

A. Norme d'un opérateur d'une matrice

- 1) \mathbb{R}^n est de dimension finie, il suffit donc de montrer que S^{n-1} est un fermé borné.

L'application $\varphi, x \mapsto \|x\|$ est 1 lipchitzienne, donc continue, et $S^{n-1} = \varphi^{-1}([-\infty, 1])$ est un fermé, $\forall x \in S^{n-1}, \|x\| \leq 1$, donc S^{n-1} est borné.

L'application $\varphi, x = {}^t(x_1, \dots, x_n) \mapsto \|Mx\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n M_{i,j} x_j \right)^2}$ est continue sur \mathbb{R}^n comme composée d'une fonction polynômiale et de la fonction $\sqrt{\cdot}$ qui sont continues, φ est alors continue. Comme $\{\|Mx\|, x \in S^{n-1}\} = \varphi(S^{n-1})$ qui est l'image directe d'un compacte par une application continue, donc $\{\|Mx\|, x \in S^{n-1}\}$ est un compacte de \mathbb{R} , alors : $\max\{\|Mx\|, x \in S^{n-1}\}$ existe, on note ce nombre $\|M\|_{op}$.

- 2) Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :

Si $\|M\|_{op} = 0$, alors $\forall x \in S^{n-1}; \|Mx\| = 0$, alors $Mx = 0$ car $\|\cdot\|$ est une norme sur \mathbb{R}^n .

Soit maintenant $x \in \mathbb{R}^n$, alors si $x \neq 0$, $\frac{x}{\|x\|} \in S^{n-1}$, alors $M \frac{x}{\|x\|} = 0$, M est linéaire donc $Mx = 0$, et $M0 = 0$, donc $\forall x \in \mathbb{R}^n, Mx = 0$, c'est à dire $M = 0$.

$\|\lambda M\|_{op} = \max\{\|\lambda Mx\|, x \in S^{n-1}\} = |\lambda| \max\{\|Mx\|, x \in S^{n-1}\} = |\lambda| \|M\|_{op}$.

Soit $x \in S^{n-1}, \|(M+N)x\| \leq \|Mx\| + \|Nx\| \leq \|M\|_{op} + \|N\|_{op}$, alors :

$\|M+N\|_{op} = \max\{\|(M+N)x\|, x \in S^{n-1}\} \leq \|M\|_{op} + \|N\|_{op}$

Pour $x \neq y \in \mathbb{R}^n, \frac{x-y}{\|x-y\|} \in S^{n-1}$, donc $\left\| M \frac{x-y}{\|x-y\|} \right\| \leq \|M\|_{op}$, alors $\|Mx - My\| \leq \|M\|_{op} \|x - y\|$, égalité évidente pour $x = y$.

- 3) M est symétrique réelle donc il existe une base $\mathcal{B}(v_1, \dots, v_n)$ orthonormée de \mathbb{R}^n formée de vecteurs propres de M , et soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres associées.

Soit $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \in S^{n-1}$, alors $Mx = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i v_i$, par conséquent si on pose $\lambda = \max\{|\lambda_i|, 1 \leq i \leq n\}$, on a :

$$\|Mx\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\alpha_i \lambda_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda^2 \alpha_i^2} \leq \lambda \sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2}$$

Mais $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2} = 1$, donc, $\|Mx\| \leq \lambda$

D'autre part, $\exists x_0 \in \mathbb{R}^n$, tel que $\|Mx_0\| = \lambda$, alors :

$\|Mx\| \leq \lambda = \|Mx_0\| \leq \max\{\|Mx\|, x \in S^{n-1}\} = \|M\|_{op}$. d'où

$\max\{\|Mx\|, x \in S^{n-1}\} \leq \lambda \leq \max\{\|Mx\|, x \in S^{n-1}\}$, alors l'égalité.

- 4) Le rang de J est 1, donc 0 est une valeur propre de J de multiplicité au moins $n - 1$, or sa trace est n , donc 0 est valeur propre de J et l'espace propre associé est de dimension $n - 1$ qui est l'hyperplan d'équation $x_1 + \dots + x_n = 0$, et n est la 2ème valeur propre de J et l'espace propre associé est de dimension 1 qui est $Vect(1, \dots, 1)$.

