Mines MP 2014, Maths 2

A. Théorème du point fixe

1) Soit y un éventuel second point fixe de f. L'inégalité $\| f(x) - f(y) \| \leqslant k \, \| x - y \|$ entraîne alors $(1-k) \, \| x-y \| \leqslant 0$ et comme $1-k > 0$, cette majoration n'est possible que si $\| x-y \| = 0$, c'est-à-dire si $x = y$: le point fixe x est donc unique, sous réserve d'existence.

2) Pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, on a, par inégalité triangulaire :

$$\| x_{n+p} - x_n \| \leqslant \sum_{i=0}^{p-1} \| x_{n+i+1} - x_{n+i} \| .$$

Or, en utilisant $n+i$ fois la k-contractance de f,

$$\| x_{n+i+1} - x_{n+i} \| = \| f^{n+i}(x_1) - f^{n+i}(x_0) \| \leqslant k^{n+i} \, \| x_1 - x_0 \|,$$

d'où $\| x_{n+p} - x_n \| \leqslant \sum\limits_{i=0}^{p-1} k^{n+i} \, \| x_1 - x_0 \|$, soit encore

$$\| x_{n+p} - x_n \| \leqslant \frac{(1-k^p)k^n}{1-k} \, \| x_1 - x_0 \| \leqslant \frac{k^n}{1-k} \, \| x_1 - x_0 \|$$

vu que $0 \leqslant k < 1$. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} k^n = 0$ et que $\dfrac{\| x_1 - x_0 \|}{1-k}$ est une constante, on en déduit que

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geqslant n_0, \ \forall p \in \mathbb{N}, \quad \| x_{n+p} - x_n \| \leqslant \varepsilon.$$

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc de Cauchy.

3) E étant complet, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un certain $x \in E$. De plus, comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in A$ et que A est fermé, on a $x \in A$.
Enfin, f étant continue car k-lipschitzienne, il vient $f(x) = x$ en passant à la limite dans l'égalité $f(x_n) = x_{n+1}$.
On peut alors conclure que f possède un point fixe, nécessairement unique d'après le **1)**.

B. Invariance par homotopie

4) L'ensemble T n'est pas vide car il contient clairement 0 : en effet, f admet un point fixe donc il existe $x \in A$ tel que $x = h(0, x)$.

5) – $t_n \in T$ signifie qu'il existe $x_n \in A$ tel que $x_n = h(x_n, t_n)$, ce qui justifie l'existence d'une telle suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
– De plus, $\| x_n - x_m \| = \| h(x_n, t_n) - h(x_m, t_m) \|$, d'où

$$\| x_n - x_m \| \leqslant \| h(x_n, t_n) - h(x_n, t_m) \| + \| h(x_n, t_m) - h(x_m, t_m) \| \leqslant k' |t_n - t_m| + k \, \| x_n - x_m \|$$

par inégalité triangulaire puis en utilisant les propriétés $\boxed{\text{a}}$ et $\boxed{\text{b}}$.

Il en résulte que $(1-k) \, \| x_n - x_m \| \leqslant k' |t_n - t_m|$, d'où $\| x_n - x_m \| \leqslant \dfrac{k'}{1-k} |t_n - t_m|$ étant donné que $1-k > 0$.

6) – Comme $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers t, c'est une suite de Cauchy :

$$\forall \varepsilon >, \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ \forall n, m \geqslant n_0, \quad |t_n - t_m| \leqslant \varepsilon,$$

d'où $\forall n, m \geqslant n_0$, $\| x_n - x_m \| \leqslant \dfrac{k'}{1-k} \varepsilon$.

$\dfrac{k'}{1-k}$ étant une constante, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy à valeurs dans l'ensemble A, partie fermée d'un evn complet : elle converge donc vers un certain $\ell \in A$.

