Corrigé Mines Ponts 2012-Filière -MP- mathématiques 1

Omar SADIK - Lycée Technique TAZA.

A. Équations algébriques réciproques

1^o. Posons $P_n(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_0$.

Alors $X^nP_n\left(\dfrac{1}{X}\right) = X^n\left(\dfrac{a_n}{X^n} + ... + \dfrac{a_1}{X} + a_0\right) = a_n + a_{n-1}X + ... + a_1X^{n-1} + a_0X^n \in \mathbb{R}_n[X]$

$u_n \circ u_n(P)(X) = u_n\left(X^nP\left(\dfrac{1}{X}\right)\right) = X^n\left(\dfrac{1}{X^n}P(X)\right) = P(X)$, Donc u_n est une symétrie.

2^o. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, posons $P = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_0$.

• $P \in \mathcal{P} \iff u_n(P)(X) = P(X) \iff a_n + a_{n-1}X + ... + a_0X^n = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_0 \iff \forall p \in [\![0, n]\!]\ a_{n-p} = a_p$.

Exemple : $2X^3 + 5X^2 + 5X + 2,\ -5X^4 + 8X^3 + \sqrt{2}X^2 + 8X - 5$.

• $P \in \mathcal{D} \iff u_n(P)(X) = -P(X) \iff a_n + a_{n-1}X + ... + a_0X^n = -a_nX^n - a_{n-1}X^{n-1} - ... - a_0 \iff \forall p \in [\![0, n]\!]\ a_{n-p} + a_p = 0$.

Exemple : $X^3 + 5X^2 - 5X - 1$

3^o. • Soit $P \in \mathcal{P}\bigcup\mathcal{D}$, et $x \in \mathbb{R}$ tel que $P(x) = 0$. Soit $m = \deg P$ alors P s'écrit $P = a_mX^m + ...a_0$, de la question précédente $a_m = a_0$ ou $a_m = -a_0$, donc $a_0 \neq 0$, ainsi 0 n'est pas racine de P, et $x^nP\left(\dfrac{1}{x}\right) = P(x)$ ou $x^nP\left(\dfrac{1}{x}\right) = -P(x)$ dans les deux cas $P\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ c-à-d $\dfrac{1}{x}$ est une racine de P.

• Supposons que $P \in \mathcal{D}$ alors $\forall p \in [\![0, m]\!], a_{m-p} + a_p = 0$

Si $m = 2k$, alors $P(1) = (a_{2k} + a_0) + (a_{2k-1} + a_1) + ... + (a_k + a_k) = 0$.

Si $m = 2k + 1$, alors $P(1) = (a_{2k+1} + a_0) + (a_{2k} + a_1) + ... + (a_{k+1} + a_k) = 0$.

• Supposons que $P \in \mathcal{P}$ alors $\forall p \in [\![0, m]\!], a_{m-p} = a_p$

Si $m = 2k + 1$, alors $P(-1) = (-a_{2k+1} + a_0) - (-a_{2k} + a_1) + ... + (-1)^k(-a_{k+1} + a_k) = 0$.

4^o. • Supposons que $Q, R \in \mathcal{P}\bigcup\mathcal{D}$, $p = \deg P, q = \deg Q,\ r = \deg R$, alors $q + r = p$, et $P(X) = Q(X)R(X) = \varepsilon X^qQ\left(\dfrac{1}{X}\right)\varepsilon' X^rR\left(\dfrac{1}{X}\right) = \varepsilon\varepsilon' X^{q+r}(QR)\left(\dfrac{1}{X}\right) = \varepsilon\varepsilon' X^pP\left(\dfrac{1}{X}\right)$. Donc $P \in \mathcal{P}\bigcup\mathcal{D}$.