J est symétrique réelle, par application de la question précédente :

$\|M\|_{op} = n$ la plus grande valeur propre en valeur absolue.

- 5) On a $\forall x \in S^{n-1}$, $\|Mx\| \leq \|M\|_{op}$, pour $x = {}^t(0, \dots, 1, \dots, 0)$ le 1 dans la j ème

place, alors $\|Mx\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (M_{i,j})^2} \geq |M_{i,j}|$ pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Alors $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$, $|M_{i,j}| \leq \|M\|_{op}$, donc :

$$\max\{|M_{i,j}|, 1 \leq i, j \leq n\} \leq \|M\|_{op}$$

- 6) Soient $x = {}^t(x_1, \dots, x_n) \in S^{n-1}$, alors :

$$\begin{aligned} \|Mx\| &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n M_{i,j} x_j \right)^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_j^2 \sum_{j=1}^n M_{i,j}^2} \quad \text{Inégalité de Cauchy chwartz} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{i,j}^2} \quad \text{car } x \in S^{n-1} \end{aligned}$$

Si l'inégalité précédente est une égalité alors l'inégalité de Cauchy est une égalité donc ${}^t(x_1, \dots, x_n)$ et ${}^t(M_{i,1}, \dots, M_{i,n})$ sont liés pour tout $1 \leq i \leq n$. alors le rang de M est inférieur ou égal à 1.

Réciproquement :

Cas1) : si $\text{rang} M = 0$, alors $M = 0$ est l'égalité est vrai,

Cas2) : si le rang de M est 1, alors $\exists {}^t(\ell_1, \dots, \ell_n)$ vecteur non nul et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $(\ell_1 \lambda_i, \dots, \ell_n \lambda_i)$ représente la i ème ligne de M , alors pour ${}^t(x_1, \dots, x_n) \in S^{n-1}$

Donc $\|M\|_{op} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n \lambda_j^2 \sum_{i=1}^n \ell_i^2}$, mais pour $x = \frac{\ell}{\|\ell\|}$, on a :

$$\|Mx\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \lambda_j \ell_i x_i \right)^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^n \lambda_j^2 \sum_{i=1}^n \ell_i^2} \text{ et } \|Mx\| \leq \|M\|_{op}.$$

Donc $\|M\|_{op} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n \lambda_j^2 \sum_{i=1}^n \ell_i^2} \leq \|M\|_{op}$, cqfd

7) Soit $M \in \Sigma_n$.

De la question 6) on a $\|M\|_{op} \leq \sqrt{\sum_{1 \leq i, j \leq n} M_{i,j}^2} \leq \sqrt{\sum_{1 \leq i, j \leq n} 1} = n$.

Supposons que $\|M\|_{op} = n$, alors $\|M\|_{op} = \sqrt{\sum_{1 \leq i, j \leq n} M_{i,j}^2}$, d'après toujours la question 6) le rang de M est inférieur ou égal à 1, de plus si on suppose $\exists i, j \in \{1, \dots, n\}$ tel que $|M_{i,j}| < 1$, alors, $\sqrt{\sum_{1 \leq i, j \leq n} M_{i,j}^2} < n$ ce qui est absurde, alors : $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$, $|M_{i,j}| = 1$, et $\text{rang} M = 1$.

Réciproquement si $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$; $|M_{i,j}| = 1$, et le rang de M est 1 on a

bien pour tout $x = {}^t(x_1, \dots, x_n) \in S^{n-1}$, $\|Mx\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n M_{i,j} x_j \right)^2}$.

Pour $x = \frac{1}{\sqrt{n}} {}^t(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in S^{n-1}$ où $\varepsilon_i =$ le signe de $M_{1,i}$, donc $\left(\sum_{j=1}^n M_{1,j} x_j \right)^2 = \frac{n^2}{n}$, or le rang de M est 1 donc toutes ses lignes sont à un signe près de la première donc le nombre $\left(\sum_{j=1}^n M_{i,j} x_j \right)^2$ est constant pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

alors $\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n M_{i,j} x_j \right)^2} = n$.

Donc $\|M\|_{op} \leq n = \|Mx\| \leq \|M\|_{op}$, alors $\|M\|_{op} = n$.

