A. Une intégrale à paramètre

1) ψ est continue sur I, $\dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \underset{u\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{u}}$ et $\forall u \geq 1,\ 0 \leq \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \leq e^{-u}$, donc ψ est intégrable sur I.

2) Si $x > 0$, alors l'application $u \longmapsto \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}$ est continue sur I et $\forall u \in I, 0 \leq \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)} \leq \dfrac{1}{x}\psi(u)$ puisque ψ est intégrable sur I alors $u \longmapsto \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}$ l'est aussi sur I, donc $F(x)$ existe, et $x \in D_F$.
Pour $x = 0$ alors $\dfrac{e^{-u}}{u\sqrt{u}} \underset{u\to 0}{\sim} \dfrac{1}{u\sqrt{u}} = \dfrac{1}{u^{3/2}}$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u\sqrt{u}}du$ diverge c'est à dire $0 \notin D_F$.
Si $x < 0$, alors $u \longmapsto \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}$ est continue sur $]0,-x[\cup]-x,+\infty[$, mais $\displaystyle\lim_{u\to -x} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)} = \infty$, donc l'application $u \longmapsto \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}$ n'est pas continue par morceaux sur I donc $-x \notin D_F$. Conséquence : les valeurs de x pour lesquelles $F(x)$ existe sont $]0,+\infty[$.

3) $\forall x \in I,\ \ u \longmapsto \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}$ est continue et intégrable sur I.
$\forall u \in I,\ \ x \longmapsto \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, et $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}\right) = \dfrac{-e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)^2}$.
$\forall x \in I,\ \ u \longmapsto \dfrac{-e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)^2}$ est continue sur I.
$\forall a > 0,\ \forall u \in I,\ \forall x \in [a,+\infty[,\ \left|\dfrac{-e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)^2}\right| \leq \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+a)^2}$, comme $\forall u \in I,\ 0 \leq \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+a)^2} \leq \dfrac{1}{a^2}\psi(u)$ et que ψ est intégrable sur I, alors F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.
De plus $\forall x \in I$, $F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{-e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)^2}du$.

4) Avec une intégration par parties $\dfrac{1}{2\sqrt{u}} = (\sqrt{u})'$, on obtient :

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}F(x) &= \left[\sqrt{u}\frac{e^{-u}}{(u+x)}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\sqrt{u}\frac{\partial}{\partial u}\frac{e^{-u}}{(u+x)}du \\
&= -\int_0^{+\infty}\sqrt{u}\frac{\partial}{\partial u}\frac{e^{-u}}{(u+x)}du \\
&= \int_0^{+\infty}\sqrt{u}\frac{e^{-u}}{u+x}du + \int_0^{+\infty}\sqrt{u}\frac{e^{-u}}{(u+x)^2}du \\
&= \int_0^{+\infty}\frac{ue^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}du + \int_0^{+\infty}\frac{ue^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)^2}du
\end{aligned}
$$

Évidement le crochet est nul et les deux intégrales convergent.
En remarquant que $u = u + x - x$, on obtient

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}F(x) &= \int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du - x\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}du + \int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}du - x\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)^2}du \\
&= K - xF(x) + F(x) + xF'(x)
\end{aligned}
$$

Donc $xF'(x) - (x - \frac{1}{2})F(x) = -K$.

5) G est $\mathscr{C}^1$ sur I et $\forall x \in I,\ \ G'(x) = \sqrt{x}e^{-x}F'(x) + (\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x})e^{-x}F(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}(xF'(x) - (x - \frac{1}{2})F(x)) = -K\frac{e^{-x}}{x}$

Alors $\exists C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in I,\ G(x) = C - K\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt$.