– Observons que h est continue. En effet, pour tous couples (x,t) et (y,u) de $A\times[0,1]$,

$$\|h(x,t)-h(y,u)\| \leqslant \|h(x,t)-h(y,t)\| \ + \ \|h(y,t)-h(y,u)\| \leqslant \ k\,\|x-y\| \ + k'|t-u|.$$

Il en résulte que $\|\,h(x,t)-h(y,u)\,\| \leqslant \max(k,k')\times\max\big(\ \|\,x-y\,\|, |t-u|\big)$, ce qui montre même que h est lipschitzienne de rapport $\max(k,k')$ (au sens de la norme produit de $E\times\mathbb{R}$).

– La continuité de h permet permet alors de passer à la limite dans l'égalité $x_n = h(x_n,t_n)$, ce qui donne $\ell = h(\ell,t)$ et établit que $t\in T$.

– On conclut alors que T est fermé par caractérisation séquentielle.

7) Si on avait $\mathrm{d}(x,\partial A)=0$, il existerait une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans ∂A telle que $x=\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$. Or $\partial A = \overline{A}\cap\overline{E\backslash A}$ est fermé (comme intersection de deux fermés) donc on aurait $x\in\partial A$, d'où $x\neq h(x,t)$ d'après la propriété $\boxed{\text{c}}$: contradiction.

8) D'après l'inégalité établie à la question **6)**,

$$\|x-h(y,u)\| = \|h(x,t)-h(y,u)\| \leqslant \ k\,\|x-y\| + k'|t-u|.$$

Les conditions de l'énoncé conduisent alors à $\|x-h(y,u)\| \leqslant kr + k'\varepsilon \leqslant kr+(1-k)r = r.$

9) Vérifions les hypothèses du théorème de Picard.

– $\overline{B}(x,r)$ est un fermé de l'espace de Banach E qui est en fait inclus dans A car $r<\mathrm{d}(x,\partial A)$. En effet, si $\overline{B}(x,r)$ contenait un élément y de $E\backslash A$, alors $\{x'\in[x,y]\ /\ [x,x']\subset A\}$ serait un segment (puisque A est fermé) de la forme $[x,z]$ avec $z\in A$ et, par définition de z, celui-ci serait adhérent à $E\backslash A$, d'où $z\in\partial A$ avec $\|x-z\|<r$: impossible.

– L'application $\varphi_u : y\longmapsto h(y,u)$ est définie de $\overline{B}(x,r)$ dans lui-même d'après le **8)**.

– φ_u est k-contractante. En effet, selon le $\boxed{\text{a}}$, $\forall y,y'\in\overline{B}(x,r)$,

$$\|\varphi_u(y)-\varphi_u(y')\| = \|h(y,u)-h(y',u)\| \leqslant \ k\,\|y-y'\|\ .$$

D'après le théorème de Picard, φ_u admet donc un unique point fixe ℓ.

Celui-ci appartient de plus à $\overset{\circ}{A}$ car si on avait $\ell\in\partial A$, on aurait $\ell\neq h(\ell,u)$ en vertu du $\boxed{\text{c}}$.

10) – Le fait que φ_u possède un point fixe signifie que $u\in T$.

La question précédente montre ainsi que $\forall t\in T,\ \exists\varepsilon>0\ /\ ]t-\varepsilon,\,t+\varepsilon[\cap[0,1]\subset T$. L'ensemble T est donc un voisinage de chacun des ses points pour la topologie induite sur $[0,1]$, donc un ouvert relatif à $[0,1]$.

– Soit $\tau=\sup T$: on a déjà $\tau\in T$ vu que T est fermé. De plus, si on avait $\tau<1$, alors il existerait $\varepsilon>0$ tel que $[\tau,\,\tau+\varepsilon[\subset T$ puisque T est un ouvert relatif à $[0,1]$, ce qui contredirait la définition de la borne supérieure.

– En conclusion, $\tau=1$ et, d'après le **9)**, $\varphi_1=g$ possède un unique point fixe qui, de plus, est intérieur à A.