• Supposons que $Q, P \in \mathcal{P}\bigcup\mathcal{D}$, alors $P(X) = \varepsilon X^pP\left(\dfrac{1}{X}\right)$, $Q(X) = \varepsilon' X^qQ\left(\dfrac{1}{X}\right)$ où $\varepsilon,\ \varepsilon' \in \{-1, 1\}$

$\varepsilon X^pP\left(\dfrac{1}{X}\right) = \varepsilon' X^qQ\left(\dfrac{1}{X}\right)R(X)$ et $P\left(\dfrac{1}{X}\right) = Q\left(\dfrac{1}{X}\right)R\left(\dfrac{1}{X}\right)$

$\varepsilon\varepsilon' X^rP\left(\dfrac{1}{X}\right) = Q\left(\dfrac{1}{X}\right)R(X)$ et $X^rP\left(\dfrac{1}{X}\right) = Q\left(\dfrac{1}{X}\right)X^rR\left(\dfrac{1}{X}\right)$

Q est un polynôme non nul et $(R(X) - \varepsilon\varepsilon' X^rR\left(\dfrac{1}{X}\right))Q\left(\dfrac{1}{X}\right) = 0$, alors le polynôme $R(X) - \varepsilon\varepsilon' X^rR\left(\dfrac{1}{X}\right)$ qui admet une infinité de racines est nul, c-à-d $R(X) = \varepsilon\varepsilon' X^rR\left(\dfrac{1}{X}\right)$.

• Si deux de ces polynômes sont des éléments de $\mathcal{P}$ ou à $\mathcal{D}$, le troisième est un élément de $\mathcal{P}$.

• Si l'un de ces polynômes est un élément de $\mathcal{P}$ et le deuxième est un élément de $\mathcal{D}$, le troisième est un élément de $\mathcal{D}$.

5^o. • $P \in \mathcal{P} \Longrightarrow (X - 1)P \in \mathcal{D}$, car $X - 1 \in \mathcal{D}$ et en utilisant la question précédente.

• Réciproquement, si $D \in \mathcal{D}$ de la question **3**, le nombre **1** est une racine de D, ainsi $\exists P \in \mathbb{R}[X] \,/\, D = (X - 1)P$ et de la question **4**, $P \in \mathcal{P}$.

6^o. • Soit $P \in \mathcal{P}$ de degré impair, alors -1 est racine de P question **3**. il existe $Q \in \mathbb{R}[X] \,/\, P = (X + 1)Q$, le polynôme $X + 1 \in \mathcal{P}$, alors $Q \in \mathcal{P}$.

• Réciproquement, si $Q \in \mathcal{P}$, alors $(X + 1)Q \in \mathcal{P}$.

7^o. Si $p = 0$ ou $p = 1$ rien à faire.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ supposons que la propriété est vrai à l'ordre p. et remarquons que $\left(X^p + \dfrac{1}{X^p}\right)\left(X + \dfrac{1}{X}\right) = X^{p+1} + \dfrac{1}{X^{p+1}} + X^{p-1} + \dfrac{1}{X^{p-1}}$

En appliquant l'hypothèse de récurrence $\exists \boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R} \in \mathbb{R}[X] /, \boldsymbol{X}^{p}+\dfrac{1}{\boldsymbol{X}^{p}}=\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{X}+\dfrac{1}{\boldsymbol{X}}\right), \boldsymbol{X}+\dfrac{1}{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{Q}\left(\boldsymbol{X}+\dfrac{1}{\boldsymbol{X}}\right)$ et $\boldsymbol{X}^{p-1}+\dfrac{1}{\boldsymbol{X}^{p-1}}=\boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{X}+\dfrac{1}{\boldsymbol{X}}\right)$

Le polynôme $\boldsymbol{PQ}-\boldsymbol{R}$ vérifie $\boldsymbol{X}^{p+1}+\dfrac{1}{\boldsymbol{X}^{p+1}}=(\boldsymbol{PQ}-\boldsymbol{R})\left(\boldsymbol{X}+\dfrac{1}{\boldsymbol{X}}\right)$. La récurrence s'applique.

