
$\bullet\bullet$ Unicité :

Soit $(,)$ un produit scalaire sur E pour lequel la base $\mathscr{B}$ est une base orthonormée, alors pour tout $x, y \in E$ tel que $\begin{cases} x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i \\ y = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i e_i \end{cases}$

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

avec $(x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on a par bilinéarité et du fait que $\mathscr{B}$ est orthonormée :

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \langle x, y\rangle$$

D'où l'unicité.

V.A.2) Soit $u, v \in E$ et $U = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ et $V = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(v) = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$, alors : $\begin{cases} u = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \\ v = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i e_i \end{cases}$, donc $\langle u, v\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i = {}^{\mathbf{t}}UV$.

V.B) On se donne H, hyperplan de E. On note $D = H^{\perp}$ et soit $u \in E\backslash\{0\}$ tel que $D = \mathrm{Vect}(u)$.
Supposons que H est stable par f ; Soit $x \in H$; alors $f(x) \in H$ (car H stable par f), donc $\langle f(x), u\rangle = 0$, donc ${}^{\mathbf{t}}(AX)U = O$ (car $AX = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f(x))$ et $U = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u)$). D'où ${}^{\mathbf{t}}X{}^{\mathbf{t}}AU = 0 \quad (\star)$.
Soit $v \in E$ tel que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(v) = {}^{\mathbf{t}}AU$
$(\star) \Rightarrow \langle x, v\rangle = 0$ ceci $\forall x \in H$. Donc $v \in H^{\perp} = D = \mathrm{Vect}(u)$. Ainsi $\exists \lambda \in \mathbb{R}, v = \lambda u$, donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(v) = \lambda\, \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u)$, c'est-à-dire : $\exists \lambda \in \mathbb{R}, {}^{\mathbf{t}}AU = \lambda U$. On a $U \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $U \neq 0$, donc U est un vecteur propre de ${}^{\mathbf{t}}A$.
• Supposons que U est un vecteur propre de ${}^{\mathbf{t}}A$ donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}, {}^{\mathbf{t}}AU = \lambda U$.
Soit $x \in H$; on a :

$$\langle f(x), u\rangle = {}^{\mathbf{t}}(AX)U = {}^{\mathbf{t}}X{}^{\mathbf{t}}Au = {}^{\mathbf{t}}X(\lambda U) = \lambda\langle x, u\rangle = 0$$

car $x \in H$ et $u \in D = H^{\perp}$.
Donc $\langle f(x), u\rangle = 0$, ainsi $f(x) \in (\mathrm{Vect}(u))^{\perp} = D^{\perp} = H$ (E de dimension finie donc $H^{\perp\perp} = H$)
Ainsi $\forall x \in H, f(x) \in H$, donc H est stable par f.

V.C) Ici, on suppose que $n = 3$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)} f = A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
D'après la question précédente, pour determiner les plans stables par f , il faut et il suffit de determiner les vecteurs propres de ${}^{\mathbf{t}}A$.
On a $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}({}^{\mathbf{t}}A) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1\}$, car on a déjà calculé $\chi_A(x) = (x-1)(x^2+2x+5)$ dans la question **IV-F-1)**.

$$U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1({}^{\mathbf{t}}A) \quad \Leftrightarrow \quad ({}^{\mathbf{t}}A - I)U = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -4 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y + z = 0 \\ -4x - 3y + z = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} z = -y \\ y = -x \end{cases}$$

Ainsi $U = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ x \end{pmatrix}$, donc $E_1({}^{\mathbf{t}}A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ainsi, f admet un unique plan stable H, à savoir $H = (\text{Vect}(e_1 - e_2 + e_3))^{\perp}$. L'orthogonalité concernée ici est celle associée au produit scalaire $\langle , \rangle$ pour lequel la base $\mathscr{B}$ est une base orthonormée de E (voir **V-A-1)**). Une équation cartésienne de H dans $\mathscr{B}$ est

$$x - y + z = 0$$

ce qui signifie que

$$H = \text{Vect}(e_1 + e_2, e_1 - e_3)$$

Remarque : Si $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B} = \mathscr{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, alors le plan stable est :

$$H = \text{Vect}(\underbrace{(1,1,0)}_{e_1+e_2}, \underbrace{(1,0,-1)}_{e_1-e_3}).$$

On voit que l'on retrouve le résultat de la question **IV-F-1)**.

