Corrigé de l'épreuve

$\cdot$: Mines 2011, Maths I

rédigé par Sadik Boujaida
ibouja@gmail.com

Filière MP

A. Décomposition de Dunford

1. $\chi_A = (-1)^n \prod_{k=1}^{r}(X-\lambda_k)^{\alpha_k}$. Les polynômes $(X-\lambda_k)^{\alpha_k}$ sont deux à deux premiers entre eux donc par utilisation du théorème de Cayley -- Hamilton et du théorème de décomposition des noyaux

$$\mathbb{C}^n = \oplus_{k=1}^{r} \operatorname{Ker}(f-\lambda_k \mathrm{id}) = \oplus_{k=1}^{r} F_k$$

2. Soit pour $k \in [[1,r]]$, f_k est l'endomorphisme induit par f sur F_k donc pour tout $x \in F_k$, $P_k(f_k)(x) = (f_k - \lambda_k \mathrm{id}_{F_k})^{\alpha_k}(x) = (f-\lambda_k \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n})^{\alpha_k}(x) = 0_{\mathbb{C}^n}$. D'où $P_k(f_k) = 0$.

$P_k = (X-\lambda_k)^{\alpha_k}$ est un polynôme annulateur de f_k et χ_{f_k} est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ donc $\chi_{f_k}(X) = (\lambda_k - X)^{d_k}$, ou $d_k = \dim F_k$. Puisque en plus χ_{f_k} divise χ_f et que λ_k est une racine de multiplicité α_k de χ_f alors $d_k \leqslant \alpha_k$ et ceci pour toutes les racines λ_k de χ_f.

Maintenant, l'égalité des degrés dans l'expression $\chi_A = (-1)^n \prod_{k=1}^{r}(X-\lambda_k)^{\alpha_k}$ donne $n = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k$ et l'égalité des dimensions dans $E = \oplus_{k=1}^{r} F_k = \mathbb{C}^n$ donne $n = \sum_{k=1}^{r} d_k$. Ainsi

Il est possible de montrer que même si χ_f n'est pas scindé (sur un autre corps que $\mathbb{C}$ bien sûr), si λ est une valeur propre de f de multiplicité donnée α, alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\dim\operatorname{Ker}(f-\lambda\mathrm{id})^p \leqslant \alpha$ et en particulier $\dim\operatorname{Ker}(f-\lambda\mathrm{id})^\alpha = \alpha$.

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{r} d_k = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k (= n) \\ \forall k \in [[1,r]],\ d_k \leqslant \alpha_k \end{cases}$$

Donc pour tout $k \in [[1,r]]$, $d_k = \alpha_k$ et finalement $\chi_{f_k} = (\lambda_k - X)^{\alpha_k} = P_k$.

3. On pose pour tout $k \in [[1,r]]$, $n_k = f_k - \lambda_k \mathrm{id}_{F_k}$ de telle sorte que $f_k = \lambda_k \mathrm{id}_{F_k} + n_k$ et $n_k^{\alpha_k} = 0$. Dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à la somme directe $\mathbb{C}^n = \oplus_{k=1}^{r} F_k$, la matrice de f est ainsi de la forme

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} + N_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r I_{\alpha_r} + N_r \end{pmatrix}$$

où N_k est une matrice représentant l'endomorphisme n_k de F_k et qui est de ce fait nilpotente.

4. Soit P la matrice de passage dans la base dans laquelle a été écrite la matrice A' de f.

$A = PA'P^{-1}$. On pose

$$D = P\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r I_{\alpha_r} \end{pmatrix} P^{-1} \text{ et } N = P\begin{pmatrix} N_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & N_r \end{pmatrix} P^{-1}$$

$A = D + N$, D est naturellement diagonalisable, N est nilpotente et

$$DN = ND = P\begin{pmatrix} \lambda_1 N_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r N_r \end{pmatrix} P^{-1}$$