D'où l'équivalence suivante Pour $M \in \Sigma_n$:

$\|M\|_{op} = n \iff \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, |M_{i,j}| = 1$, et le rang de M est 1 .

Pour construire ce genre de matrices, il suffit de choisir la première ligne avec des 1 ou des (-1) il y'a donc 2^n méthodes, et pour choisir ses lignes restantes qui sont à signes près de la première ligne, donc il y'a 2^{n-1} méthodes pour le faire, alors pour choisir toute la matrice par le principe des Bergers il y'a $(2^n \cdot 2^{n-1}) = 2^{2n-1}$ méthodes.

B. Variables aléatoires sous-gaussiennes

8) Soit $t \in \mathbb{R}$, $\cosh(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \frac{(t^2/2)^n}{(2n)!}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\frac{2^n}{(n+1)(n+2)\dots(2n)} \leq 1$. Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \frac{(t^2/2)^n}{(2n)!} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(t^2/2)^n}{n!} = e^{\frac{t^2}{2}}$.

Alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $\cosh(t) \leq e^{\frac{t^2}{2}}$

9) $\frac{1+x}{2}$ et $\frac{1-x}{2} \in [-1, 1]$ et $\frac{1+x}{2} + \frac{1-x}{2} = 1$, de plus $\frac{1+x}{2}t + \frac{1-x}{2}(-t) = tx$, l'application \exp est convexe sur \mathbb{R} , donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \exp(tx) \leq \frac{1+x}{2} \exp(t) + \frac{1-x}{2} \exp(-t)$$

10) On $|X| \leq 1$ et $E(X) = 0$. De 9) on a $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} E(\exp(tX)) &\leq E\left[\frac{1+X}{2} \exp(t) + \frac{1-X}{2} \exp(-t)\right] \\ &\leq \frac{1+E(X)}{2} \exp(t) + \frac{1-E(X)}{2} \exp(-t) \text{ car } E \text{ est linéaire} \\ &\leq \frac{1}{2} \exp(t) + \frac{1}{2} \exp(-t) \text{ car } E(X) = 0 \\ &\leq \cosh(t) \\ &\leq e^{\frac{t^2}{2}} \text{ d'après Q8)} \end{aligned}$$

Donc X est 1-sous gaussienne.

On suppose que $\frac{|X|}{\alpha} \leq 1$, alors $\forall u \in \mathbb{R}$, $E(\exp(u \frac{X}{\alpha})) \leq \exp(\frac{u^2}{2})$, alors pour $u = t\alpha$, on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, E(\exp(tX)) \leq \exp(\frac{\alpha^2 t^2}{2}). \text{ cqfd}$$

11) Soit $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
 E(\exp(t \sum_{i=1}^n \mu_i X_i)) &= E\left(\prod_{i=1}^n \exp(t\mu_i X_i)\right) \\
 &= \prod_{i=1}^n E(\exp(t\mu_i X_i)) \text{ par indépendance des } X_i \\
 &\leq \prod_{i=1}^n \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2 \mu_i^2}{2}\right) \\
 &\leq \exp\left(\sum_{i=1}^n \frac{\alpha^2 t^2 \mu_i^2}{2}\right) \\
 &\leq \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right) \text{ car } \sum_{i=1}^n \mu_i^2 = 1
 \end{aligned}$$

Cqfd.

12) Soit $(x_i)_{i \in I}$ les valeurs possibles de X avec I dénombrable. Alors : $E(\exp tX) = \sum_{i \in I} \exp tx_i P(X = x_i)$

Soit $\lambda > 0$, posons $J = \{i \in I / x_i \geq \lambda\}$ et soit $i \in J$ et $t > 0$, alors :

$$\begin{aligned}
 tx_i \geq \lambda t &\implies \exp tx_i \geq \exp \lambda t \\
 &\implies \sum_{i \in J} e^{tx_i} P(X = x_i) \geq \sum_{i \in J} P(X = x_i) \exp \lambda t \\
 &\implies E(\exp tX) \geq \sum_{i \in J} \exp(tx_i) P(X = x_i) \geq P\left(\bigcup_{i \in J} X = x_i\right) \exp(\lambda t) \\
 &\implies E(\exp tX) \geq P(X \geq \lambda) \exp \lambda t
 \end{aligned}$$

Alors $P(X \geq \lambda) \leq E(\exp tX) \exp -\lambda t \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - \lambda t\right)$.