11) Soit h l'application définie par $\forall(x,t)\in A\times[0,1],\ \ h(x,t)=tf(x)$. Alors h réalise une homotopie de l'application nulle vers f. Vérifions de plus les propriétés $\boxed{\text{a}}$, $\boxed{\text{b}}$ et $\boxed{\text{c}}$:

– $\forall x,y\in A,\ \forall t\in[0,1],\ \ \|h(x,t)-h(y,t)\| = t\,\|f(x)-f(y)\| \leqslant tk\,\|x-y\| \leqslant k\,\|x-y\|.$

– $\forall x\in A,\ \forall t,u\in[0,1],\ \ \|h(x,t)-h(x,u)\| = |t-u|.\|f(x)\| \leqslant k'|t-u|$ où k' désigne le réel $\sup\{\|f(z)\|,\ z\in A\}$ (qui est bien défini car $f(A)$ est borné).

– La propriété $\boxed{\text{f}}$ est équivalente à $\boxed{\text{c}}$ par définition de h.

D'après la question **10)**, f possède un unique point fixe, qui est de plus intérieur à A.

C. Étude de certains opérateurs à noyau

12) Pour tout $t \in [a,b]$,

$$|F(y)(t) - F(z)(t)| = \left|\int_a^b K(t,x)\big(f(x,y(x)) - f(x,z(x))\big)\,\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant \int_a^b |K(t,x)|.K_0.|y(x)-z(x)|\,\mathrm{d}x \qquad (\text{car } y(x)\in D \text{ et } z(x)\in D)$$

$$\leqslant \int_a^b |K(t,x)|.K_0.\,\|y-z\|\,\mathrm{d}x \leqslant \alpha K_0\,\|y-z\|\,.$$

Par définition de la norme $\|.\|$, il vient alors $\|F(y)-F(z)\| \leqslant \alpha K_0\,\|y-z\|$.

13) Vérifions les hypothèses de la question **11)** :

– A est une partie fermée non vide de E.

– Comme $k = \alpha K_0 < 1$, la fonction F est k-contractante d'après le **12)**.

– Le vecteur nul est intérieur à A (condition $\boxed{\text{d}}$).

– La fonction nulle z vérifie $\forall t \in [a,b],\ z(t) \in D$ donc, d'après le **12)** à nouveau,

$$\forall y \in A, \quad \|F(y)-F(z)\| \leqslant \alpha K_0\,\|y\|$$

si bien que $\|F(y)\| \leqslant \alpha K_0\,\|y\| + \|F(z)\|$.

Comme A est borné (et z fixé), il en est de même de $F(A)$, d'où la condition $\boxed{\text{e}}$.

– Pour tous $\varphi \in \partial A$ et $\lambda \in [0,1]$, $\varphi \neq \lambda F(\varphi)$ n'est autre que la condition $\boxed{\text{f}}$.

D'après le **11)**, on conclut que F possède un unique point fixe, qui est de plus intérieur à A.

D. Une généralisation

14) – X est non-vide : en effet, le vecteur nul 0_E appartient à X vu que $0_E = 0.f(0_E)$.

– Prouvons que X est fermé. Pour cela, considérons une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans X qui converge vers un certain $x \in E$ et montrons que $x \in X$. Déjà, $x \in A$ car $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in A$ et A est fermé.

Par définition, $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists t_n \in [0,1]\ /\ x_n = t_n f(x_n)$. Comme $[0,1]$ est un segment, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire une sous-suite $(t_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un certain $t \in [0,1]$. Par passage à la limite dans l'égalité $x_{\varphi(n)} = t_{\varphi(n)} f(x_{\varphi(n)})$ (garantie par la continuité de f), on en déduit que $x = tf(x)$, d'où $x \in X$.

Par caractérisation séquentielle, X est donc bien fermé.