V.D) $\dim E = n \geq 1\,;\ f \in \mathcal{L}(E)$.

V.D.1) Par hypothèse, f est diagonalisable, donc E admet une base $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ formée de vecteurs propres de f.

• Si $n = 1$, alors $H_1 = \{0\}$ est un hyperplan de E stable par f.

• Si $n \geq 2$, posons pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,

$$H_j = \text{Vect}(e_i)_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ i \neq j}}$$

Il est clair que H_j est un hyperplan de E car il est engendré par $n-1$ vecteurs linéairement indépendants de E.

Pour $j \neq k$ on a $H_j \neq H_k$ car $e_j \in H_k$ et $e_j \notin H_j$ (puisque $(e_1, \cdots, e_n)$ est libre.)

Ainsi les hyperplans $H_j, j \in [\![1, n]\!]$ sont deux à deux distincts , en nombre de n ; de plus les H_j sont stables par f car engendrés par des vecteurs propres de f.

$\bullet\bullet$ Montrons que : $\bigcap_{j=1}^{n} H_j = \{0\}$:

Soit $x \in E$, alors $\exists!(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n, x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. On a alors :

$$x \in \bigcap_{j=1}^{n} H_j \Leftrightarrow \forall j \in [\![1, n]\!], x \in H_j$$

Or $x \in H_j \Leftrightarrow \alpha_j = 0$, donc : $x \in \bigcap_{j=1}^{n} H_j \Leftrightarrow \forall j \in [\![1, n]\!], \alpha_j = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Ainsi $\bigcap_{j=1}^{n} H_j = \{0\}$.

V.D.2) La réponse est oui. En effet, notons $H_1, \cdots, H_n$ les n hyperplans stables par f tel que $\bigcap_{j=1}^{n} H_j = \{0\}$.
Soit $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et notons par $\langle, \rangle$ l'unique produit scalaire de E qui fait de $\mathscr{B}$ une base orthonormée (question **V-A-1)**). Pour un tel produit scalaire, on a $E = \{0\}^{\perp} = \left(\bigcap_{j=1}^{n} H_j\right)^{\perp} = \sum_{j=1}^{n} H_j^{\perp}$.
$H_j^{\perp}$ étant une droite de E car H_j est un hyperplan de E, $\exists \varepsilon_j \in E \backslash \{0\}$ tel que $H_j^{\perp} = \text{Vect}(\varepsilon_j)$. Ainsi $E = \sum_{j=1}^{n} \text{Vect}(\varepsilon_j)$; donc la famille $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ est une famille génératrice de E et comme elle possède $n = \dim E$ vecteurs c'est une base de E. Notons $U_j = \text{mat}_{\mathscr{B}}(\varepsilon_j)$ et $A = \text{mat}_{\mathscr{B}} f$.
Puisque H_j est stable par f alors d'après **V-B)**, U_j est un vecteur propre de ${}^{\mathbf{t}}A$. puisque $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ est une base de E, alors $\mathscr{U} = (U_1, \cdots, U_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui est formée de vecteurs propres de ${}^{\mathbf{t}}A$ alors ${}^{\mathbf{t}}A$ est diagonalisable , c'est-à-dire $\exists P \in GL_n(\mathbb{R}), \exists D = \text{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que ${}^{\mathbf{t}}A = PDP^{-1}$, donc $A = QD'Q^{-1}$ avec $Q = {}^{\mathbf{t}}P$ et $D' = {}^{\mathbf{t}}D = D$. Ainsi A est diagonalisable , d'où f est diagonalisable.