• S'il existe un autre polynôme $\boldsymbol{Q}$ qui vérifie les mêmes conditions, alors $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{*}; \boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{x}+\dfrac{1}{\boldsymbol{x}}\right)=\boldsymbol{Q}\left(\boldsymbol{x}+\dfrac{1}{\boldsymbol{x}}\right)$, le polynôme $\boldsymbol{P}-\boldsymbol{Q}$, admet une infinité de racines, il est nul.

Des étapes précédentes $\deg \boldsymbol{P}=\boldsymbol{p}$.

8^{o}. • $\boldsymbol{R} \in \mathcal{P} \bigcup \mathcal{D}$, $\boldsymbol{R}(1) \neq 0$ et $\boldsymbol{R}(-1) \neq 0$, de la question **3**, $\boldsymbol{R} \notin \mathcal{D}$, alors $\boldsymbol{R} \in \mathcal{P}$ et le degré de $\boldsymbol{R}$ est pair.

Posons $\boldsymbol{R}=a_{2r}X^{2r}+\ldots+a_{0}=X^{r}\left[\left(a_{2r}X^{r}+\dfrac{a_{0}}{X^{r}}\right)+\ldots+\left(a_{r+1}X+\dfrac{a_{r-1}}{X}\right)+a_{r}\right]$

$=X^{r}\left[a_{2r}\left(X^{r}+\dfrac{1}{X^{r}}\right)+\ldots+a_{r+1}\left(X+\dfrac{1}{X}\right)+a_{r}\right]$ car $\forall p \in [\![0,2r]\!], a_{2r-p}=a_{p}$.

De la question **7**, $\forall q \in [\![0,r]\!], \exists P_{q} \in \mathbb{R}[X] / X^{q}+\dfrac{1}{X^{q}}=P_{q}\left(X+\dfrac{1}{X}\right)$, et $R(X)=\left(\sum_{q=0}^{r} a_{2r-q}P_{q}\right)\left(X+\dfrac{1}{X}\right)=X^{r}P\left(X+\dfrac{1}{X}\right)$.

Soit $x \in \mathbb{R}^{*}$. alors $R(x)=0 \iff P\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=0$.

• Si $\boldsymbol{P}$ est un polynôme qui vérifie l'équivalence précédente alors pour tout $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{*}$ les polynômes $\boldsymbol{\lambda P}$, $\boldsymbol{P}^{2}$ vérifient aussi l'équivalence : l'unicité du polynôme et de son degré est superflue.

B. Un problème de dénombrement

9^{o}. • $S_{i,j}=\left\{(u_{k})_{k\in\{0,1..,i\}} / u_{0}=1; u_{0}+u_{1}+\ldots+u_{i}=j\right\}$

$S'_{i,j}=\left\{(u_{k})_{k\in\{0,1..,i\}} / u_{0}=1; u_{0}+u_{1}+\ldots+u_{i}\leqslant j\right\}$ il apparaît que $S_{i,j} \subset S'_{i,j}$

• Soit $(u_{k})_{k\in\{0,1..,i\}} \in S'_{i,j}$, pour tout $k \in \{0,1..,i\}$, $u_{k} \leqslant u_{0}+u_{1}+\ldots+u_{i} \leqslant j$, les valeurs possibles de u_{k} sont dans l'ensemble $\{0,1..,j\}$, par suite $S_{i,j} \subset S'_{i,j} \subset \{0,1..,j\}^{i+1}$ qui est fini.

Posons $\varphi : S_{i+1,j} \longrightarrow S'_{i,j}$, $u \longmapsto u_{/\{0,1\ldots,i\}}$.

• Soit $u=(u_{k})_{k\in\{0,1..,(i+1)\}} \in S_{i+1,j}$ alors $u_{0}+u_{1}+\ldots+u_{i} \leqslant u_{0}+u_{1}+\ldots+u_{i}+u_{i+1}=j$ par suite $u'=(u_{k})_{k\in\{0,1..,i\}} \in S'_{i,j}$ et φ est bien définie.