Une justification de l'unicité : *Soient D' et N' deux matrices qui vérifient les mêmes conditions que D et N. $A - D'$ est nilpotente donc il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $(A - D')^p = 0$. Soit λ une va. p de D' et soit X un vecteur propre associé. $(A - D')^p X = 0$ implique que $(A - \lambda I_n)^p X = 0$, donc $A - \lambda I_n$ est non inversible et donc λ est une valeur propre de A et donc de D. De plus $\mathrm{Ker}(D' - \lambda I_n) \subset \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)^p \subset F_\lambda$. F_λ étant le se. p de D associé à λ. On est dans la situation suivante : D et D' sont diagonalisables, toute va. p de D' est une valeur propre de D et le se. p de D' est inclu dans celui de D. Cela implique que $D' = D$, et par suite $N' = N$.*

5. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

$\chi_A = (1 - X)(2 - X)^2$. Une base du sous espace F_1 associé à la valeur propre 1 est constituée du vecteur $u_1 = (0, 1, 1)$, une base F_2 associé à la valeur propre 2 est (u_2, u_3) avec $u_2 = (1, 1, 0)$ et $u_2 = (1, 1, 1)$, qui vérifient $Au_1 = 2u_1$ et $Au_3 = u_2 + 2u_3$. On a ainsi $A = PA'P^{-1}$ avec

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il suffit ensuite de prendre selon ce qui précède :

$$D = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } N = A - D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

B. Commutation et conjugaison

6. Soit P une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$$\begin{aligned} \mathrm{conj}_{P^{-1}} \circ \mathrm{comm}_A \circ \mathrm{conj}_P(X) &= \mathrm{conj}_{P^{-1}}\left(APXP^{-1} - PXP^{-1}A\right) \\ &= P^{-1}APX - XP^{-1}AP \\ &= \mathrm{comm}_{P^{-1}AP}(X) \end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{conj}_{P^{-1}} \circ \mathrm{comm}_A \circ \mathrm{conj}_P = \mathrm{comm}_{P^{-1}AP}$.

Notons pour chaque élément diagonal λ de A, $\alpha_\lambda = \mathrm{Card}\{i \in [[1,n]] / \lambda_i = \lambda\} = \dim E_\lambda(A)$. comm_A est diagonalisable et l'ensemble de ses valeurs propres est $\{\lambda - \mu / \lambda, \mu \in \mathrm{Sp}(A)\}$. La dimension du sous espace propre associé à une valeur propre γ de comm_A est la somme des entiers $\alpha_\lambda . \alpha_\mu$ pour tout couple de valeurs propres (λ, μ) de A tels que $\gamma = \lambda - \mu$. En particulier, 0 est toujours une valeur propre de comm_A (ie qu'il existe toujours des matrices non nulles qui commutent avec A), le sous espace propre associé à 0 est de dimension $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \alpha_\lambda^2$.

7. Si $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ alors pour tout $(i, j) \in [[1, n]]^2$, $AE_{i,j} = \lambda_i E_{i,j}$ et $E_{i,j}A = \lambda_j E_{i,j}$. Donc $\mathrm{comm}_A(E_{i,j}) = (\lambda_i - \lambda_j)E_{i,j}$. Ce qui signifie que $E_{i,j}$ est un vecteur propre de comm_A associé à la valeur propre $\lambda_i - \lambda_j$. Ainsi $(E_{i,j})_{i,j}$

est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ formée de vecteurs propres de comm_A, donc comm_A est diagonalisable.

8. Si A est diagonalisable, soit P une matrice inversible telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale. $\mathrm{comm}_{P^{-1}AP}$ est diagonalisable d'après la question précédente, donc $\mathrm{conj}_{P^{-1}} \circ \mathrm{comm}_A \circ \mathrm{conj}_P$ est diagonalisable. En notant que conj_P et $\mathrm{conj}_{P^{-1}}$ sont des automorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, inverse l'un de l'autre, Les matrices de comm_A est $\mathrm{conj}_{P^{-1}} \circ \mathrm{comm}_A \circ \mathrm{conj}_P$ dans une base quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont semblables, ce qui implique que comm_A est diagonalisable.