6) De la question 5), $\lim_{x\to 0} G(x) = C$, de l'expression de F on a $\forall x \in I,\ 0 \le F(x) \le \frac{1}{x}K$, alors $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$, donc $\lim_{x\to+\infty} G(x) = 0$, et de la question précédente $\lim_{x\to+\infty} G(x) = C - K^2$, alors $C = K^2$.
D'autre part :

$$
\begin{aligned}
F(x) &= 2\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t^2}}{t^2+x}dt \ \ (\sqrt{u} = t) \\
&= \frac{2\sqrt{x}}{x}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xv^2}}{v^2+1}dv \ \ (t = \sqrt{x}v)
\end{aligned}
$$

Si $(x_n)_n$ est une suite d'élément de $\mathbb{R}^+$ qui tend vers 0, par le théorème de la convergence dominée $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x_n v^2}}{v^2+1}dv = \int_0^{+\infty}\frac{dv}{v^2+1}dv = \frac{\pi}{2}$, alors $\lim_{x\to 0}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xv^2}}{v^2+1}dv = \frac{\pi}{2}$:

En effet si on pose $f_n(v) = \dfrac{e^{-x_n v^2}}{v^2+1}$.
$\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue sur I.
(f_n) converge simplement vers l'application $v \longmapsto \dfrac{1}{v^2+1}$ qui est aussi continue sur I.
$\forall n \in \mathbb{N}, |f_n(v)| \leq \dfrac{1}{v^2+1}$ et l'application $v \longmapsto \dfrac{1}{v^2+1}$ est continue et intégrable sur I.
par la caractérisation séquentielle de la limite, $F(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{\pi}{\sqrt{x}}$, donc $G(x) \underset{x\to 0}{\sim} \pi$, donc $\lim\limits_{x\to 0} G(x) = \pi$.
Alors $K = \sqrt{\pi}$, car $K > 0$.

B. Étude de deux séries de fonctions

7) f est la composée des applications $x \longmapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$ et de $x \longmapsto e^{-x}$, et g est la composée des applications $x \longmapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}x^n$ et de $x \longmapsto e^{-x}$.

Les séries entières $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$ et $\sum\limits_{n\geq 0} \sqrt{n}x^n$ ont un rayon de convergence 1, donc continues sur $]-1,1[$, et $\forall x \in I, e^{-x} \in]-1,1[$, alors f et g sont continues sur I.

8) L'application $u \longmapsto \dfrac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}$ est décroissante et intégrable sur I, donc :
$\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}} du \leq \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}} du$.
Alors $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}} du \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{n-1}^{n} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}} du$, alors l'inégalité demandée.
Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}} du = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}}$. Question 6)
et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}} du = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\sqrt{\pi} - \int_0^{x} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt\right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}}$.
Donc $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}}$.

9) L'application $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est décroissante sur I donc :
$\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{\sqrt{u}} du \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{\sqrt{u}}du - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

La série de terme général $\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ est convergente, donc la série de terme général $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{\sqrt{u}}du - \frac{1}{\sqrt{n+1}}du$ est convergente, donc sa suite des sommes partielles est convergente, alors $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{u}}du - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)_{n\geq 2}$ est convergente d'où la convergence de $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right)_{n\geq 1}$

10) Soit $x > 0$. Les séries $\displaystyle\sum_{n\geq 0} e^{-nx}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}$ convergent absolument, donc la série produit de cauchy de ses deux séries converge absolument, et on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n$, où $\forall n \in \mathbb{N}^*, c_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-kx}}{\sqrt{k}}e^{-(n-k)x} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}e^{-nx}$.

Alors la série demandée est convergente et on a $h(x) = \dfrac{f(x)}{1-e^{-x}}$.

11) D'après la question 9), $h(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{x\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{x^{3/2}}$.

Or $2g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 2\sqrt{n}e^{-nx} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(2\sqrt{n} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)e^{-nx} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)e^{-nx}$.

Or la suite $\left(2\sqrt{n} - \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)_{n\geq 1}$ est convergente, donc bornée par une constante M, alors $\forall x \in I$, $\left|\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(2\sqrt{n} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)e^{-nx}\right| \leq \dfrac{Me^{-x}}{1-e^{-x}}$, or $x^{3/2}\dfrac{Me^{-x}}{1-e^{-x}} \to 0$ quand $x \to 0$, alors $g(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}}$.