• Soit $v=(v_{k})_{k\in\{0,1..,i\}} \in S'_{i,j}$, définissons $u=(u_{k})_{k\in\{0,1..,i+1\}} \in S_{i+1,j}$ de la façon suivante : $u_{0}=1$, $u_{1}=v_{1}$,...,$u_{i}=v_{i}$ alors $u_{0}+u_{1}+\ldots+u_{i}=v_{0}+v_{1}+\ldots+v_{i}\leqslant j$, en posant $u_{i+1}=j-u_{0}+u_{1}+\ldots+u_{i} \in \mathbb{N}$, alors $u_{0}+u_{1}+\ldots+u_{i}+u_{i+1}=j$, par suite $u \in S_{i+1,j}$ et $\varphi(u)=v$, l'application φ est surjective.

• Soient $u, u' \in S_{i+1,j} /\ \varphi(u)=\varphi(u')$ par définition de φ $\forall k \in \{0,1,\ldots,i\}, u_{k}=u'_{k}$. l'égalité $u_{0}+\ldots+u_{i+1}=j=u'_{0}+\ldots+u'_{i+1}$ implique $u_{i+1}=u'_{i+1}$ c-à-d $u=u'$ et φ est injective.

• Conclusion φ est une application bijective, les ensembles sont finis, alors Card $S_{i+1,j}=$ Card $S'_{i,j}$. c-à-d $s_{i+1,j}=s'_{i,j}$.

10^{o}. • $S'_{i,j+1}=\left\{(u_{k})_{k\in\{0,1..,i\}} / u_{0}=1; u_{0}+u_{1}+\ldots+u_{i}\leqslant j+1\right\}$

$S_{i,j+1}=\left\{(u_{k})_{k\in\{0,1..,i\}} / u_{0}=1; u_{0}+u_{1}+\ldots+u_{i}=j+1\right\}$

$S'_{i,j}=\left\{(u_{k})_{k\in\{0,1..,i\}} / u_{0}=1; u_{0}+u_{1}+\ldots+u_{i}\leqslant j\right\}$

Il est évident que $S'_{i,j+1}=S_{i,j+1}\bigcup S'_{i,j}$ et $S_{i,j+1}\bigcap S'_{i,j}$.

Alors $s'_{i,j+1}=s_{i,j+1}+s'_{i,j}$, et $s'_{i+1,j+1}=s_{i+1,j+1}+s'_{i+1,j}$

$=s'_{i,j+1}+s'_{i+1,j}$ de la question **9**

11^{o}. Soit $n \in \mathbb{N}^{*}$ $n \geqslant 2$, considérons l'hypothèse H_{n} $\ll$ $(i,j) \in [\![1,n-1]\!], / i+j=n, s'_{i,j}=\dbinom{i+j-1}{i}$ $\gg$.

• Montrons H_{n} par récurrence. Pour $n=2$; $s'_{1,1}=s_{2,1}=1=\dbinom{1}{1}$, car la seul famille qui appartient à $S_{2,1}$ est $(1,0,0)$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $n \geqslant 2$, et supposons que H_n est vrai à l'ordre n, et soit $(i,j) \in \mathbb{N}^{*2} \,/\, i+j = n+1$, alors $i + (j-1) = n$ et $(i-1)+j = n$, l'hypothèse de récurrence $s'_{i,j-1} = \begin{pmatrix} i+j-2 \\ i \end{pmatrix}$ et $s'_{i-1,j} = \begin{pmatrix} i+j-2 \\ i-1 \end{pmatrix}$
$s'_{i,j} = s'_{i-1,j-1} + s'_{i,j}$ question **10**
$= \begin{pmatrix} i+j-2 \\ i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i+j-2 \\ i-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i+j-1 \\ i \end{pmatrix}$.
- On conclut avec $\bigcup\limits_{\substack{n\in\mathbb{N}^* \\ n\geqslant 2}} \{(i,j) \in \mathbb{N}^{*2} \,/\, i+j = n\} = \mathbb{N}^{*2}$.
- La relation $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^{*2} \,/\, i \geqslant 2, s_{i,j} = s'_{i-1,j} = \begin{pmatrix} i+j-2 \\ i-1 \end{pmatrix}$ en découle de la question **9**.
- Cette même relation est encore valable pour $(i,j) \in \{1\} \times \mathbb{N}^*$. $s_{1,j} = 1$, la seule famille existant est $(1, j-1)$