9. Supposons que A est nilpotente d'indice p. Notons d_A et g_A les endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définis par

$$d_A(X) = AX \text{ et } g_A(X) = XA$$

On a alors $\mathrm{comm}_A = d_A - g_A$. Sachant que pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$d_A \circ g_A(X) = g_A \circ d_A(X) = AXA$$

et donc que $d_A \circ g_A = g_A \circ d_A$, la formule du binôme de Newton donne

$$\left(\mathrm{comm}_A\right)^{2p}(X) = \sum_{k=0}^{2p}(-1)^k C_{2p}^k d_A^{2p-k} \circ g_A^k(X) = \sum_{k=0}^{2p}(-1)^k C_{2p}^k A^{2p-k} X A^k$$

On constate alors que si $0 \leqslant k \leqslant p-1$, $A^{2p-k} = 0$ et si $k \leqslant p \leqslant 2p$, $A^k = 0$. Ainsi pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ $\mathrm{comm}_A^{2p}(X) = 0$, soit $\mathrm{comm}_A^{2p} = 0$.

10. On suppose que A est nilpotente et $\mathrm{comm}_A = 0$.

résultat classique qu'on obtient, par exemple, en étudiant les égalités $AE_{i,j} = E_{i,j}A$

$\mathrm{comm}_A = 0$ implique que A commute avec toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Ce qui à son tour implique que A est une matrice scalaire : Il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $A = \lambda I_n$.

La nilpotence de A implique ensuite que $\lambda = 0$ soit $A = 0$.

11. Considérons la décomposition de Dunford de A, $A = D + N$. Il est aisé de voir que $\mathrm{comm}_A = \mathrm{comm}_D + \mathrm{comm}_N$. Ensuite d'après la question **8.**, comm_D est diagonalisable. Et d'après la question **9.**, comm_N est nilpotent. En outre $\mathrm{comm}_D \circ \mathrm{comm}_N = \mathrm{comm}_N \circ \mathrm{comm}_D$ puisque pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$$\mathrm{comm}_D \circ \mathrm{comm}_N(X) = \mathrm{comm}_N \circ \mathrm{comm}_D(X) = NDX + XDN - NXD - DXN$$

Ainsi l'écriture $\mathrm{comm}_A = \mathrm{comm}_D + \mathrm{comm}_N$ représente la décomposition de Dunford de l'endomorphisme comm_A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Concluons : Supposons que comm_A est diagonalisable, et considérons la décomposition de Dunford de A, $A = D+N$. comm_A et diagonalisable donc par unicité de la décomposition de Dunford $\mathrm{comm}_A = \mathrm{comm}_D$ et $\mathrm{comm}_N = 0$. N et nilpotente et $\mathrm{comm}_N = 0$ donc d'après ce qui précède $N = 0$ et par suite la matrice $A = D$ est diagonalisable.

C. Formes bilinéaires sur un espace vectoriel complexe

Si 0 n'est pas une valeur propre de u alors les sevs $\mathrm{Ker}\,u$, $\mathrm{Ker}\,u^2$ *et* $\mathrm{Ker}\,u \cap \mathrm{Im}\,u$ *sont tous nuls. Les implications sont dans ce cas triviales*

12. On suppose que 0 est effectivement une valeur propre de u.

(i)⇒(ii) On suppose que u est diagonalisable. On a de façon naturelle $\mathrm{Ker}\,u \subset \mathrm{Ker}\,u^2$. Inversement soit v l'endomorphisme induit par u sur $\mathrm{Ker}\,u^2$ (qui est bien sûr stable par u). $v^2 = 0$ donc 0 est la seule valeur propre de v. Le polynôme caractéristique de v (qui est scindé) est donc $\chi_v = (-1)^d X^d$, où d est la dimension de $\mathrm{Ker}\,u^2$. Comme χ_v divise χ_u alors $d \leqslant \alpha$ où α est la multiplicité de la valeur propre 0 de u. u est diagonalisable donc $\alpha = \dim \mathrm{Ker}\,u$ et ainsi $\dim \mathrm{Ker}\,u^2 \leqslant \dim \mathrm{Ker}\,u$.

Finalement $\mathrm{Ker}\,u = \mathrm{Ker}\,u^2$.