– L'application μ est bien définie. En effet, si $x \notin \partial A$, alors $\mathrm{d}(x,\partial A) > 0$ (car ∂A est fermé) et si $x \in \partial A$, alors $x \notin X$ donc $\mathrm{d}(x,X) > 0$ (car X est fermé). Le dénominateur ne peut donc pas s'annuler.

– μ est continue comme rapport de deux telles applications. En effet, si Ω est une partie quelconque non vide de E, on montre classiquement que $x \longmapsto \mathrm{d}(x,\Omega)$ est 1-lipschitzienne.

– Enfin, si $x \in X$, alors $\mu(x) = 1$ et si $x \in \partial A$, on a $\mu(x) = 0$.

15) – g est continue sur $\overset{\circ}{A}$ comme produit de deux telles applications.

– Elle l'est évidemment sur $C\backslash A$, qui est un ouvert relatif de C.

– Le problème de continuité se pose donc seulement aux points de ∂A. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans C qui converge vers un certain $x \in \partial A$. Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) = g(x)$.

On a déjà $g(x_n) = 0$ pour les entiers n tels que $x_n \in C\backslash A$, d'où le résultat si on a $x_n \in C\backslash A$ à partir d'un certain rang.

Dans le cas général, soit $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ la sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ formée des éléments tels que

$x_{\varphi(n)} \in A$. Alors, $g(x_{\varphi(n)}) = \mu(x_{\varphi(n)})f(x_{\varphi(n)})$ a pour limite $\mu(x)f(x)$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_{\varphi(n)}) = 0$, ce qui achève la vérification de la continuité de g.

– Vérifions enfin la compacité de $\overline{g(C)}$.

En revenant à la définition, il s'agit de démontrer que, de toute suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\overline{g(C)}$, on peut extraire une sous-suite qui converge dans cet ensemble. Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists y_n \in g(C)$ / $\| y_n - z_n \| \leqslant \dfrac{1}{n}$, il suffit de montrer qu'il existe une sous-suite de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un élément de $\overline{g(C)}$.

Par définition de $g(C)$, il existe $x_n \in C$ tel que $y_n = g(x_n)$.

• S'il existe une infinité d'indices n tels que $x_n \in \overline{C\backslash A}$, alors on peut extraire de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite nulle, qui est bien une suite convergente dans $\overline{g(C)}$.

• Sinon, on a $y_n = \mu(x_n)f(x_n)$ pour n assez grand. La suite $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $f(A)$ donc dans le compact $\overline{f(A)}$: on peut donc en extraire une sous-suite $\big(f(x_{\varphi(n)})\big)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $\overline{f(A)}$.

De plus, $\big(\mu(x_{\varphi(n)})\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle à valeurs dans le segment $[0,1]$: une nouvelle extraction conduit à une sous-suite $\big(\mu(x_{\psi(n)})\big)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente dans $[0,1]$. La suite $\big(\mu(x_{\psi(n)})f(x_{\psi(n)})\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors vers un élément de $\overline{g(C)}$, ce qui permet de conclure sur la compacité de $\overline{g(C)}$.

16) La fonction g précédente satisfait les hypothèses du théorème de Schauder, donc possède un point fixe x.

– Si $x = 0$, alors 0 est point fixe de f et est bien intérieur à A.

– Sinon, on a $x \in A$ et $\mu(x)f(x) = x$ donc $x \in X$ étant donné que $\mu(x) \in [0,1]$. Mais dans ces conditions, $\mu(x)$ vaut alors 1, d'où $f(x) = x$. De plus, x est intérieur à A, car dans le cas contraire, on aurait $x \in \partial A$, d'où $\mu(x) = 0$: impossible.