C. Polynôme caractéristique d'un produit de matrices

12°. Si A est inversible, alors $\det(AB - \lambda I_n) = \det A \det(B - \lambda A^{-1}) = \det(B - \lambda A^{-1}) \det A = \det(BA - \lambda I_n)$.

13°. Dans le cas général, les valeurs propres de A sont en nombre finies, $\exists k_0 \in \mathbb{N}^* \,/\, k \geqslant k_0$; $\dfrac{1}{k}$ n'est pas une valeur propre, c-à-d $\det\left(A - \dfrac{1}{k} I_n\right) \neq 0$, la suite $\left(A - \dfrac{1}{k} I_n\right)_{k \geqslant k_0}$ formé de matrice inversible vérifie $\det\left(\left(A - \dfrac{1}{k} I_n\right) B - \lambda I_n\right) = \det\left(\left(A - \dfrac{1}{k} I_n\right) B - \lambda I_n\right)$ et ceci $\forall k \geqslant k_0$.
les applications $x \longmapsto \det\left((A - xI_n) B - \lambda I_n\right)$ et $x \longmapsto \det\left((A - xI_n) B - \lambda I_n\right)$ sont continues sur $\mathbb{R}$, en faisant tendre k vers l'infini, on obtient $\det(AB - \lambda I_n) = \det(BA - \lambda I_n)$.

D. Etude spectrale de certaines matrices

14°. Remarquons que $s_{i,j} = \begin{pmatrix} i+j-2 \\ i-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i+j-2 \\ j-1 \end{pmatrix} = s_{j,i}$, la matrice S est symétrique réelle, elle est diagonalisable **(Théorème spectrale)**
- Pour $n = 0$, $S = (s_{1,1}) = (1)$ rien à faire.
- Pour $n = 1$, $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\Phi_S = X^2 - 3X + 1 \in \mathcal{P}$; ses valeurs propres sont $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$, $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ et enfin $S = PDP^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$.
- Pour $n = 0$, $\Phi_S = 1 - X \in \mathcal{D}$.
$n = 1$, $\Phi_S = X^2 - 3X + 1 \in \mathcal{P}$.
$n = 2$ $\Phi_S = \begin{vmatrix} 1-X & 1 & 1 \\ 1 & 2-X & 3 \\ 1 & 3 & 6-X \end{vmatrix} = -X^3 + 9X^2 - 9X + 1 \in \mathcal{D}$.

15°. Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$.
- L'application $t \longmapsto P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
- $P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, ψ est bien définie.
- ψ est une application bilinéaire symétrique.
- $\psi(P,P) \geqslant 0$, car $P \in \mathbb{R}[X]$.
- $\psi(P,P) = 0 \Longrightarrow \forall t \in [0, +\infty[, P(t) = 0$, le polynôme P qui admet une infinité de racines est nul.
- Conclusion : ψ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

16°. • La formule de Taylor appliqué $P \in \mathbb{R}_n[X]$ nous donne $P = \sum\limits_{i=0}^{n} P^{(i)}(0) \dfrac{X^i}{i}$, alors la famille $\mathcal{B}$ est génératrice qui est en plus minimale c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
- $\Psi(B_i, B_j) = \dfrac{1}{i!j!} \Gamma(i+j+1) = \dfrac{(i+j)}{i!j!}$. Pour $(i,j) \in \mathbb{N}^{*2}$, $s_{i,j} = \begin{pmatrix} i+j-2 \\ i-1 \end{pmatrix} = \dfrac{(i+j-2)}{(i-1)!(j-1)!} = \Psi(B_{i-1}, B_{j-1})$.

