A. Préliminaire sur la représentation ze^z dans $\mathbb{C}$

1)

$$\begin{aligned} ze^z = \omega &\iff Re^{i\theta}e^{R\cos\theta + iR\sin\theta} = re^{i\alpha} \\ &\iff Re^{R\cos\theta}e^{i(\theta+R\sin\theta)} = re^{i\alpha} \\ &\iff \begin{cases} Re^{R\cos\theta} &= r \\ \theta + R\sin\theta &\equiv \alpha\,[2\pi] \end{cases} \end{aligned}$$

2) $\lim\limits_{\theta\to 0^+} \varphi(\theta) = +\infty$ et $\lim\limits_{\theta\to\pi^-} \varphi(\theta) = 0$ car $\alpha - \theta > 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$.
φ étant continue sur $]0,\pi[$, alors $\varphi(]0,\pi[) =]0,+\infty[$, et $r > 0$ possède au moins un antécédent $\theta \in]0,\pi[$.

3) 0 est l'antécédent du nombre complexe 0 par g.
Supposons que $\omega \in \mathbb{C}^*$, son antécédent z par g s'il existe est $\neq 0$, on peut mettre z et ω sous la forme $z = Re^{i\theta}$, $\omega = re^{i\alpha}$ les inconnues sont $R > 0$ et $\theta \in]0,\pi[$.
$ze^z = \omega$ est équivalente à $\begin{cases} Re^{R\cos\theta} &= r \\ \theta + R\sin\theta &\equiv \alpha\,[2\pi] \end{cases}$
$\exists\theta \in]0,\pi[$ tel que $\varphi(\theta) = r$ c'est la question précédente. Posons alors $R = \dfrac{\alpha-\theta}{\sin\theta}$,
Ces deux réels vérifient bien le système précédent, par conséquent z existe et l'application g est surjective de D dans $\mathbb{C}$.

B. Représentation Ae^A d'un bloc de Jordan

4) Soit f l'endomorphisme canoniquement à N, alors $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$, donc $\exists x \in \mathbb{C}^n$ telle que $f^{n-1}(x) \neq 0$, supposons par l'absurde que la famille $(x, f(x), \dots f^{n-1}(x))$ est liée, soit donc les complexes $a_0, \dots, a_{n-1}$ non tous nuls tels que $\sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i f^i(x) = 0$, l'ensemble $J = \{i \in [0, n-1] \cap \mathbb{N} \mathbin{/} a_i \neq 0\}$ est non vide et soit j son plus petit élément.
L'égalité $\sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i f^i(x) = 0$ s'écrit $\sum\limits_{i=j}^{n-1} a_i f^i(x) = 0$, en composant par f^{n-j-1}, on obtient $a_j f^{n-1}(x) = 0$, alors $a_j = 0$ ce qui est absurde avec $j \in J$, la famille est donc libre.

5) La famille $(f^{n-1}(x), \ldots f(x), x)$ est libre c'est donc une base de $\mathbb{C}^n$.

La matrice de l'endomorphisme f dans cette base est $J_n(0)$, donc N est semblable à $J_n(0)$.

6) $J_n(0)$ et $-J_n(0)$ commutent donc $I_n = e^{J_n(0)-J_n(0)} = e^{J_n(0)}e^{-J_n(0)}$, ainsi $e^{J_n(0)}$ est inversible et $\left(e^{J_n(0)}\right)^{-1} = e^{-J_n(0)}$.

$e^{J_n(0)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(J_n(0))^k}{k!}$ car $J_n(0)$ est nilpotente d'indice n d'après la question 5) .

Alors $e^{J_n(0)}$ est un polynôme en $J_n(0)$ donc commutent avec $J_n(0)$, alors $(J_n(0)e^{J_n(0)})^n = (J_n(0))^n (e^{J_n(0)})^n = 0$.

Si on suppose que $(J_n(0)e^{J_n(0)})^{n-1} = 0$ alors $(J_n(0))^{n-1}(e^{J_n(0)})^{n-1} = 0$ et comme $e^{J_n(0)}$ est inversible alors $(J_n(0))^{n-1} = 0$, absurde : donc $J_n(0)e^{J_n(0)}$ est nilpotente d'indice n.