E. Application aux intégrales de Fredholm

17) – Pour tout $t \in [0,1]$ on a, par croissance de l'intégrale puis par l'inégalité de Schwarz :

$$\begin{aligned} |F(\varphi)(t)| &\leqslant \| h \|_0 + \int_0^1 |K(t,x)|.|g(x,\varphi(x))| \,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \| h \|_0 + \sqrt{\int_0^1 K^2(t,x)\,\mathrm{d}x} \times \sqrt{\int_0^1 g^2(x,\varphi(x))\,\mathrm{d}x}. \end{aligned}$$

En posant $c_\varphi = \sqrt{\displaystyle\int_0^1 g^2(x,\varphi(x))\,\mathrm{d}x}$, on obtient l'inégalité $|F(\varphi)(t)| \leqslant \| h \|_0 + c_\varphi \, \| K_t \|_2$ d'où on tire $|F(\varphi)(t)| \leqslant \| h \|_0 + c_\varphi.\sup\{\| K_s \|_2,\ s \in [0,1]\}$ (la borne supérieure existant bien par continuité de $t \longmapsto K_t$ définie sur le segment $[0,1]$ et à valeurs dans L^2).

– De même, pour tous $t,u \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} |F(\varphi(t) - F(\varphi)(u)| &\leqslant |h(t) - h(u)| + \int_0^1 |K(t,x) - K(u,x)|.|g(x,\varphi(x))| \,\mathrm{d}x \\ &\leqslant |h(t) - h(u)| + c_\varphi \, \| K_t - K_u \|_2 \,. \end{aligned}$$

18) Fixons $u \in [0,1]$. D'après la condition $\boxed{\text{k}}$, l'application $t \longmapsto K_t$ est continue au point u, ce qui signifie, vu que l'espace d'arrivée est L^2, que $\lim\limits_{t\to u} \| K_t - K_u \|_2 = 0$. Par continuité de h, on en déduit que

$$\lim_{t\to u} \big(|h(t) - h(u)| \ + \ c_\varphi \, \| K_t - K_u \|_2 \,\big) \ = \ 0$$

vu que c_φ est une constante.
D'après la seconde inégalité du **17)**, la fonction $F(\varphi)$ est alors continue au point u et le choix arbitraire de u et de φ montre que F définit bien une application de E dans E.

19) Fixons $t \in [0,1]$. Alors $F(\varphi_n)(t) = h(t) + \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ avec $f_n(x) = K(t,x).g(x,\varphi_n(x))$.
La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers l'application $x \longmapsto K(t,x).g(x,\varphi(x))$ par convergence simple (et même uniforme) de la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et continuité de g. En outre, toutes ces fonctions sont continues (donc c.p.m.) sur $[0,1]$.
Notons de plus que toutes les fonctions φ_n sont à valeurs dans $[-M,M]$ vu que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\overline{B}(0,M)$.
L'application g étant continue sur $[0,1]\times[-M,M]$, elle est bornée (par un certain A) sur ce compact, ce qui conduit à l'hypothèse de domination

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1], \qquad |f_n(x)| \ \leqslant \ \| K_t \|_0 \times A$$

et la fonction constante $x \longmapsto \| K_t \|_0 \times A$ est intégrable sur $[0,1]$.
D'après le théorème de convergence dominée, on a alors

$$\lim_{n\to+\infty} F(\varphi_n)(t) \ = \ h(t) \ + \ \int_0^1 K(t,x).g(x,\varphi(x))\,\mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} F(\varphi_n)(t) \ = \ F(\varphi)(t)$. Le choix de t étant arbitraire, ceci établit bien la convergence simple de la suite $\big(F(\varphi_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $F(\varphi)$ sur $[0,1]$.