• S est la matrice d'un produit scalaire : S est définie positive, et $\text{rang} S = n+1 = \text{rang} S'$, car la matrice S'_{n+1} s'en déduit de S_{n+2} par translation d'une ligne en haut et les $(n+1)$ colones de S'_{n+1} et S_{n+2} sont les mêmes [$s'_{i,j} = s_{i+1,j}$].

17°. • Par récurrence sur k, on vérifie que $f_i^{(k)} = P_k(t)\mathrm{e}^{-t}$ où P_k est un polynôme de degré k et le résultat $f_i^{(k)}(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^k}\right)$ en découle.

Remarque : Le polynome P_k admet 0 comme racines dans le cas où $k < i$.

• La formule de Leibnitz donne :

$$f_i^{(i)}(t)(t) = \sum_{p=0}^{i} \binom{i}{p} (t^i)^{(i-p)}(\mathrm{e}^{-t})^{(p)} = \sum_{p=0}^{i} \binom{i}{p} (-1)^p \frac{i!}{p!} t^p \mathrm{e}^{-t}, \text{ donc } (-1)^i \frac{f_i^{(i)}(t)(t)}{i!}\mathrm{e}^t = \sum_{p=0}^{i} \binom{i}{p} (-1)^{p+i} \frac{t^p}{p!}$$

18°. • Soient $i, j \in \mathbb{N}$ tels que $j \leqslant i$.

• $\Psi(L_i, B_j) = \displaystyle\int_0^{+\infty} L_i(t)B_j(t)\mathrm{d}t = \frac{(-1)^i}{i!}\int_0^{+\infty} f_i^{(i)} B_j(t)\mathrm{d}t = \frac{(-1)^i}{i!}[f_i^{(i-1)}(t)B_j(t)]_0^{t\to+\infty} - \frac{(-1)^i}{i!}\int_0^{+\infty} f_i^{(i-1)} B'_j(t)\mathrm{d}t.$

La question **17** et sa remarque montre que Le crochet est nul.

Ainsi une récurrence montre que $\Psi(L_i, B_j) = \displaystyle\int_0^{+\infty} L_i(t)B_j(t)\mathrm{d}t = \frac{(-1)^i}{i!}(-1)^j \int_0^{+\infty} f_i^{(i-j)}(t)\mathrm{d}t.$

• Si $j < i$, alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_i^{(i-j)}(t)\mathrm{d}t = [f_i^{(i-j-1)}(t)]_0^{t\to+\infty} = 0$ car $i - j - 1 < i$ et la remarque de la question **17**.

• Si $j = i$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_i^{(i-j)}(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f_i^{(0)}(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f_i(t)\mathrm{d}t = i!$, donc $\Psi(L_i, B_j) = 1$

• Conclusion $\Psi(L_i, L_i) = \Psi(L_i, B_i) = 1$ et si $j < i$, $\Psi(L_i, l_j) = \Psi(L_i, B_j) = 0$. La famille $\mathcal{L}$ est orthnormale.

19°. • Soit τ' l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ définie par $\tau'(P)(X) = P(X+1)$, on vérifie que $\tau' = \tau^{-1}$ et $U = \text{mat}_{(1,X,\dots,X^n)}(\tau')$.

De plus $\forall i \in [\![0, n]\!]$; $\tau(X^i) = (X-1)^i = \displaystyle\sum_{k=0}^{i} (-1)^{i+k}\binom{i}{k} X^k$ et $\tau'(X^i) = (X+1)^i = \displaystyle\sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} X^k$.

