A. Un exemple

1) Soit la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n & 1 & 2 & \dots & n-1 \end{pmatrix}$, alors $J = M_\sigma$.

La matrice J est une matrice compagnon son polynôme caractéristique est $\chi_J = X^n - 1$ obtenue par l'intermédiaire de l'opération $C_1 \longrightarrow C_1 + XC_2 + \dots + X^{n-1}C_n$, donc ses valeurs propres sont les racines n ème de l'unité soit donc les $\omega_k = \exp(i\dfrac{2k\pi}{n})$ avec $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

χ_J est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$, alors J est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

2) Si $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, on vérifie facilement que le vecteur $V_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de J associé à la valeur propre ω_k. Donc $(V_0, \dots, V_{n-1})$ est une base de $\mathbb{C}^n$ de vecteurs propres de J.

3) $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Si $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ et $m \in \mathbb{N}$, alors de la formule des probabilités totales on a : $P(X_{m+1} = i) = \sum_{j=0}^{n-1} P(X_{m+1} = i / X_m = j).P(X_m = j)$, il apparaît donc que le terme général de la matrice A cherché est $P(X_{m+1} = i / X_m = j)$, mais avec les hypothèses donnée pour i fixé il reste que deux terme de probabilités $\dfrac{1}{2}$. alors $P(X_{m+1} = i) = \dfrac{1}{2}P(X_m = i-1) + \dfrac{1}{2}P(X_m = i+1)$. La matrice cherché est $A = \dfrac{1}{2}(J + {}^tJ)$.

4) A est symétrique réelle donc orthogonalement diagonalisable, de plus J est une matrice orthogonale car ses vecteurs colonnes forment une base orthonormée pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, alors $A = \dfrac{1}{2}(J + J^{-1})$, Si on pose $J = PDP^{-1}$ où $D = \text{diag}(\omega_0, \dots, \omega_{n-1})$ et P la matrice de passage de la base canonique à la base formée de vecteurs propres de J, alors $A = P\Delta P^{-1}$ où $\Delta = \dfrac{1}{2}(D + D^{-1}) = \text{diag}(1, \cos(\dfrac{2\pi}{n}), \dots, \cos(\dfrac{2(n-1)\pi}{n}))$.

Les valeurs propres de A sont donc de la forme $\lambda_k = \dfrac{1}{2}(\omega_k + \overline{\omega_k}) = \cos(\dfrac{2k\pi}{n})$ et pas nécessairement distincts.

On a $JV_k = \omega_k V_k$, donc $J^{-1}V_k = \overline{\omega_k} V_k$ alors $AV_k = \lambda_k V_k$, A est réelle donc $A\overline{V_k} = \lambda_k \overline{V_k}$, donc $A(V_k + \overline{V_k}) = \lambda_k (V_k + \overline{V_k})$, alors $W_k = \dfrac{1}{2}(V_k + \overline{V_k}) = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_k \\ \vdots \\ \lambda_{k(n-1)} \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_k.

Toutes les valeurs propres de A sont en module plus petit que 1 et 1 est une valeur propre, donc le vecteur $T = \dfrac{W_0}{\| W_0 \|} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

5) n est impair, alors $\lambda_k^m \to 0$ quand $m \to +\infty$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, posons $A = P\Delta P^{-1}$ on peut choisir P orthogonale car A est symétrique réelle. Alors $\Delta^m \to \mathrm{diag}(1, 0, \ldots, 0)$ quand $m \to +\infty$ donc : $U_m = P\Delta^m P^{-1} U_0 \to P\mathrm{diag}\,(1, 0, \ldots, 0) P^{-1} U_0$ quand $m \to +\infty$, car l'application $M \to PMP^{-1}U_0$ est linéaire sur un espace de dimension finie donc continue.

Mais $P\mathrm{diag}\,(1, 0, \ldots, 0) P^{-1} U_0 = [T, 0, \ldots, 0]^t P U_0 = [T, 0, \ldots, 0] \dfrac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Alors $U^m \to \dfrac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ quand $m \to +\infty$.