C. Séries de fonctions associées à des ensembles d'entiers

12) Si A est fini, alors $I_A = \mathbb{R}^+$.

Si A est une partie infini de $\mathbb{N}$, il existe une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow A$ pour sa construction on peut poser $\varphi(0) = \min A$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(n) = \min A\backslash\{\varphi(0), ..., \varphi(n-1)\}$, posons alors $\forall n \in \mathbb{N}$; $b_n = a_{\varphi(n)} = 1$, car $\varphi(n) \in A$.

Si $x > 0$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} e^{-nx}$ converge donc $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n e^{-nx}$ car la suite $(a_n)_n$ est bornée.

Si $x=0$, la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ est divergente, car $(a_n)_n$ possède une sous suite qui ne tend pas vers 0.
Donc $I_A =]0,+\infty[$.

13) Soit $n\in\mathbb{N}$, on a $A(n)=\{k\in A \setminus k\leq n\}$ donc $\text{Card}(A(n))=\sum_{k=0}^{n} a_k$, les deux séries $\sum_{n\geq 0} a_n e^{-nx}$ et $\sum_{n\geq 0} e^{-nx}$ convergent car $A\in S$ et $x>0$ et ce mode de convergence est absolue, donc la série produit de cauchy des ces deux séries convergent absolument donc convergente c'est à dire la série $\sum_{n\geq 0}\text{Card}(A(n))e^{-nx}$ converge et on a $\sum_{n=0}^{+\infty}\text{Card}(A(n))e^{-nx}=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-nx}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}=\dfrac{f_A(x)}{1-e^{-x}}$.

14) On a $A_1(n)=\{k\in\mathbb{N}^*\setminus k^2\leq n\}=\{k\in\mathbb{N}^*\setminus 1\leq k\leq\sqrt{n}\}=\{k\in\mathbb{N}\setminus 1\leq k\leq [\sqrt{n}]\}$, donc :
$\text{Card}(A_1(n))=[\sqrt{n}]$ alors de la question 13) : $\dfrac{f_{A_1}(x)}{1-e^{-x}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\text{Card}(A_1(n))e^{-nx}=\sum_{n=0}^{+\infty}[\sqrt{n}]e^{-nx}$.
Or $\forall n\in\mathbb{N},\ \ [\sqrt{n}]\leq\sqrt{n}<[\sqrt{n}]+1$, et $\sum_{n=0}^{+\infty}\sqrt{n}e^{-nx}-\dfrac{f_{A_1}(x)}{1-e^{-x}}=\sum_{n=0}^{+\infty}(\sqrt{n}-[\sqrt{n}])e^{-nx}$
Donc $0\leq\sum_{n=0}^{+\infty}\sqrt{n}e^{-nx}-\dfrac{f_{A_1}(x)}{1-e^{-x}}\leq\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-nx}=\dfrac{1}{1-e^{-x}}$.
Alors $0\leq g(x)-\dfrac{f_{A_1}(x)}{1-e^{-x}}\leq\dfrac{1}{1-e^{-x}}$.
Alors $g(x)-\dfrac{1}{1-e^{-x}}\leq\dfrac{f_{A_1}(x)}{1-e^{-x}}\leq g(x)$ qui s'écrit aussi $(1-e^{-x})g(x)-1\leq f_{A_1}(x)\leq(1-e^{-x})g(x)$, de la question 14), $f_{A_1}(x)\underset{x\to 0}{\sim}\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$.
Alors $xf_{A_1}(x)\underset{x\to 0}{\sim}\dfrac{\sqrt{\pi x}}{2}$, alors $\lim_{x\to 0} xf_{A_1}(x)=0$ càd $A_1\in S$ et $\phi(A_1)=0$.