• T et U sont des matrices triangulaires supérieures dont leurs termes généraux sont respectivement :

$$t_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{i+j}\binom{j-1}{i-1} & \text{si} \quad i \leqslant j \\ 0 & \text{si} \quad i > j \end{cases} \qquad u_{i,j} = \begin{cases} \binom{j-1}{i-1} & \text{si} \quad i \leqslant j \\ 0 & \text{si} \quad i > j \end{cases}$$

• $\forall i \,\{0, 1, \dots, n\}$, $L_i(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{i} (-1)^{k+i}\binom{i}{k} B_p(t)$, donc $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{L}} = T$ et $U = P_{\mathcal{L}}^{\mathcal{B}}$.

• $S = (\Psi(B_{i-1}, B_{j-1}))_{1\leqslant i,j\leqslant n+1}$, $I_n = (\Psi(L_{i-1}, L_{j-1}))_{1\leqslant i,j\leqslant n+1}$ de la relation $I_n = {}^t PSP$ où $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{L}} = T$ on en déduit $I_n = {}^t TST$, donc $S = {}^t T^{-1} T^{-1} = {}^t UU$.

Ainsi $\det S = (\det U)^2 = 1$ car U est une matrice triangulaire supérieur dont les termes diagonaux sont tous égaux à 1.

20°. Posons $D = (d_{i,j})$ et $U = (u_{i,j})$.

• $(DU)_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} d_{ik}u_{kj} = d_{ii}u_{ij}.$

• Pour $i \leqslant j$; $(DU)^2_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (DU)_{i,k}(DU)_{k,j} = \sum_{i\leqslant k\leqslant j} d_{ii}u_{ik}d_{kk}u_{kj}$

$$= \frac{d_{ii}(j-1)!}{(i-1)!} \sum_{i\leqslant k\leqslant j} (-1)^{k+1} \frac{(j-i)!}{(k-i)!(j-k)!)}$$

$$= \frac{d_{ii}(j-1)!}{(i-1)!} \sum_{i\leqslant k\leqslant j} (-1)^{k+1}\binom{j-i}{j-k} = \frac{d_{ii}(j-1)!}{(i-1)!}\sum_{p=0}^{j-i}(-1)^{j+p}\binom{j-i}{p} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad j = i \\ 0 & \text{si} \quad i < j \end{cases}$$

• Pour $i > j$, $u_{ij} = 0$ donc $(DU)^2_{i,j} = 0$

• Conclusion $(DU)^2 = I_{n+1}$.

• On vérifie aisément que $D(U{}^tU)D = U^{-1}{}^tU^{-1}$; $D^2 = I_{n+1}$ donne $D^{-1} = D$ et les matrices $(U{}^tU)$ et S^{-1} sont semblables.

21°. • $\Phi_{U{}^tU} = \Phi_{S^{-1}}$ et les matrices $U{}^tU$ et ${}^tUU$ ont le même polynôme caractéristique, donc $\Phi_{S^{-1}} = \Phi_{{}^tUU} = \Phi_S$.

• Donc $\boldsymbol{\Phi_S = \det(S^{-1} - X I_{n+1}) = X^n \det\left(\frac{1}{X} S^{-1} - I_{n+1}\right)}$

$\boldsymbol{= X^n \det S^{-1} \det\left(\frac{1}{X} I_{n+1} - S\right) = X^n (-1)^n \det\left(S - \frac{1}{X} I_{n+1}\right)}$ car $\boldsymbol{\det S = 1}$.

Conclusion :

• $\boldsymbol{\Phi_S \in \mathcal{P}}$ si $\boldsymbol{n}$ est pair.

• $\boldsymbol{\Phi_S \in \mathcal{D}}$ si $\boldsymbol{n}$ est impair.

sadikoulmeki@yahoo.fr