B. Théorème de Birkhoff-Von Neumann

6) Soit $\lambda \in [0, 1]$ et $M = (M_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ et $N = (N_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ deux éléments de $\mathscr{B}_n$, alors $\sum_{j=1}^{n} ((1-\lambda)M + \lambda N)_{i,j} = (1-\lambda) \sum_{j=1}^{n} M_{i,j} + \lambda \sum_{j=1}^{n} N_{i,j} = 1 = \sum_{j=1}^{n} ((1-\lambda)M + \lambda N)_{j,i}$ donc $\mathscr{B}_n$ est convexe.

Le terme général d'un élément de $\mathscr{B}_n$ est entre 0 et 1 en prenant pour la norme infini pour une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors $\mathscr{B}_n$ est borné.

Pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ les applications $\varphi_i : M \longmapsto \sum_{j=1}^{n} M_{i,j}$, $\psi_i : M \longmapsto \sum_{j=1}^{n} M_{j,i}$ et $T_{i,j} : M \longmapsto M_{i,j}$ sont linéaires sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie donc continues et $\bigcap_{1 \le i \le n} \varphi_i^{-1}\{1\} \bigcap \psi_i^{-1}\{1\} \bigcap_{1 \le i,j \le n} T_{i,j}^{-1}[0, +\infty[= \mathscr{B}_n$, donc $\mathscr{B}_n$ est un fermé.

$\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, alors $\mathscr{B}_n$ est un compact de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

La matrice nulle n'est pas un élément de $\mathscr{B}_n$ qui ne peut donc pas être sous espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

7) Si $M \in \mathscr{P}_n$, alors chaque ligne et chaque colonne de M contient un seul 1, donc $M \in \mathscr{B}_n$ et la première inclusion.

$I_n \in \mathscr{P}_n$ donc l'ensemble est non vide.

Soit $M_{\sigma_1}, M_{\sigma_2}$ deux éléments de $\mathscr{P}_n$, alors $M_{\sigma_1}M_{\sigma_2} = M_{\sigma_1 \circ \sigma_2}$ en effet $(M_{\sigma_1}M_{\sigma_2})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (M_{\sigma_1})_{ik}(M_{\sigma_1})_{kj}$ tous les termes de la somme sont nuls sauf dans le cas où $\sigma_1(k) = i$ et $\sigma_2(j) = k$ qui s'écrit $\sigma_1 \circ \sigma_2(j) = i$.

Alors $M_\sigma M_{\sigma^{-1}} = M_{\mathrm{id}} = I_n$, donc $M_\sigma^{-1} = M_{\sigma^{-1}} \in \mathscr{P}_n$ ainsi $\mathscr{P}_n \subset \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$.

Si $M_\sigma \in \mathscr{P}_n$ alors $M_\sigma^{n!} = I_n$ car $n!$ est le cardinal de $\mathscr{P}_n$. Le polynôme $X^{n!}-1$ est annulateur de M_σ comme il est à racines simples, alors M_σ est diagonalisable.

Les deux matrices I_n et J sont dans $\mathscr{P}_n$ et la matrice $\dfrac{1}{2}I_n + \dfrac{1}{2}J \notin \mathscr{P}_n$, car une matrice de permutation c'est une matrice qui contient un seul 1 dans chaque ligne et dans chaque colonne, donc $\mathscr{P}_n$ n'est donc pas convexe.

8) Soient $M_\sigma \in \mathscr{P}_n$ et $M, N \in \mathscr{B}_n$ et $\lambda \in]0,1[$. On suppose que $M_\sigma = \lambda M + (1-\lambda)N$. Si $(M_\sigma)_{i,j} = 0$ alors $(M)_{i,j} = (N)_{i,j} = 0$ car tous les termes de la somme sont positifs et de somme 0, mais si $(M_\sigma)_{i,j} = 1$, alors $1 = \lambda(M)_{i,j} + (1-\lambda)(N)_{i,j}$, donc $\dfrac{1-(N)_{i,j}}{\lambda} = ((M)_{i,j} - (N)_{i,j})$ et puisque $M, N \in \mathscr{B}_n$, alors $\forall i, j \in \{1,\dots,n\}$; $(M)_{i,j}; (N)_{i,j} \in [0,1]$, ceci donne $(M)_{i,j} - (N)_{i,j} \geq 0$ et on a de même $\dfrac{1-(M)_{i,j}}{(\lambda-1)} = ((M)_{i,j} - (N)_{i,j})$, donc $((M)_{i,j} - (N)_{i,j}) \leq 0$, donc ce dernier nombre est nul, par suite $((M)_{i,j} = (N)_{i,j}$ dans tous les cas, alors $M = N = M_\sigma$.