Dans l'autre sens, on peut démontrer, sachant que χ_u *est scindé, que u est diagonalisable si et seulement si* $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u), \mathrm{Ker}(u-\lambda \mathrm{id}) = \mathrm{Ker}(u-\lambda \mathrm{id})^2$

(ii)⇒(iii) On suppose que $\mathrm{Ker}\,u = \mathrm{Ker}\,u^2$. Soit $x \in \mathrm{Ker}\,u \cap \mathrm{Im}\,u$. $x \in \mathrm{Im}\,u$ donc il existe $y \in \mathbb{C}^n$ tel que $x = u(y)$. l'égalité $u(x) = 0$ donne ensuite $u^2(y) = 0$ et puisque $\mathrm{Ker}\,u^2 = \mathrm{Ker}\,u$ alors $x = u(y) = 0$. Ainsi $\mathrm{Ker}\,u \cap \mathrm{Im}\,u = \{0\}$.

13. Soient des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_q$ tels que $\sum_{k=1}^{q} \lambda_k \varphi_k = 0$. Donc pour tout $x \in E$

$$\sum_{k=1}^{q} \lambda_k \varphi_k(x) = b\left(\sum_{k=1}^{q} \lambda_k \varepsilon_k, x\right) = 0$$

La forme bilinéaire b est non dégénérée donc $\sum_{k=1}^{q} \lambda_k \varepsilon_k = 0$, et puisque la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_q)$ est libre alors $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_q = 0$.

Ainsi la famille $(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_q)$ est libre.

14. On complète la famille $(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_q)$ en une base $(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_p)$ de E^* et on considère la base antéduale de cette dernière $(e_1, e_2, \cdots, e_p)$.

Soit $x \in E$, les propriétés d'une base duale permettent d'écrire

$$x = \sum_{k=1}^{p} \varphi_k(x) e_k$$

On en déduit les équivalences

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Vect}\{e_{q+1}, e_{q+2}, \cdots, e_p\} &\iff \forall i \in [\![1, q]\!],\ \varphi_i(x) = 0 \\ &\iff \forall i \in [\![1, q]\!],\ b(\varepsilon_i, x) = 0 \\ &\iff \forall y \in F,\ b(y, x) = 0 \\ &\iff x \in F^{\perp b} \end{aligned}$$

Attention, *cela n'implique pas pour autant que F et* $F^{\perp b}$ *sont supplémentaires dans E. Ceci vaut encore dans le cas d'une forme bilinéaire non dégénérée sur un espace vectoriel réel. Lapsus qu'on peut facilement commettre par référence au résultat équivalent pour un* **produit scalaire**

Ainsi $F^{\perp b} = \mathrm{Vect}\{e_{p+1}, e_{p+2}, \cdots, e_p\}$, et par suite $\dim F^{\perp b} = p - q$ ou encore

$$\dim F + \dim F^{\perp b} = \dim E \qquad (1)$$

D. Critère de Clarès

15. La bilinéarité de φ découle immédiatement de la linéarité de la trace. Sa symétrie de la propriété $\mathrm{Tr}(XY) = \mathrm{Tr}(YX)$.

Soit maintenant $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\varphi(A,X) = 0$. Ce qui signifie que

$$\forall X = (x_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \mathrm{Tr}(AX) = \sum_{i,j} a_{i,j}x_{j,i} = 0$$

et en prenant successivement $X = E_{h,k}$ on obtient pour tout $(k,h) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{k,h} = 0$. Ainsi $A = 0$.

Alors φ est non dégénérée.

16. En alliant la formule du rang à la relation (1) établie dans la question **14.** on obtient $\dim\left(\mathrm{Ker}\,\mathrm{comm}_A\right)^{\perp\varphi} = \dim\left(\mathrm{Im}\,\mathrm{comm}_A\right) = n^2 - \dim\left(\mathrm{Ker}\,\mathrm{comm}_A\right)$.