7) $Pe^{J_n(0)}P^{-1} = P\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(J_n(0))^k}{k!}P^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} P\frac{(J_n(0))^k}{k!}P^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(PJ_n(0)P^{-1})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(PJ_n(0)P^{-1})^k}{k!} = e^{PJ_n(0)P^{-1}}$.

Si $\overline{N}$ existe alors elle est nilpotente d'indice n, simple à vérifier ($e^{\overline{N}}$ est inversible et son inverse est $e^{-\overline{N}}$).

Donc $\overline{N}$ est semblable à $J_n(0)$, alors il existe P inversible de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $\overline{N} = PJ_n(0)P^{-1}$, l'inconnue devient P.

L'équation $\overline{N}e^{\overline{N}} = J_n(0)$ est équivalente à $PJ_n(0)P^{-1}Pe^{J_n(0)}P^{-1} = J_n(0)$ c'est à dire $PJ_n(0)e^{J_n(0)}P^{-1} = J_n(0)$, de la question 6) la matrice $J_n(0)e^{J_n(0)}$ est nilpotente d'indice n, donc semblable à $J_n(0)$ alors P existe.

8) Avec la partie A) question 3, il existe $\mu \in D$, tel que $g(\mu) = \lambda$, c'est à dire $\mu e^{\mu} = \lambda$, le réel $\mu \neq 0$ donc μ appartient au demi plan ouvert $\{z \in \mathbb{C}\ \Re(z) > 0\}$, alors $\mu \neq -1$.

$$J_n(\mu)e^{J_n(\mu)} = (\mu I_n + J_n(0))e^{\mu I_n + J_n(0)} = \mu e^{\mu}e^{J_n(0)} + J_n(0)e^{\mu}e^{J_n(0)} =$$
$$\mu e^{\mu}\left(I_n + J_n(0) + (J_n(0))^2\sum_{k=2}^{n-1}\frac{(J_n(0))^{k-2}}{k!}\right) + J_n(0)e^{\mu}\left(I_n + J_n(0)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(J_n(0))^{k-1}}{k!}\right)$$
$$= \lambda I_n + (\mu+1)e^{\mu}J_n(0) + (J_n(0))^2\left(\mu e^{\mu}\sum_{k=2}^{n-1}\frac{(J_n(0))^{k-2}}{k!} + e^{\mu}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(J_n(0))^{k-1}}{k!}\right)$$

Avec $P(X) = \left(\mu e^{\mu}\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1}\frac{X^{k-2}}{k!} + e^{\mu}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{X^{k-1}}{k!}\right)$ le résultat est vrai.

9) $((\mu+1)e^{\mu}J_n(0) + (J_n(0))^2P(J_n(0)))^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}((\mu+1)e^{\mu}J_n(0))^k(J_n(0))^{2n-2k}(P(J_n(0))^{n-k}$

Le nombre $2n-2k+k=2n-k\geq n$ pour tout $k\in[0,n]\cap\mathbb{N}$, donc cette somme est nulle puisque tous ses termes sont nuls.

$$((\mu+1)e^{\mu}J_n(0)+(J_n(0))^2P(J_n(0)))^{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}((\mu+1)^ke^{k\mu}(J_n(0))^{2n-2-k}(P(J_n(0))^{n-k}$$

Tous les termes de la somme sont nuls sauf le terme qui correspond à $k=n-1$ et $(J_n(0))^{n-1}P(J_n(0))\neq 0$, en effet la matrice $P(J_n(0))$ est triangulaire supérieure et le terme de sa diagonale est $\mu e^{\mu}+e^{\mu}=(\mu+1)e^{\mu}\neq 0$ (c'est le cœfficient constant du polynôme P), donc inversible.

Alors la matrice $(\mu+1)e^{\mu}J_n(0)+(J_n(0))^2P(J_n(0))$ est nilpotente d'ordre n. donc semblable à $J_n(0)$, donc $\exists Q\in\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$(\mu+1)e^{\mu}J_n(0)+(J_n(0))^2P(J_n(0)=QJ_n(0)Q^{-1}$.