Donc toute matrice de $\mathscr{P}_n$ est extrémal dans $\mathscr{B}_n$.

9) $A \in \mathscr{B}_n$ mais n'est pas une matrice de permutation, alors il existe un cœfficient $A_{i_1,j_1} \in]0,1[$, la somme de tous les termes de la i_1 ème ligne de A est 1, donc $\exists A_{i_1,j_2} \in]0,1[$. le même travail sur la colonne j_2 de A, $\exists A_{i_2,j_2} \in]0,1[$, le même travail sur la ligne i_2 de A, on construit par récurrence une famille $(j_1, i_1, j_2, i_2, \dots.)$ telle que les cœfficients $A_{i_k,j_k}, A_{i_k,j_{k+1}} \in]0,1[$, l'ensemble des indices étant fini, donc à un certain moment l'un des indices de ligne ou de colonne se répète.

Si c'est la colonne qui se répète c'est bien, si non on refait le même travail avec la matrice ${}^tA$ qui est aussi bistochastique qui n'est pas une matrice aussi de permutation.

Remarque $r \geq 2$.

10) On remarque que cette matrice vérifie $BV = 0$ et ${}^tBV = 0$ où $V = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, la condition $A \in \mathscr{B}_n$ est équivalente à $AV = {}^tAV = V$.

Soit $a =$ le minimum des cœfficients construit dans la question 9), le nombre $a \in]0,1[$, et $\forall i,j \in \{1,..,n\}$, $A_{i,j} - aB_{i,j}, A_{i,j} + aB_{i,j} \in \mathbb{R}^+$, de plus $(A-aB)V = V = (A+aB)V$, donc les deux matrices $A-aB$ et $A+aB$ sont bistochastiques, et on $\frac{1}{2}(A+aB) + \frac{1}{2}(A-aB) = A$ et $A+aB \neq A$, donc A n'est pas extrémal de $\mathscr{B}_n$.

les éléments de $\mathscr{P}_n$ sont des éléments extrémaux de $\mathscr{B}_n$ ceci d'après la question 8), et de cette question ce sont les seuls.

11) Si $M \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ est une matrice extraite de A avec $p+q = n+1$. Si on suppose que $M = 0$. quitte à réarranger les lignes et les colonnes de A, on peut supposer que M est constitué par les p premières lignes de A, et les q premières de A.

Alors $\forall i \in \{1,...,p\}$ $\sum_{j=q+1}^{n} M_{i,j} = 1$, donc

$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=q+1}^{n} M_{i,j} = p = \sum_{j=q+1}^{n}\sum_{i=1}^{p} M_{i,j} \leq \sum_{j=q+1}^{n}\sum_{i=1}^{n} M_{i,j} = n-q$, absurde avec $p+q = n+1$. Donc $M = 0$.

12) Supposons que $\lambda_0 = 1$, alors $\forall j \in \{1,..,n\}$, $A_{\sigma(j)j} = 1$, la matrice contient sur chacune de ses colonnes un 1 c'est donc le seul et les autres termes de la colonne sont nuls car A est bistochastique. de même σ est une bijection donc $\{\sigma(1),...,\sigma(n)\} = \{1,...,n\}$, et puisque $\forall j \in \{1,...,n\}$, $A_{\sigma(j)j} = 1$ alors sur chaque ligne il y'a un seul 1, c'est donc le seul et les autres sont nuls, alors A est une matrice de permutation, absurde, conséquence $\lambda_0 \neq 1$.