15) $v(n)=\text{Card}\{(p,q)\in\mathbb{N}^2\ /\ p^2+q^2=n\}=\text{Card}\{(p,q)\in A_1^2\ /\ p+q=n\}=\sum_{p+q=n} a_p a_q$, car $a_p a_q=1\Longleftrightarrow(p,q)\in A_1^2$.
Donc $v(n)=\sum_{i=0}^{n} a_i a_{n-i}$. et $(f_{A_1}(x))^2=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k e^{-kx} a_{n-k} e^{-(n-k)x}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty} v(n)e^{-nx}$, alors la convergence de la série donnée et l'égalité.
On a $A_2=\{n\in\mathbb{N}\setminus\exists(p,q)\in\mathbb{N}^2, p^2+q^2=n\}$ et $v(n)=\text{Card}A_2$

Toujours d'après la question 13)

$$\begin{aligned} f_{A_2}(x) &= (1-e^{-x})\sum_{n=0}^{+\infty}\text{Card}(A_2(n))e^{-nx} \\ &= (1-e^{-x})\sum_{n=0}^{+\infty}v(n)e^{-nx} \\ &= (1-e^{-x})(f_{A_1}(x))^2 \leq (f_{A_1}(x))^2 \end{aligned}$$

Alors $0 \leq xf_{A_2}(x) \leq x(f_{A_1}(x))^2$, or $\lim\limits_{x\to 0} x(f_{A_1}(x))^2 = \dfrac{\pi}{4}$, donc :

$$\phi(A_2) = \lim_{x\to 0} xf_{A_2}(x) \leq \frac{\pi}{4}$$

D. Un théorème taubérien

16) Si ψ est un élément de E alors elle est bornée sur $[0,1]$, $\exists M>0$, $\forall x \in [0,1]$, $|\psi(x)| \leq M$, donc $\forall x \in]0,+\infty[$, $|\alpha_n e^{-nx}\psi(e^{-nx})| \leq M\alpha_n e^{-nx}$, et la série $\sum\limits_{n\geq 0}\alpha_n e^{-nx}$ est convergente, par comparaison la série $\sum\limits_{n\geq 0}\alpha_n e^{-nx}\psi(e^{-nx})$ est convergente, alors $L(\psi)$ est bien définie.

Si $\psi_1,\psi_2 \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\forall x \in]0,+\infty[$, $(L(\psi_1+\lambda\psi_2))(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\alpha_n e^{-nx}(\psi_1+\lambda\psi_2)(e^{-nx}) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\alpha_n e^{-nx}\psi_1(e^{-nx}) + \lambda\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\alpha_n e^{-nx}\psi_2(e^{-nx}) = (L(\psi_1))(x) + \lambda(L(\psi_2))(x)$ car les deux séries convergent.

Donc $(L(\psi_1+\lambda\psi_2)) = (L(\psi_1)) + \lambda(L(\psi_2))$.

Si on suppose que $\psi_1 \leq \psi_2$, alors $\forall x \in]0,+\infty[, \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \alpha_n e^{-nx}\psi_1(e^{-nx}) \leq \alpha_n e^{-nx}\psi_2(e^{-nx})$, donc $L(\psi_1) \leq L(\psi_2)$.

17) On a $E_1 \subset E$, la fonction nulle est un élément de E_1 qui est donc non vide.

Si $\psi_1,\psi_2 \in E_1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, comme $\forall x \in]0,+\infty[$, $x(L(\psi_1+\lambda\psi_2))(x) = x(L(\psi_1))(x) + \lambda x(L(\psi_2))(x)$, en passant à la limite en 0, l'application $x \longmapsto x(L(\psi_1+\lambda\psi_2))(x)$ possède une limite en 0 et $\Delta(\psi_1+\lambda\psi_2) = \Delta(\psi_1)+\lambda\Delta(\psi_2)$.

Soit $\psi \in E_1$, alors $\forall x \in I$, $|x(L(\psi))(x)| \leq x\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\alpha_n e^{-nx}\left\|\psi\right\|_\infty$, par passage à la limite on obtient : $|\Delta(\psi)| \leq \ell\left\|\psi\right\|_\infty$, donc Δ est continue sur $(E_1, \|\|_\infty)$

18) Tout d'abord $e_p \in E$, $x\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\alpha_n e^{-nx}e^{-pxn} = \dfrac{1}{p+1}\left(x(p+1)\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\alpha_n e^{-nx(p+1)}\right) \to \dfrac{\ell}{p+1}$ quand $x\to 0$ car $(p+1)x>0$, donc $e_p \in E_1$ et $\Delta(e_p) = \dfrac{\ell}{p+1} = \ell\displaystyle\int_0^1 e_p(t)dt$.

