Mathématiques 2

MP **2015**

4 heures Calculatrices autorisées

Autour des sommes d'Euler

Dans tout le problème, on note pour tout entier $n \geqslant 1$, $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

On note ζ la fonction définie pour $x > 1$ par $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

Le but du problème est d'étudier des séries faisant intervenir la suite (H_n) et notamment d'obtenir une relation due à Euler qui exprime, pour r entier naturel supérieur ou égal à 2, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{(n+1)^r}$ à l'aide de valeurs de la fonction ζ en des points entiers.

I Représentation intégrale de sommes de séries

I.A –

I.A.1) Justifier que la série de terme général $a_n = \dfrac{1}{n} - \displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ converge.

I.A.2) Montrer qu'il existe une constante réelle A telle que $H_n \underset{+\infty}{=} \ln n + A + o(1)$. En déduire que $H_n \sim \ln n$.

I.B – Soit r un entier naturel.

Pour quelles valeurs de r, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{H_n}{(n+1)^r}$ est-elle convergente ?

Dans toute la suite on notera $S_r = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{(n+1)^r}$ lorsque la série converge.

I.C –

I.C.1) Donner sans démonstration les développements en série entière des fonctions $t \mapsto \ln(1-t)$ et $t \mapsto \dfrac{1}{1-t}$ ainsi que leur rayon de convergence.

I.C.2) En déduire que la fonction

$$t \mapsto -\frac{\ln(1-t)}{1-t}$$

est développable en série entière sur $]-1,1[$ et préciser son développement en série entière à l'aide des réels H_n.

I.D – Pour tout couple d'entiers naturels (p,q) et pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, on note

$$I_{p,q} = \int_0^1 t^p (\ln t)^q \,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad I_{p,q}^{\varepsilon} = \int_{\varepsilon}^1 t^p (\ln t)^q \,\mathrm{d}t$$

I.D.1) Montrer que l'intégrale $I_{p,q}$ existe pour tout couple d'entiers naturels (p,q).

I.D.2) Montrer que, $\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}^*, \forall \varepsilon \in]0,1[$, $\quad I_{p,q}^{\varepsilon} = -\dfrac{q}{p+1} I_{p,q-1}^{\varepsilon} - \dfrac{\varepsilon^{p+1}(\ln \varepsilon)^q}{p+1}$.

I.D.3) En déduire que l'on a $\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}^*$, $\quad I_{p,q} = -\dfrac{q}{p+1} I_{p,q-1}$.

I.D.4) En déduire une expression de $I_{p,q}$ en fonction des entiers p et q.

I.E – Soit r un entier naturel non nul et f une fonction développable en série entière sur $]-1,1[$.

On suppose que pour tout x dans $]-1,1[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{(n+1)^r}$ converge absolument.

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 (\ln t)^{r-1} f(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^{r-1}(r-1)! \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{(n+1)^r}$.

I.F –

I.F.1) Déduire des questions précédentes que pour tout entier $r \geqslant 2$,

$$S_r = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{(n+1)^r} = \frac{(-1)^r}{(r-1)!} \int_0^1 (\ln t)^{r-1} \frac{\ln(1-t)}{1-t} \,\mathrm{d}t$$

I.F.2) Établir que l'on a alors $S_r = \dfrac{(-1)^r}{2(r-2)!} \displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln t)^{r-2}(\ln(1-t))^2}{t} \,\mathrm{d}t$.

I.F.3) En déduire que $S_2 = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1-t} \,\mathrm{d}t$

puis trouver la valeur de S_2 en fonction de $\zeta(3)$.

II La fonction β

II.A – *La fonction* Γ

II.A.1) Soit $x > 0$. Montrer que $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Dans toute la suite, on notera Γ la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t} \,\mathrm{d}t$.

On admettra que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son ensemble de définition, à valeurs strictement positives et qu'elle vérifie, pour tout réel $x > 0$, la relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

II.A.2) Soit x et α deux réels strictement positifs. Justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-\alpha t} \,\mathrm{d}t$ et donner sa valeur en fonction de $\Gamma(x)$ et α^x.

II.B – *La fonction* β *et son équation fonctionnelle*

Pour (x, y) dans $(\mathbb{R}^{+*})^2$, on définit $\beta(x, y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} \,\mathrm{d}t$.

II.B.1) Justifier l'existence de $\beta(x, y)$ pour $x > 0$ et $y > 0$.

II.B.2) Montrer que pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$, $\beta(x, y) = \beta(y, x)$.

II.B.3) Soient $x > 0$ et $y > 0$. Établir que $\beta(x+1, y) = \dfrac{x}{x+y}\beta(x, y)$.

II.B.4) En déduire que pour $x > 0$, $y > 0$, $\beta(x+1, y+1) = \dfrac{xy}{(x+y)(x+y+1)}\beta(x, y)$.

II.C – *Relation entre la fonction* β *et la fonction* Γ

On veut montrer que pour $x > 0$ et $y > 0$, $\quad \beta(x, y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ relation qui sera notée $(\mathcal{R})$.

II.C.1) Expliquer pourquoi il suffit de montrer la relation $(\mathcal{R})$ pour $x > 1$ et $y > 1$.

Dans toute la suite de cette question on suppose $x > 1$ et $y > 1$.