$\frac{1}{1-\lambda_0}(A - \lambda_0 M_\sigma)V = \frac{1}{1-\lambda_0}(AV - \lambda_0 M_\sigma V) = \frac{1}{1-\lambda_0}(V - \lambda_0 V) = V$

et $\frac{1}{1-\lambda_0}({}^tA - \lambda_0^t M_\sigma)V = \frac{1}{1-\lambda_0}({}^tAV - \lambda_0^t M_\sigma V) = \frac{1}{1-\lambda_0}(V - \lambda_0 V) = V$

$\forall i,j \in \{1,...,n\}$, $A_{ij} - \lambda_0 (M_\sigma)_{ij} = \begin{cases} A_{ij} \geq 0 & \text{si} \quad \sigma(j) \neq i \\ A_{\sigma(j)j} - \lambda_0 \geq 0 & \text{si} \quad \sigma(j) = i \end{cases}$

On a $\forall i,j \in \{1,...,n\}$; $A_{ij} \in [0,1]$ et $A_{\sigma(1)1} .... A_{\sigma(n)n} > 0$, donc $\lambda_0 \in]0,1[$. Conséquence A_0 est bistochastique.

$\exists j_0 \in \{1,...,n\}$ tel que $\lambda_0 = A_{\sigma(j_0)j_0}$, alors $(A_0)_{\sigma(j_0)j_0} = 0$ car $(M_\sigma)_{\sigma(j_0)j_0} = 1$.

Alors $A_{\sigma(j_0)j_0} \neq 0$ et $(A_0)_{\sigma(j_0)j_0} = 0$

Or $(A_0)_{\sigma(j)j} = (A)_{\sigma(j)j} - \lambda_0 \geq 0$ et $(A)_{\sigma(j)j} > 0$.

Si $\sigma(j) \neq i$, alors $(A_0)_{ij} = (A)_{ij}$. Donc A_0 a au moins un élément nul de plus que A.

13) D'après la question précédente il existe σ, qu'on va noter σ_0 tel que $A = \lambda_0 M_{\sigma_0} + (1-\lambda_0)A_0$, si $A_0 \in \mathscr{P}_n$, c'est terminer car les cœfficients $\lambda_0, (1-\lambda_0) \in]0,1[$ de somme 1.

Si non on répète le même travail à la matrice A_0 qui peut donc s'écrire $\lambda_1 M_{\sigma_1} + (1-\lambda_1)A_1$, alors $A = \lambda_0 M_{\sigma_0} + (1-\lambda_0)\lambda_1 M_{\sigma_1} + (1-\lambda_0)(1-\lambda_1)A_1$, qui s'écrit $\lambda_0 M_{\sigma 0} + \lambda_1 M_{\sigma 1} + \lambda_2 A_2$ avec les $\lambda_i \in]0,1[$ de somme 1, avec $A_2 \in \mathscr{B}_n$ contient au moins deux 0 de plus que A, les cœfficients d'une matrice bistochastique sont en nombres finis le processus doit s'arrêter et il existe $M_0, \ldots, M_s \in \mathscr{P}_n$ et des cœfficients $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in]0,1[$ de sommes 1 tels que $A = \lambda_0 M_0 + \ldots + \lambda_s M_s$.

14) $\mathscr{P}_n$ est un ensemble fini de cardinal $n!$, c'est exactement le nombre de permutations des vecteurs colonnes de la matrice I_n. donc $\inf\limits_{M \in \mathscr{P}_n} \varphi(M)$ existe, soit $B \in \mathscr{P}_n$ tel que $\inf\limits_{M \in \mathscr{P}_n} \varphi(M) = \varphi(B)$.

φ est une forme linéaire sur un espace de dimension finie donc elle est continue.

$\mathscr{B}_n$ est un compact, et φ est à valeurs dans $\mathbb{R}$, donc φ est bornée et atteint ses bornes en particulier sa borne inférieur c'est à dire $\exists A \in \mathscr{B}_n$ tel que $\inf\limits_{M \in \mathscr{B}_n} \varphi(M) = \varphi(A)$.

On a $\inf\limits_{M \in \mathscr{B}_n} \varphi(M) \leq \varphi(N)$ pour tout $N \in \mathscr{P}_n$.