Remarque : On peut le faire directement, par application de l'inégalité de Markov,

Pour tout $t > 0$:

$$P(X \geq \lambda) = P(\exp tX \geq \exp t\lambda) \leq \frac{E(\exp tX)}{\exp t\lambda} \leq \frac{\exp \frac{\alpha^2 t^2}{2}}{\exp t\lambda} \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda\right)$$

On a $P(|X| \geq \lambda) = P(-X \geq \lambda) + P(X \geq \lambda)$ par incompatibilité.

Mais d'après la question 11) $-X$ est aussi α -sous gaussienne.

Donc $P(|X| \geq \lambda) \leq 2 \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - \lambda t\right)$ et ceci pour tout $t > 0$, par conséquent

$$P(|X| \geq \lambda) \leq \inf_{t > 0} 2 \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - \lambda t\right)$$

Une étude très simple à la fonction $t \rightarrow (\frac{\alpha^2 t^2}{2} - \lambda t)$ donne inf est atteint en $t = \frac{\lambda}{\alpha^2}$. Alors $P(|X| \geq \lambda) \leq 2 \exp \frac{-\lambda^2}{2\alpha^2}$.

13) On a $[X] \leq X < [X] + 1$.

Supposons que $E(X)$ est fini alors $E([X])$ est fini car $[X] \leq X$ et $[X]$ est à valeurs positives de plus $E([X]) \leq E(X)$.

Supposons que $E([X])$ est fini, alors $E(X)$ est fini car $X < [X] + 1$ et X est à valeurs positives.

On a $\forall k \in \mathbb{N}$, $([X] \geq k) = (X \geq k)$, et puisque $[X]$ est à valeurs dans \mathbb{N} ,

alors $E([X]) = \sum_{k=1}^{+\infty} P([X] \geq k) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k)$. les inégalités $[X] \leq X < [X] + 1$

donne $E([X]) \leq E(X) < E([X]) + 1$.

Alors $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k) \leq E(X) \leq 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k)$.

14) On a

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{\beta X^2}{2} \geq k\right) &\iff \frac{\beta^2 X^2}{2} \geq \ln k \\ &\iff X^2 \geq \frac{2 \ln k}{\beta^2} \\ &\iff |X| \geq \frac{\sqrt{2 \ln k}}{\beta} \end{aligned}$$

Donc $P(\exp(\frac{\beta X^2}{2} \geq k)) = P(|X| \geq \frac{\sqrt{2 \ln k}}{\beta}) \leq 2 \exp(\frac{-2 \ln k}{2(\alpha \beta)^2}) = 2k^{-\eta}$ par application de 12)

Si $\alpha \beta < 1$, alors $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^\eta}$ est convergente. donc la série : $\sum_{k \geq 1} P(\exp \frac{\beta^2 X^2}{2} \geq k)$ converge .

De la question 13) $E(\exp \frac{\beta^2 X^2}{2} \geq k)$ existe et $E(\exp \frac{\beta X^2}{2} \geq k) \leq 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} P(\exp(\frac{\beta^2 X^2}{2}) \geq k) \leq 1 + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^\eta} = 1 + 2\zeta(\eta)$.

C. Recouvrements de la sphère

15) On raisonne par l'absurde. Soit $a_0 \in K$, on a K n'est pas inclus la partie finie $B_{a_0, \frac{\epsilon}{2}}$, soit $a_1 \in K - B_{a_0, \frac{\epsilon}{2}}$, alors K n'est pas inclus la partie finie $B_{a_0, \frac{\epsilon}{2}} \cup B_{a_1, \frac{\epsilon}{2}}$, il existe $a_2 \in K - B_{a_0, \frac{\epsilon}{2}} \cup B_{a_1, \frac{\epsilon}{2}}$, et ainsi de suite pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $a_n \in K - \bigcup_{0 \leq k \leq n-1} B_{a_k, \frac{\epsilon}{2}}$.