Notons ensuite qu'en général pour tout $(M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$

On pourrait très bien ici, comme on le fait dans le cas d'un produit scalaire réel, définir l'adjoint de comm_A pour la forme bilinéaire φ, vu que l'application $A \longmapsto \varphi_A : M \mapsto \varphi(A,M)$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})^*$ (grâce à $E^{\perp\varphi} = \{0\}$). Le calcul ci-contre signifierait que cet adjoint est $-\mathrm{comm}_A$

$$\begin{aligned}\varphi\big(\mathrm{comm}_A(M),N\big) &= \mathrm{Tr}(AMN - MAN)\\ &= \mathrm{Tr}(AMN) - \mathrm{Tr}(MAN)\\ &= \mathrm{Tr}(NAM) - \mathrm{Tr}(ANM)\\ &= \mathrm{Tr}(-\mathrm{comm}_A(N)M)\\ &= -\varphi\big(M,\mathrm{comm}_A(N)\big)\end{aligned}$$

Donc en particulier

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \forall N \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{comm}_A,\ \varphi(\mathrm{comm}_A(M),N) = 0$$

Ce qui signifie que $\mathrm{Im}(\mathrm{comm}_A) \subset (\mathrm{Ker}\,\mathrm{comm}_A)^{\perp\varphi}$. D'où l'égalité voulue.

17. On suppose que A est nilpotente. Soit $M \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{comm}_A$. $AM = MA$ donc AM est nilpotente. Comme son polynôme caractéristique est scindé (le corps de base est $\mathbb{C}$) et que sa seule valeur propre est 0 alors sa trace, somme de ses valeurs propres, est nulle. Soit $\varphi(A,M) = \mathrm{Tr}(AM) = 0$.

Mise au point : *on vient de montrer que si A est une matrice nilpotente alors il existe $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = AX - XA$*
Il serait intéressant d'étudier la réciproque.

On a montré que $\forall M \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{comm}_A$, $\varphi(A,M) = 0$, donc $A \in \left(\mathrm{Ker}\,\mathrm{comm}_A\right)^{\perp\varphi}$.

D'après la question précédente, il existe donc $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $A = \mathrm{comm}_A(X)$.

Soit maintenant $\lambda \in \mathbb{C}$. $A = AX - XA$ donc

$$\mathrm{comm}_{A+\lambda I_n}(X) = (A+\lambda I_n)X - X(A+\lambda I_n) = A$$

18. Soit la décomposition de Dunford $A = D + N$.

Reprenons les écritures de la question **4.**

$$D = P\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r I_{\alpha_r} \end{pmatrix} P^{-1} \text{ et } N = P\begin{pmatrix} N_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & N_r \end{pmatrix} P^{-1}$$

D'après la question précédente, pour tout $i \in [[1, r]]$, il existe $Y_i \in \mathcal{M}_{\alpha_i}(\mathbb{C})$ tel que $\mathrm{comm}_{N_i+\lambda_i I_{\alpha_i}}(Y_i) = N_i$ soit $(N_i + \lambda_i I_{\alpha_i})Y_i - Y_i(N_i + \lambda_i I_{\alpha_i}) = N_i$. Ce qui donne en posant

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & Y_r \end{pmatrix} \text{ et } N' = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & N_r \end{pmatrix}$$

et en considérant la matrice A' de la même question

$$A'Y - YA' = N'$$

Si on pose maintenant $X = PYP^{-1}$ alors,

$$\begin{aligned} AX - XA &= (PA'P^{-1})(PYP^{-1}) - (PYP^{-1})(PA'P^{-1}) \\ &= P(A'Y - YA')P^{-1} \\ &= PN'P^{-1} \\ &= N \end{aligned}$$

Soit $\mathrm{comm}_A(X) = N$.

Ce qui signifie que $N \in \mathrm{Im}(\mathrm{comm}_A)$

19. On suppose que $\mathrm{Ker}\,\mathrm{comm}_A = \mathrm{Ker}(\mathrm{comm}_A)^2$. D'après la question **12.** $\mathrm{Ker}\,\mathrm{comm}_A \cap \mathrm{Im}\,\mathrm{comm}_A = \{0\}$. Et d'après la question précédente $N \in \mathrm{Im}\,\mathrm{comm}_A$. De plus N commute avec D, donc N commute avec $A = D + N$, et par suite $N \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{comm}_A$.

Ainsi $N \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{comm}_A \cap \mathrm{Im}\,\mathrm{comm}_A$, d'où $N = 0$. Ce qui implique que A est diagonalisable.