Donc si on suppose que $A \in \mathscr{B}_n \backslash \mathscr{P}_n$, alors $\inf\limits_{M \in \mathscr{B}_n} \varphi(M) < \varphi(N)$ pour tout $N \in \mathscr{P}_n$, en particulier $\varphi(A) < \varphi(B)$ l'inégalité est stricte.

Mais de la question précédente dont les conditions sont vérifiées, $A = \lambda_0 M_0 + \ldots + \lambda_s M_s$ les $M_i \in \mathscr{P}_n$, donc $\varphi(A) = \sum\limits_{i=1}^{s} \lambda_i \varphi(M_i) \geq \sum\limits_{i=1}^{s} \lambda_i \varphi(B) = \varphi(B)$

Alors $\varphi(A) < \varphi(B)$ et $\varphi(B) \leq \varphi(A)$, absurde, donc $A \in \mathscr{P}_n$.

Remarque : On a $A \in \mathscr{P}_n$ et $\varphi(A) = \inf\limits_{M \in \mathscr{B}_n} \varphi(M) \leq \inf\limits_{M \in \mathscr{P}_n} \varphi(M) \leq \varphi(A)$, donc :

$$\inf_{M \in \mathscr{B}_n} \varphi(M) = \inf_{M \in \mathscr{P}_n} \varphi(M)$$

C. Inégalité de Hoffman-Wielandt

15) $\|PAQ\|^2 = \mathrm{tr}({}^tQ{}^tA{}^tPPAQ) = \mathrm{tr}({}^tQ{}^tAAQ) = \mathrm{tr}(Q{}^tQ{}^tAA) = \mathrm{tr}({}^tAA) = \|A\|^2$, d'où l'égalité demandée.

16) les matrices A et B sont symétriques réelles donc orthogonalement diagonalisables $\exists R, S \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et D_A, D_B deux matrices diagonales telles que $A = RD_A^t R$ et $B = SD_B^t S$, alors :

$\|A - B\|^2 = \left\|RD_A^t R - SD_B^t S\right\|^2 = \left\|{}^t R(RD_A^t R - SD_B^t S)S\right\|$ question précédente.

Donc $\|A - B\|^2 = \left\|D_A^t RS - {}^t RSD_B\right\|^2$. On prend $P = {}^t RS \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ car $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un groupe et ${}^t R = R^{-1}$.

17) Tout d'abord le terme général $R_{i,j} = (P_{i,j})^2 \geq 0$ de R.

Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\sum_{j=1}^{n} R_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} (P_{i,j})^2 = 1$, car c'est la norme du i ème vecteur ligne de P qui est orthogonal.

$\sum_{j=1}^{n} R_{j,i} = \sum_{j=1}^{n} (P_{j,i})^2 = 1$, car c'est la norme du i ème vecteur colonne de P qui est orthogonal.

Posons $D_A = (d_{i,j})$, alors $(D_A P)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} d_{i,k} P_{k,j} = \lambda_i(A) P_{i,j}$, de même $(PD_B)_{i,j} = P_{i,j} \lambda_j(B)$.

Or $\|A - B\|^2 = \sum_{i,j} (D_A P - PD_B)_{i,j}^2 = \sum_{i,j} (\lambda_i(A) - \lambda_j(B))^2 P_{i,j}^2$. ici on a utiliser le résultat suivant $\|A\| = \operatorname{tr}({}^t AA) = \sum_{i,j} A_{i,j}^2$.

Alors $\|A - B\|^2 = \sum_{i,j} (\lambda_i(A) - \lambda_j(B))^2 R_{i,j}$.

18) On a $\sum_{i,j} (\lambda_i(A) - \lambda_j(B))^2 R_{i,j} \geq \inf_{M \in \mathcal{B}_n} \sum_{i,j} M_{i,j} (\lambda_i(A) - \lambda_j(B))^2$.

En considérant φ la forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, définie par :

$$\varphi(M) = \sum_{i,j} M_{i,j} (\lambda_i(A) - \lambda_j(B))^2$$

Par application de la question 14) :

$$\inf_{M \in \mathcal{B}_n} \sum_{i,j} M_{i,j} (\lambda_i(A) - \lambda_j(B))^2 = \inf_{M \in \mathcal{P}_n} \sum_{i,j} M_{i,j} (\lambda_i(A) - \lambda_j(B))^2$$

Alors $\|A - B\|^2 \geq \min_{\sigma} \sum_{j=1}^{n} M_{\sigma(j)j} (\lambda_{\sigma(j)}(A) - \lambda_j(B))^2$ car lorsque $\sigma(j) \neq i$, $M_{i,j} = 0$.