La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite du compact K , donc d'après Bolzano-Weierstrass il existe une sous suite $(a_{\varphi(n)})_n$ qui converge vers $\ell \in K$.

D'autre part de la définition de $(a_n)_n$, on a $\forall i, j \in \mathbb{N}$, $\|a_i - a_j\| > \frac{\varepsilon}{2}$, en particulier $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|a_{\varphi(n)} - a_{\varphi(n+1)}\| > \frac{\varepsilon}{2}$, en tendant n vers l'infini on obtient $\|\ell - \ell\| \geq \frac{\varepsilon}{2}$, ce qui est absurde.

- 16)** Supposons que Λ est infini soit donc une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Lambda^{\mathbb{N}} \subset K^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \neq m \in \mathbb{N}$, $a_n \neq a_m$, donc $\|a_n - a_m\| > \varepsilon$.

K est un compact il existe une sous suite $(a_{\varphi(n)})_n$ qui converge vers $\ell \in K$. Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|a_{\varphi(n)} - a_{\varphi(n+1)}\| > \varepsilon$ car φ est strictement croissante, en tendant n vers l'infini on obtient $\|\ell - \ell\| \geq \frac{\varepsilon}{2}$, ce qui est absurde.

Λ est donc fini posons, $\Lambda = \{b_1, \dots, b_r\} \subset K \subset \bigcup_{a \in A} B_{a, \frac{\varepsilon}{2}}$.

$\forall j \in \{1, \dots, r\}$, $\exists a_j \in A$ tel que $b_j \in B_{a_j, \frac{\varepsilon}{2}}$, alors $\mathbf{Card} \Lambda \leq \mathbf{Card} A$.

On suppose que $\mathbf{Card} \Lambda = \mathbf{Card} A$ et que $K \not\subset \bigcup_{a \in \Lambda} B_{a, \varepsilon}$, il existe donc $b \in K$ et

$b \notin \bigcup_{a \in \Lambda} B_{a, \varepsilon}$, alors $\forall a \in \Lambda$, $\|b - a\| > \varepsilon$, en posant $\Lambda' = \Lambda \cup \{b\}$ de cardinal $1 + \mathbf{Card} A$ et il vérifie $\forall x, y \in \Lambda'$, $\|x - y\| > \varepsilon$, ceci contredit la maximalité de $\mathbf{Card} \Lambda$, alors

$$K \subset \bigcup_{a \in \Lambda} B_{a, \varepsilon}$$

- 17)** Ici $\Lambda \subset S^{n-1}$ telle que $\forall x \neq y \in \Lambda$, $\|x - y\| > \varepsilon$.

Soit $x \in B_{a, \frac{\varepsilon}{2}}$, alors $\|x - a\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, Donc $\|x\| \leq \|x - a\| + \|a\| \leq 1 + \frac{\varepsilon}{2}$. Alors $B_{a, \frac{\varepsilon}{2}} \subset B_{0, 1 + \frac{\varepsilon}{2}}$

Soient $a, b \in \Lambda$, alors $B_{a, \frac{\varepsilon}{2}} \cap B_{b, \frac{\varepsilon}{2}} = \emptyset$, en effet : si x est un élément commun alors $\|x - a\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et $\|x - b\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, donc $\|a - b\| \leq \|a - x\| + \|x - b\| \leq \varepsilon$, ce qui est en contradictoire avec $\|a - b\| > \varepsilon$.

Puisque $\bigcup_{a \in \Lambda} B_{a, \frac{\varepsilon}{2}} \subset B_{0, 1 + \frac{\varepsilon}{2}}$ et ce sont des compacts, alors $\mu(\bigcup_{a \in \Lambda} B_{a, \frac{\varepsilon}{2}}) \leq \mu(B_{0, 1 + \frac{\varepsilon}{2}})$, alors $\sum_{a \in \Lambda} \mu(B_{a, \frac{\varepsilon}{2}}) \leq \mu(B_{0, 1 + \frac{\varepsilon}{2}})$ par conséquent $\mathbf{Card} \Lambda \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^n \leq (1 + \frac{\varepsilon}{2})^n$, alors $\mathbf{Card} \Lambda \leq \left(\frac{2 + \varepsilon}{\varepsilon}\right)^n$.