Alors $J_n(\mu)e^{J_n(\mu)}=\lambda I_n+QJ_n(0)Q^{-1}=Q(\lambda I_n+J_n(0))Q^{-1}=QJ_n(\lambda)Q^{-1}$

Donc $J_n(\lambda)=Q^{-1}J_n(\mu)QQ^{-1}e^{J_n(\mu)}Q=Q^{-1}J_n(\mu)Qe^{Q^{-1}J_n(\mu)Q}=Me^M$, avec $M=Q^{-1}J_n(\mu)Q$

C. Forme de Jordan d'une matrice nilpotente

10) Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice N, par la même méthode que celle de B.4), il existe $x\in\mathbb{C}^n$, telle que $(f^{p-1}(x),\dots,x)$ est libre, on la complète par le théorème de la base incomplète, en une base $\mathscr{B}'$, dans cette base la matrice de f est de la forme $A=\begin{pmatrix}J_p(0) & B\\ 0 & C\end{pmatrix}$.

Les matrices A et N sont donc semblables.

11) T_X est triangulaire supérieure et ses termes diagonaux sont tous égaux à 1, det $T_X=1$, donc inversible.

Le produit de T_X et de $\begin{pmatrix}I_p & -X\\ 0 & I_{n-p}\end{pmatrix}$ donne l'identité alors c'est son inverse.

$A'=T_XAT_X^{-1}=\begin{pmatrix}J_p(0) & -J_p(0)X+B+XC\\ 0 & C\end{pmatrix}$. On prend $Y=-J_p(0)X+B+XC$ et $X=Z$.

12) C'est simple de vérifier que $J_n(0)X=\begin{pmatrix}X_2\\ \vdots\\ X_n\\ 0\end{pmatrix}$, en posant $B=\begin{pmatrix}B_1\\ \vdots\\ \\ B_n\end{pmatrix}$ l'équation $Y=-J_p(0)X+B+XC$ peut se traduit par $\begin{cases}Y_1=-X_2+B_1+X_1C\\ \vdots\\ Y_{n-1}=-X_n+B_{n-1}+X_{n-1}C\\ Y_n=0+B_n+X_nC\end{cases}$

Soit $X_1 = 0$ par exemple, alors on peut choisir X_2 pour que $Y_1 = 0$.

X_2 est fixé alors on peut choisir X_3 pour que $Y_2 = 0$, et ainsi de suite jusqu'à obtenir X_{n-1}, on peut choisir X_n pour que $Y_{n-1} = 0$, conclusion on peut choisir X pour que $Y_1 = \dots = Y_{n-1} = 0$, ainsi le vecteur $Y = 0$ sauf éventuellement Y_n.

13) Les matrices N, A et A' sont semblables, donc A' est nilpotente, et si P est inversible telle que $N = PA'P^{-1}$, alors $\forall k \in \mathbb{N},\ N^k = 0 \Longleftrightarrow A'^k = 0$.

Alors A' est nilpotente d'indice n.

Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A' et $\mathscr{B}(e_1, \dots e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

Soit $i \in \{p+1, \dots, n\}$ posons $\text{vect}(e_{p+1}, \dots e_n) = F$. De la forme de A', on peut poser $f(e_i) = y_i e_p + x$, où $y_i \in \mathbb{C}$ et $x \in F$.

Par récurrence on montre que $\forall k \in \{1, \dots, p-1\} \quad f^k(F) \subset \text{vect}(e_{p-k+1}, \dots e_n)$, alors $f^p(e_i) = y_i f^{p-1}(e_p) + f^{p-1}(x)$ c'est à dire $0 = y_i e_1 + f^{p-1}(x)$, et $f^{p-1}(x) \in \text{vect}(e_2, \dots e_n)$, donc $y_i = 0$ par conséquent la dernière ligne $(y_{p+1}, \dots, y_n)$ de Y est nulle, alors $Y = 0$.

14) On raisonne par récurrence sur n.

Pour $n = 1$ rien à faire

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que le résultat est vrai pour toute matrice d'ordre n, soit $A \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'indice $p_1 \leq n+1$.

Si $p_1 = n+1$, on applique B.5), et A est semblable à $J_{n+1}(0)$.

Si $1 \leq p_1 < n+1$, des questions précédente A est semblable à A' qui de la forme $A' = \begin{pmatrix} J_{p_1}(0) & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$, comme A est nilpotente d'indice $n+1$, alors A' est nilpotente d'indice $n+1$, donc $C^{n+1} = 0$ ainsi C est nilpotente par ailleurs son ordre est $n+1-p_1 \leq n$, on applique l'hypothèse de récurrence sur C il existe $p_2, \dots, p_r$ des entiers naturels non nuls tels que C est semblable à

$$J = \begin{pmatrix} J_{p_2}(0) & & & (0) \\ & J_{p_3}(0) & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & J_{p_r}(0) \end{pmatrix}$$

Si Q désigne la matrice inversible telle que $C = QJQ^{-1}$, alors

$$A' = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{p_1}(0) & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$$

La matrice $\begin{pmatrix} J_{p_1}(0) & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}$ est de la forme donnée et elle est semblable à A. le résultat est donc vrai pour toute matrice A nilpotente.