Puisque $M_{\sigma(j)j} = 1$, alors : $\min_{\sigma} \sum_{j=1}^{n} (\lambda_{\sigma(j)}(A) - \lambda_j(B))^2 \leq \|A - B\|^2$.

19) Du théorème de Transfert, $E(|X-Y|^2)=\sum_{i,j}(a_i-b_j)^2P(X=a_i\bigcap Y=b_j)$

On pose R la matrice carrée d'ordre n définie par $R_{i,j}=nP(X=a_i\bigcap Y=b_j)\geq 0$, de plus $\sum_{i=1}^{n}nP(X=a_i\bigcap Y=b_j)=nP(Y=b_j)=1$ pour tout $j\in\{1,..,n\}$, et $\sum_{j=1}^{n}nP(X=a_i\bigcap Y=b_j)=nP(X=a_j)=1$ pour tout $i\in\{1,..,n\}$, alors R est bistochastique. de la question 14), $\exists M_\sigma\in\mathscr{P}_n$ telle que :
$\sum_{i,j}(a_i-b_j)^2nP(X=a_i\bigcap Y=b_j)\geq\sum_{j=1}^{n}R_{\sigma(j)j}(a_{\sigma(j)}-b_j)^2=\sum_{j}(a_{\sigma(j)}-b_j)^2$
Alors

$$E(|X-Y|^2)\geq\frac{1}{n}\sum_{j}^{n}(a_{\sigma(j)}-b_j)^2$$

Et puisque $(a_{(i)}-b_{(i)})^2+(a_{(i+1)}-b_{(i+1)})^2=(a_{(i)}-b_{(i+1)})^2+(a_{(i+1)}-b_{(i)})^2+2(b_{(i)}-b_{(i+1)})(a_{(i+1)}-a_{(i)})\leq(a_{(i)}-b_{(i+1)})^2+(a_{(i+1)}-b_{(i)})^2$
Alors

$$E(|X-Y|^2)\geq\frac{1}{n}\sum_{j}^{n}(a_{(j)}-b_{(j)})^2$$

conséquence $d^2(P_1,P_2)\geq\frac{1}{n}\sum_{j}^{n}(a_{(j)}-b_{(j)})^2$

D'autre part pour (X,Y) un couple de variable aléatoire dont la loi est donnée par $P(X=a_{(i)}\bigcap Y=b_{(j)})=\frac{\delta_{i,j}}{n}$, en remarquant que $P(Y=b_{(j)})=\sum_{i}\frac{\delta i,j}{n}=\frac{1}{n}=\sum_{j}\frac{\delta i,j}{n}=P(X=a_{(i)})$, alors $X\sim P_1$ et $Y\sim P_2$, et $E(|X-Y|^2)=\frac{1}{n}\sum_{j}^{n}(a_{(j)}-b_{(j)})^2$, alors $d^2(P_1,P_2)\leq\frac{1}{n}\sum_{j}^{n}(a_{(j)}-b_{(j)})^2$

Alors $d^2(P_1,P_2)=\frac{1}{n}\sum_{j}^{n}(a_{(j)}-b_{(j)})^2$

D'après la question 18), $\min_{\sigma}\sum_{j=1}^{n}|a_{\sigma(j)}-b_j|^2\leq\|A-B\|^2$.

Qui s'écrit aussi $\min_{\sigma}\sum_{j=1}^{n}|a_{\sigma((j))}-b_{(j)}|^2\leq\|A-B\|^2$.

Pour un choix d'une permutation on obtient $\sum_{j=1}^{n}|a_{(j)}-b_{(j)}|^2\leq\|A-B\|^2$

Donc $nd^2(P_1,P_2)\leq\|A-B\|^2$

Pour vos remarques ... sadikoulmeki@yahoo.fr