- 18)** S^{n-1} est un compact de \mathbb{R}^n , de la question 16) il existe une partie fini $\Lambda_n \subset S^{n-1}$ telle que $S^{n-1} \subset \bigcup_{a \in \Lambda_n} B_{a, \frac{1}{2}}$.

Par application de la question 17) avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$, alors $\mathbf{Card} \Lambda_n \leq \left(\frac{2 + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)^n$

par conséquent $\text{Card}\Lambda_n \leq 5^n$.

D. Norme d'une matrice aléatoire

- 19) On a pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $y_i = \sum_{j=1}^n M_{i,j}^n x_j$, or $x \in S^{n-1}$, donc $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$, et par application de la question 11), la variable aléatoire y_i est α -sous-gaussienne, alors :

$$\begin{aligned} E\left(\exp(\gamma \|y\|^2)\right) &= E\left(\exp\left(\sum_{i=1}^n \gamma y_i^2\right)\right) \\ &= \prod_{i=1}^n E\left(\exp(\gamma y_i^2)\right) \text{ par indépendance des } y_i \\ &\leq \prod_{i=1}^n 5 \text{ par application de l'inégalité d'Orlicz} \\ &\leq 5^n \end{aligned}$$

On a par application de l'inégalité de Markov :

$$P(\|y\| \geq r\sqrt{n}) = P(\exp\gamma \|y\|^2 \geq \exp\gamma r^2 n) \leq \frac{E\left(\exp\gamma \|y\|^2\right)}{\exp\gamma r^2 n} \leq \left(5 \exp^{-\gamma r^2}\right)^n.$$

- 20) Montrons $\forall a \in \Lambda_n$, $(\|M^n\|_{op} \geq 2r\sqrt{n}) \subset \bigcup_{a \in \Lambda_n} (\|M^{(n)} a\| \geq r\sqrt{n})$.

Supposons que $\forall a \in \Lambda_n$, $\|M^n a\| < r\sqrt{n}$.

Pour $x \in S^{n-1}$, $\exists a \in \Lambda_n$; tel que $x \in B_{a, \frac{1}{2}}$, car $S^{n-1} \subset \bigcup_{a \in \Lambda_n} B_{a, \frac{1}{2}}$, donc $\|x - a\| \leq \frac{1}{2}$, ainsi :

$$\begin{aligned} \|M^n x\| &\leq \|M^n x - M^n a\| + \|M^n a\| \\ &\leq \|M^n\|_{op} \|x - a\| + \|M^n a\|, \text{ L'utilisation de la question 1)} \\ &< \frac{1}{2} \|M^n\|_{op} + r\sqrt{n} \text{ cette dernière inégalité est stricte} \end{aligned}$$

Donc $\|M^n\|_{op} < 2r\sqrt{n}$, donc tout élément qui n'appartient au 2ème événement n'appartient pas aussi au 1er événement, d'où l'inclusion demandée. On a alors $(\|M^n\|_{op} \geq 2r\sqrt{n}) \subset \bigcup_{a \in \Lambda_n} (\|M^{(n)} a\| \geq r\sqrt{n})$

$$\text{Alors } P\left(\|M^n\|_{op} \geq 2r\sqrt{n}\right) \leq P\left(\bigcup_{a \in \Lambda_n} (\|M^{(n)} a\| \geq r\sqrt{n})\right)$$

$$\text{Or } P\left(\bigcup_{a \in \Lambda_n} (\|M^{(n)} a\| \geq r\sqrt{n})\right) \leq \sum_{a \in \Lambda_n} P(\|M^{(n)} a\| \geq r\sqrt{n}) \leq \text{Card}\Lambda_n (5e^{-\gamma r^2})^n \leq (25e^{-\gamma r^2})^n$$

On a utilisé le fait que $\text{Card}\Lambda_n \leq 5^n$ et la question 19) avec $y = M^n a$ et $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$ inégalité valable aussi pour un nombre fini d'événement.

$$\text{Donc } P\left(\|M^n\|_{op} \geq 2r\sqrt{n}\right) \leq (25e^{-\gamma r^2})^n.$$

Pour vos remarques ...

sadikoulmeki@yahoo.fr