II.C.2) Montrer que $\beta(x, y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} \,\mathrm{d}u$.

On pourra utiliser le changement de variable $t = \dfrac{u}{1+u}$.

II.C.3) On note $F_{x,y}$ la primitive sur $\mathbb{R}^+$ de $t \mapsto e^{-t}t^{x+y-1}$ qui s'annule en 0. Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, F_{x,y}(t) \leqslant \Gamma(x+y)$$

II.C.4) Soit $G(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} F_{x,y}((1+u)a) \,\mathrm{d}u$.

Montrer que G est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

II.C.5) Montrer que $\displaystyle\lim_{a \to +\infty} G(a) = \Gamma(x+y)\beta(x, y)$.

II.C.6) Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout segment $[c, d]$ inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$, puis que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

II.C.7) Exprimer pour $a > 0$, $G'(a)$ en fonction de $\Gamma(x)$, e^{-a} et a^{y-1}

II.C.8) Déduire de ce qui précède la relation $(\mathcal{R})$.

III La fonction digamma

On définit la fonction ψ (appelée fonction digamma) sur $\mathbb{R}^{+*}$ comme étant la dérivée de $x \mapsto \ln(\Gamma(x))$.

Pour tout réel $x > 0$, $\psi(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$.

III.A – Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\psi(x+1) - \psi(x) = \dfrac{1}{x}$.

III.B – Sens de variation de ψ

III.B.1) À partir de la relation $(\mathcal{R})$, justifier que $\dfrac{\partial \beta}{\partial y}$ est définie sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$.

Établir que pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$, $\dfrac{\partial \beta}{\partial y}(x,y) = \beta(x,y)(\psi(y) - \psi(x+y))$.

III.B.2) Soit $x > 0$ fixé. Quel est le sens de variation sur $\mathbb{R}^{+*}$ de la fonction $y \mapsto \beta(x,y)$?

III.B.3) Montrer que la fonction ψ est croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

III.C – Une expression de ψ comme somme d'une série de fonctions

III.C.1) Montrer que pour tout réel $x > -1$ et pour tout entier $n \geqslant 1$

$$\psi(1+x) - \psi(1) = \psi(n+x+1) - \psi(n+1) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right)$$

III.C.2) Soit n un entier $\geqslant 2$ et x un réel > -1. On pose $p = E(x) + 1$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x. Prouver que

$$0 \leqslant \psi(n+x+1) - \psi(n) \leqslant H_{n+p} - H_{n-1} \leqslant \frac{p+1}{n}$$

III.C.3) En déduire que, pour tout réel $x > -1$,

$$\psi(1+x) = \psi(1) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$$

III.D – Un développement en série entière

On note g la fonction définie sur $[-1, +\infty[$ par

$$g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$$

III.D.1) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1, +\infty[$.

Préciser notamment la valeur de $g^{(k)}(0)$ en fonction de $\zeta(k+1)$ pour tout entier $k \geqslant 1$.

III.D.2) Montrer que pour tout entier n et pour tout x dans $]-1, 1[$

$$\left| g(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leqslant \zeta(2) |x|^{n+1}$$

Montrer que g est développable en série entière sur $]-1, 1[$.

III.D.3) Prouver que pour tout x dans $]-1, 1[$,

$$\psi(1+x) = \psi(1) + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \zeta(n+1) x^n$$

IV Une expression de S_r en fonction de valeurs entières de ζ

Dans cette partie, on note B la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $B(x) = \dfrac{\partial^2 \beta}{\partial y^2}(x, 1)$.

***IV.A* – *Une relation entre* B *et* ψ**

Justifier que B est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

À l'aide de la relation trouvée au III.B.1 établir que pour tout réel $x > 0$

$$xB(x) = (\psi(1+x) - \psi(1))^2 + (\psi'(1) - \psi'(1+x))$$

En déduire que B est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

***IV.B* – *Expression de* S_r *à l'aide de la fonction* B**

IV.B.1) Montrer que pour tout réel $x > 0$, $B(x) = \displaystyle\int_0^1 (\ln(1-t))^2 t^{x-1}\, \mathrm{d}t$.

IV.B.2) Donner sans justification une expression, à l'aide d'une intégrale, de $B^{(p)}(x)$, pour tout entier naturel p et tout réel $x > 0$.

IV.B.3) En déduire que pour tout entier $r \geqslant 2$, $S_r = \dfrac{(-1)^r}{2(r-2)!} \lim\limits_{x \to 0^+} B^{(r-2)}(x)$.

IV.B.4) Retrouver alors la valeur de S_2 déjà calculée au I.F.3.

IV.C – Soit φ la fonction définie $]-1, +\infty[$ par $\varphi(x) = (\psi(1+x) - \psi(1))^2 + (\psi'(1) - \psi'(1+x))$.

IV.C.1) Montrer que φ est $\mathcal{C}^\infty$ sur son ensemble de définition et donner pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ la valeur de $\varphi^{(n)}(0)$ en fonction des dérivées successives de ψ au point 1.

IV.C.2) Conclure que, pour tout entier $r \geqslant 3$,

$$2S_r = r\zeta(r+1) - \sum_{k=1}^{r-2} \zeta(k+1)\zeta(r-k)$$

• • • FIN • • •