Δ est linéaire sur E_1, donc $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\Delta(P) = \ell \int_0^1 P(t)dt$.

Soit $\psi \in E_0$, d'après le théorème de Weierstrass il existe une fonction polynômiale $(P_N)_N$ qui converge uniformément vers ψ sur $[0,1]$.

Alors $\lim\limits_{N\to+\infty} \int_0^1 P_N(t)dt = \int_0^1 \psi(t)dt$. On va essayer de montrer que $\Delta(\psi)$ existe et que $\Delta(\psi) = \ell \int_0^1 \psi(t)dt$.

Remarquons que : $\ell \int_0^1 \psi(t)dt = \lim\limits_{N\to+\infty} \ell \int_0^1 P_N(t)dt = \lim\limits_{N\to+\infty} \lim\limits_{x\to 0} x \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx} P_N(e^{-nx})$

Pour cela posons $f_N(x) = x \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx} P_N(e^{-nx})$ et $f(x) = x \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx} \psi(e^{-nx})$.

Soit $x \in [0,1]; N \in \mathbb{N}, |f_N(x) - f(x)| \leq x \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx} |P_N(e^{-nx}) - \psi(e^{-nx})| \leq$

$\left\| P_N - \psi \right\|_\infty x \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx}$

Soit $[a,b] \subset [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a,b], 0 \leq \alpha_n e^{-nx} \leq \alpha_n e^{-na}$ et la série $\sum\limits_{n\geq 0} \alpha_n e^{-na}$ est convergente par hypothèse, donc l'application $x \longmapsto x \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx}$ est continue sur $]0,1]$ et possède une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en 0 donc bornée alors $\exists M > 0$ telle que $\forall x \in [0,1]$; $|f_N(x) - f(x)| \leq M \left\| P_N - \psi \right\|_\infty$, alors $(f_N)_N$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers l'application f.

D'autre part $\lim\limits_{x\to 0} f_N(x) = \Delta(P_N)$.

Par application du théorème de la double limite, la suite $(\Delta(P_N))_N$ est convergente et on a : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{N\to+\infty} f_N(x)$, alors $\Delta(\psi)$ existe et $\Delta(\psi) = \ell \int_0^1 \psi(t)dt$ et on $E_0 \subset E_1$.

19) g_- est continue sur $[0, a-\varepsilon[$ et sur $]a-\varepsilon, a[$ et sur $]a, 1]$.

$\lim\limits_{x\to(a-\varepsilon)^+} g_-(x) = \lim\limits_{x\to(a-\varepsilon)^-} g_-(x) = 1 = g_-(a-\varepsilon)$. de même $\lim\limits_{x\to(a)^+} g_-(x) = \lim\limits_{x\to(a)^-} g_-(x) = 0 = g_-(a)$.

De même pour g_+.

Par application de la question précédente et calcul simple, $\Delta(g_-) = \ell \int_0^1 g_-(t)dt = \ell(a - \frac{\varepsilon}{2})$ et $\Delta(g_+) = \ell(a + \frac{\varepsilon}{2})$.

On remarque que $g_- \leq 1_{[0,a]} \leq g_+$. par application de la question 16), $x(L(g_-))(x) \leq x(L(1_{[0,a]}))(x)) \leq x(L(g_+))(x)$.

$\lim\limits_{x\to 0} x(L(g_-))(x) = \ell(a - \frac{\varepsilon}{2})$ et $\lim\limits_{x\to 0} x(L(g_+))(x) = \ell(a - \frac{\varepsilon}{2})$, donc $\exists \alpha > 0$, $x \in$

$]0,\alpha] \Longrightarrow \ell(a-\frac{3\varepsilon}{2}) \leq x(L(g_-))(x)$ et $x(L(g_+))(x) \leq \ell(a+\frac{3\varepsilon}{2})$. Alors $x \in]0,\alpha] \Longrightarrow \ell(a-\frac{3\varepsilon}{2}) \leq x(L(1_{[0,a]}))(x)) \leq \ell(a+\frac{3\varepsilon}{2})$ et c'est exactement la définition de $\lim_{x\to 0} x(L(1_{[0,a]}))(x)) = \ell a$.