D. Représentation Ae^A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$

15) $\chi_A = \prod_{k=1}^{s}(\lambda_k - X)^{\alpha_k}$, le théorème de cayley Hamilton et le théorème de décomposition des noyaux donne :

$$\mathbb{C}^n = \ker\theta = \bigoplus_{k=1}^{s}\ker(f - \lambda_k id_{\mathbb{C}^n})^{\alpha_k} = \bigoplus_{k=1}^{s} F_k$$

Les espaces F_k sont tous stable par f car f et $(f-\lambda_k id_{\mathbb{C}^n})^{\alpha_k}$ commutent, si on considère f_k la restriction de f sur F_k, alors f_k est nilpotent, en effet :
Pour k fixé entre 1 et s, Soit $x \in \ker(f - \lambda_k id_{\mathbb{C}^n})^{\alpha_k}$, alors
$(f - \lambda_k id_{\mathbb{C}^n})^{\alpha_k}(x) = 0$ qui se traduit par $(f_k - \lambda_k id_{F_k})^{\alpha_k}(x) = 0$ donc $f_k - \lambda_k id_{F_k}$ est nilpotent.
Si N_k est la matrice de $f_k - \lambda_k id_{F_k}$ dans une base $\mathscr{B}_k$ de F_k.
On a $f_k = \lambda_k id_{F_k} + f_k - \lambda_k id_{F_k}$, alors la matrice de f_k dans la base $\mathscr{B}_k$ est $\lambda_k I_{\alpha_k} + N_k$.
La matrice de f dans $\mathscr{B} = \bigcup_{k=1}^{n} \mathscr{B}_k$ adaptée à la décomposition précédente est de la forme demandé.

16) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ donné, par application de la question précédente A est semblable A'. Pour tout $i \in \{1,\dots,s\}$, la matrice N_i de la question précédente est nilpotente, on peut appliquer la question 14) donc semblable à $J_i = \begin{pmatrix} J_{p_1}(0) & & & (0) \\ & J_{p_2}(0) & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & J_{p_r}(0) \end{pmatrix}$ avec $p_1 + \dots p_r = \alpha_i$, donc $\lambda_i I_{\alpha_i} + J_i = \begin{pmatrix} J_{p_1}(\lambda_i) & & & (0) \\ & J_{p_2}(\lambda_i) & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & J_{p_r}(\lambda_i) \end{pmatrix}$, pour tout $j \in \{1,\dots,r\}$, $\exists M_j \in \mathscr{M}_{p_j}(\mathbb{C})$ telle que $J_{p_j}(\lambda_i) = M_j e^{M_j}$ et ceci par application de la question 9), alors :

$$\lambda_i I_{\alpha_i} + J_i = \begin{pmatrix} M_1e^{M_1} & & & (0) \\ & M_2e^{M_2} & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & M_re^{M_r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 & & & (0) \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & M_r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{M_1} & & & (0) \\ & e^{M_2} & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & e^{M_r} \end{pmatrix}$$

Si on pose $L_i = \begin{pmatrix} M_1 & & & (0) \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & M_r \end{pmatrix}$ alors $e^{L_i} = \begin{pmatrix} e^{M_1} & & & (0) \\ & e^{M_2} & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & e^{M_r} \end{pmatrix}$, alors $\lambda_i I_{\alpha_i} + J_i = L_i e^{L_i}$, par conséquent N_i est semblable à $L_i e^{L_i}$ le même processus donne A est semblable à $M' e^{M'}$ où $M' = \begin{pmatrix} L_1 & & & (0) \\ & L_2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & L_s \end{pmatrix}$.

$\exists P$ inversible telle que $A = PM'P^{-1}Pe^{M'}P^{-1} = Me^{M}$, avec $M = PM'P^{-1}$ la surjectivité de l'application en découle.

sadikoulmeki@yahoo.fr

FIN DU PROBLÈME