20) Observons, avec les notations du **19)**, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_{\varphi_n} = \sqrt{\displaystyle\int_0^1 g^2(x,\varphi_n(x))\,\mathrm{d}x} \leqslant A$.
Par uniforme continuité des fonctions h et $t \longmapsto K_t$ sur le segment $[0,1]$ (théorème de Heine),

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ / \ \forall t,u \in [0,1], \quad |t-u| \ < \ \delta \implies |h(t)-h(u)| < \frac{\varepsilon}{2} \ \text{ et } \ \| K_t - K_u \|_2 < \frac{\varepsilon}{2A}.$$

En utilisant la seconde inégalité du **17)**, il vient alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t,u \in [0,1], \quad |t-u| \ < \ \delta \implies \big|F(\varphi_n)(t) - F(\varphi_n)(u)\big| \ < \ \varepsilon.$$

21) Supposons que $\big(F(\varphi_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une certaine fonction G sur $[0,1]$.
– Vérifions tout d'abord que G est continue. Pour cela, reprenons le résultat du **20)** :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ / \ \forall t,u \in [0,1], \quad |t-u| \ < \ \delta \implies \forall n \in \mathbb{N},\ \big|F(\varphi_n)(t) - F(\varphi_n)(u)\big| \ < \ \varepsilon.$$

Par passage à la limite (pour $t,u \in [0,1]$ arbitrairement fixés tels que $|t-u| < \delta$), il vient $|G(t)-G(u)| \leqslant \varepsilon$ d'où, en récapitulant les quantificateurs :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ / \ \forall t,u \in [0,1], \quad |t-u| \ < \ \delta \implies |G(t)-G(u)| \leqslant \varepsilon,$$

ce qui établit même l'uniforme continuité de G.
– Utilisons à présent l'indication (d'ailleurs évidente) de l'énoncé. Avec les notations précédentes, il existe $t_1, t_2, \ldots, t_N \in [0,1]$ tels que tout $u \in [0,1]$ appartienne à l'un des intervalles $]t_i-\delta,\ t_i+\delta[$.
Par convergence simple de $\big(F(\varphi_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ vers G, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant n_0,\ \forall i \in [\![1,\ N]\!], \qquad |F(\varphi_n)(t_i) - G(t_i)| \ < \ \varepsilon.$$

Pour un choix de i tel que $u \in]t_i-\delta, t_i+\delta[$ on obtient, par inégalité triangulaire :

$$|F(\varphi_n)(u) - G(u)| \ \leqslant \ |F(\varphi_n)(u) - F(\varphi_n)(t_i)| \ + \ |F(\varphi_n)(t_i) - G(t_i)| \ + \ |G(t_i) - G(u)| \ \leqslant \ 3\varepsilon$$

d'après ce qui précède.
L'entier n_0 étant indépendant du choix de u, on conclut que
$$\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geqslant n_0, \quad \| F(\varphi_n) - G \|_0 \leqslant 3\varepsilon.$$
En d'autres termes, la suite $\big(F(\varphi_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers G dans l'espace E muni de la norme de la convergence uniforme.

– Or d'après la question **19)**, si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers φ dans E, alors la suite de fonctions $\big(F(\varphi_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $F(\varphi)$ sur $[0,1]$. Le raisonnement précédent montre alors que la convergence est uniforme, c'est-à-dire que $\big(F(\varphi_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $F(\varphi)$ dans E. On conclut alors que F est continue par caractérisation séquentielle.

22) – Considérons une partie dense dénombrable de $[0,1]$, par exemple l'ensemble $R = \{r_k, \ k \in \mathbb{N}\}$ des rationnels de $[0,1]$, et construisons pour commencer une sous-suite de $\big(F(\varphi_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge simplement sur R.
D'après l'inégalité $|F(\varphi_n)(t)| \leqslant \| h \|_0 + c_{\varphi_n}.\sup\{\| K_s \|_2, \ s \in [0,1]\}$ de la question **17)** et en reprenant les notations de la question **19)**, il vient
$$\forall t \in [0,1], \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad |F(\varphi_n)(t)| \leqslant \| h \|_0 + A.\sup\{\| K_s \|_2, \ s \in [0,1]\}.$$
En particulier, la suite réelle $\big(F(\varphi_n)(t)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée pour tout $t \in [0,1]$.