Alors $1_{[0,a]} \in E_1$ et $\Delta(1_{[0,a]}) = a\ell$. par la même méthode $1_{[0,a[} \in E_1$. Puisque $1_{[a,b]} = 1_{[0,b]} - 1_{[0,a[}$, alors $1_{[a,b]} \in E_1$, de plus $\Delta(1_{[a,b]}) = \ell(b-a)$ et $1_{\{a\}} = 1_{[a,a]} \in E_1$. de même $1_{]a,b]} = 1_{[0,b]} - 1_{[0,a]} \in E_1$, de plus $\Delta(1_{]a,b]}) = \ell(b-a)$.

De même $1_{]a,b[} = 1_{[0,b[} - 1_{[0,a]} \in E_1$ et $\Delta(1_{]a,b[}) = \ell(b-a)$.

On a $E_1 \subset E$, soit $u \in E$, alors $\exists \psi \in E_0$ et ϕ en escalier tels que $u = \psi + \phi$, $\exists$ une subdivision $(a_j)_{0\leq j\leq N}$ $\exists (\lambda_j)_{0\leq j\leq N-1}$ tel que $\phi = \sum_{j=0}^{N-1} \lambda_j 1_{]a_j, a_{j+1}[}$, par application de la question 18), $\psi \in E_1$, et $\Delta(\psi) = \ell \int_0^1 \psi(t)dt$, et on E_1 est un sous espace vectoriel de E, donc $\phi \in E_1$, donc $u \in E_1$, de plus $\Delta(u) = \Delta(\psi) + \Delta(\phi) = \ell \int_0^1 \psi(t)dt + \sum_{j=0}^{N-1} \lambda_j \Delta(1_{]a_j, a_{j+1}[}) = \ell \int_0^1 \psi(t)dt + \ell(\sum_{j=0}^{N-1} \lambda_j (a_{j+1} - a_j) = \ell \int_0^1 \psi(t)dt + \ell \int_0^1 \phi(t)dt = \ell \int_0^1 (\psi+\phi)(t)dt = \ell \int_0^1 u(t)dt$.

Donc $E_1 = E$ et $\forall u \in E,\ \Delta(u) = \ell \int_0^1 u(t)dt$.

20) Soit $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{e} \leq e^{-n/N} \leq 1 \Longleftrightarrow 0 \leq n \leq N$.

ψ est continue sur $[0, \frac{1}{e}[$ et sur $]\frac{1}{e}, 1]$ qui admet des limites finies en $\frac{1}{e}$ à gauche et à droite, donc $\psi \in E$. Alors $(L(\psi))\left(\frac{1}{N}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-\frac{n}{N}} \psi(\frac{1}{N}) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n e^{-\frac{n}{N}} e^{\frac{n}{N}} = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n$. Donc $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} \alpha_n = \frac{1}{N}(L(\psi))\left(\frac{1}{N}\right)$.

D'après la question précédente $\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} \alpha_n = \ell \int_0^1 \psi(t)dt = \ell$.

21) Si $A \in S$, alors $\mathrm{Card}A(n) = \sum_{k=0}^{n} a_n$ c'est la question 13), donc $\frac{1}{n}\mathrm{Card}A(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} a_n$. Alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\mathrm{Card}A(n) = \lim_{x\to 0} x f_A(x) = \phi(A)$.

Par application de la question 15) et 14) :

$\lim_{x\to 0} \sum_{n=0}^{+\infty} v(n) e^{-nx} = \lim_{x\to 0} x f_{A_1}(x))^2 = \frac{\pi}{4}$.

Pour vos remarques ... sadikoulmeki@yahoo.fr