• Comme $\big(F(\varphi_n)(r_0)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, il existe une extraction θ_0 telle que $\big(F(\varphi_{\theta_0(n)})(r_0)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass.

• De même, on peut extraire de $\big(F(\varphi_{\theta_0(n)})(r_1)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $\big(F(\varphi_{\theta_0\circ\theta_1(n)})(r_1)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente et $\big(F(\varphi_{\theta_0\circ\theta_1(n)})(r_0)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge encore en tant que sous-suite d'une suite convergente.

• De proche en proche, on définit des extractions $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_p \ldots$ telles que
$$\big(F(\varphi_{\theta_0\circ\cdots\circ\theta_p(n)})(r_k)\big)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge pour tous } k, p \in \mathbb{N} \text{ tels que } k \leqslant p.$$
Par un "procédé diagonal", posons alors $\theta(p) = \theta_0 \circ \cdots \circ \theta_p(p)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. La suite $\big(\theta(p)\big)_{p\in\mathbb{N}}$ est alors strictement croissante et, d'après ce qui précède, $\big(F(\varphi_{\theta(p)})(r_k)\big)_{p\in\mathbb{N}}$ converge pour tout $k \in \mathbb{N}$.
On a ainsi établi la convergence simple de $\big(F(\varphi_{\theta(p)})\big)_{p\in\mathbb{N}}$ sur R.

– Étendons pour finir le résultat à $[0,1]$ tout entier.
Soit t un réel donné de $[0,1]$ et $\varepsilon > 0$ fixé. Avec les notations du **20)**, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $|t - r_k| < \delta$. Pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, on commence par majorer $|F(\varphi_{\theta(p)})(t) - F(\varphi_{\theta(q)})(t)|$ par
$$|F(\varphi_{\theta(p)})(t) - F(\varphi_{\theta(p)})(r_k)| \ + \ |F(\varphi_{\theta(p)})(r_k) - F(\varphi_{\theta(q)})(r_k)| \ + \ |F(\varphi_{\theta(q)})(r_k) - F(\varphi_{\theta(q)})(t)|.$$
D'après la question **20)**, $|F(\varphi_{\theta(p)})(t) - F(\varphi_{\theta(p)})(r_k)| \leqslant \varepsilon$ et $|F(\varphi_{\theta(q)})(r_k) - F(\varphi_{\theta(q)})(r_k)| \leqslant \varepsilon$.
De plus, la convergence simple obtenue sur R entraîne l'existence d'un entier n_0 tel que $\forall p, q \geqslant n_0$, $|F(\varphi_{\theta(p)})(r_k) - F(\varphi_{\theta(q)})(r_k)| \leqslant \varepsilon$ (sens "facile" de la condition de Cauchy).
Il vient alors $\forall p, q \geqslant n_0$, $|F(\varphi_{\theta(p)})(t) - F(\varphi_{\theta(q)})(t)| \leqslant 3\varepsilon$, ce qui montre que $\big(F(\varphi_{\theta(p)})(t)\big)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy réelle, donc convergente (sens "difficile" de la condition de Cauchy).
On a donc bien démontré que $\big(F(\varphi_{\theta(p)})\big)_{p\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$.

23) Récapitulons les étapes précédentes.
– Pour toute suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A, la suite $\big(F(\varphi_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite qui converge simplement sur $[0,1]$.
– D'après le **21)**, cette sous-suite converge en fait dans E.
– Cela signifie précisément que $\overline{F(A)}$ est compact.
– Les conditions $\boxed{\text{g}}$ et $\boxed{\text{i}}$ étant vérifiées de manière immédiate (vu que $\varphi \in \partial A$ équivaut à $\| \varphi \|_0 = M$ pour cette dernière), la question **16)** permet alors de conclure sur l'existence d'un point fixe de F intérieur à A, c'est-à-dire de norme strictement inférieure à M.