Séries et caractères

Avant de commencer, quelques mots sur l'application χ. Sa périodicité permet de définir une application $\widetilde{\chi}$ de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ par $\widetilde{\chi}(\overline{k}) = \chi(k)$. Cette application $\widetilde{\chi}$ est un morphisme pour les lois produits, nulle en dehors de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$, ne s'annulant pas sur $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ (sinon χ serait nulle, ... preuve à détailler, un peu comme à la question 1). On en déduit que $\widetilde{\chi}$ induit un morphisme du groupe multiplicatif $((\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*, \times)$ sur le groupe multiplicatif $(\mathbb{R}^*, \times)$.

1. $\chi(1) = \chi(1\times 1) = \chi(1)^2$; donc $\chi(1)$ vaut 0 ou 1. Comme $\forall k \in \mathbb{Z}, \chi(k) = \chi(1\times k) = \chi(1).\chi(k)$ et que χ n'est pas identiquement nulle, $\chi(1) \neq 0$. Donc $\chi(1) = 1$.
2. Nécessairement, par périodicité, $\forall k \in \mathbb{Z}, \chi(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$
   Inversement, cette application vérifie les 4 axiomes.
3. $\chi(3) = \chi(-1)$. De plus, $\chi(-1)^2 = \chi((-1)\times(-1)) = \chi(1) = 1$. Donc $\chi(3) = \chi(-1) \in \{1, -1\}$.
4. $\forall k \in \mathbb{Z}, \chi(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } k \equiv 1\ [4] \\ -1 & \text{si } k \equiv 3\ [4] \end{cases}$; donc $\chi(2k+1) = (-1)^k$.
   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{\chi(k)}{k} = \sum_{k=0}^{\mathrm{E}((n-1)/2)} \frac{\chi(2k+1)}{2k+1} = \sum_{k=0}^{\mathrm{E}((n-1)/2)} \frac{(-1)^k}{2k+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \arctan 1 = \frac{\pi}{4} \text{ d'après les rappels.}$$
5. Je ne vois pas comment prouver le résultat demandé sans le résultat de la question 7. On peut prolonger la définition de r_k à $k = 0$. Si $r_k = r_l$, alors N divise $ak - al = a(k-l)$. Comme a est premier avec N, N divise $k - l$. Si $k, l \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$, alors $|k - l| \leq N - 1$; donc $k - l = 0$.
   Donc l'application $k \mapsto r_k$ est une injection de l'ensemble fini $\{0, 1, \ldots, N-1\}$ dans lui-même, donc une bijection. Comme $r_0 = 0$, $k \mapsto r_k$ est une bijection de l'ensemble fini $\{1, \ldots, N-1\}$ sur lui-même.
   De plus, soit $k \in P$; si d divise r_k et N, il divise ak et est premier avec a ; donc il divise k (et N) ; donc d vaut ± 1. Donc r_k est dans P.
   On en déduit que $k \mapsto r_k$ est une injection, donc une bijection, de P dans lui-même.
   La question 5 maintenant ! Pour tout $k \in P$, $ak \equiv r_k\ [N]$; donc $\prod_{k\in P} ak \equiv \prod_{k\in P} r_k\ [N]$. Or $\prod_{k\in P} r_k = \prod_{k\in P} k$; donc N divise $\prod_{k\in P} ak - \prod_{k\in P} k = (a^{\varphi(N)} - 1)\prod_{k\in P} k$. Comme N est premier avec chaque élément de P, il est premier avec leur produit, donc il divise $a^{\varphi(N)} - 1$.
   Autre preuve en travaillant dans le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* = \{\overline{k}, k \in P\}$:
   Comme $\overline{a}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, l'application $x \mapsto \overline{a}x$ est une bijection de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ (mais aussi de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \setminus \{\overline{0}\}$). Donc $\overline{\prod_{k\in P} ak} = \prod_{x\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*} \overline{a}x = \prod_{x\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*} x$. Or $\overline{\prod_{k\in P} ak} = \overline{a}^{\varphi(N)} \prod_{x\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*} x$. Comme $\prod_{x\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*} x$ est inversible, de l'égalité $\prod_{x\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*} x = \overline{a}^{\varphi(N)} \prod_{x\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*} x$, on tire $\overline{a}^{\varphi(N)} = \overline{1}$, *i.e.* N divise $a^{\varphi(N)} - 1$.
6. Par périodicité, $\chi(a^{\varphi(N)}) = \chi(1)$; par morphisme, $\chi(a^{\varphi(N)}) = \chi(a)^{\varphi(N)}$. Comme $\chi(a)$ est un réel, $\chi(a) = \pm 1$.
7. Voir la question 5.
8. Par périodicité, $\sum_{k=1}^{N-1} \chi(ak) = \sum_{k=1}^{N-1} \chi(r_k)$. Par bijectivité de $k \mapsto r_k$ sur $\{1, \ldots, N-1\}$, $\sum_{k=1}^{N-1} \chi(r_k) = \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k)$. D'où l'identité demandée.
9. Comme $\chi(n) = \chi(n+N)$, $\sum_{k=n}^{n+N-1} \chi(k)$ ne dépend pas de n.
   Pour $n = 0$: $\sum_{k=0}^{N-1} \chi(k) = \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) = \sum_{k=1}^{N-1} \chi(ak) = \chi(a) \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k)$. En choisissant a tel que $\chi(a) \neq 1$, ce qui est possible d'après l'énoncé : $\sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) = 0$ et $\sum_{k=0}^{N-1} \chi(k) = 0$ également.
10. On considère l'entier q tel que $qN \leq k < (q+1)N$.
    $$\sum_{k=1}^{m} \chi(k) = \sum_{k=0}^{m} \chi(k) = \sum_{k=0}^{qN-1} \chi(k) + \sum_{k=qN}^{m} \chi(k) = \sum_{i=0}^{q-1} \sum_{k=iN}^{iN+N-1} \chi(k) + \sum_{k=qN}^{m} \chi(k) = \sum_{k=qN}^{m} \chi(k) = \sum_{k=0}^{m-qN} \chi(k) = \sum_{k=1}^{m-qN} \chi(k).$$

Comme $\chi(k) \in \{-1,0,1\}$, que $m-qN \leq N-1$, et qu'entre 1 et $N-1$ il y a exactement $\varphi(N)$ valeurs de k telles que $\chi(k) \neq 0$, $\left|\sum_{k=1}^{m} \chi(k)\right| = \left|\sum_{k=1}^{m-qN} \chi(k)\right| \leq \varphi(N)$.

11. On pose $T_n = \sum_{k=0}^{n} \chi(k) = \sum_{k=1}^{n} \chi(k)$ et on utilise la transformation d'Abel avec $u_k = \frac{1}{k}$; pour $n \geq 2$, on a :
$\sum_{k=2}^{n} \frac{\chi(k)}{k} = -\frac{T_1}{2} + \sum_{k=2}^{n-1} T_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{T_n}{n}$.
Comme (T_n) est une suite bornée, $\frac{T_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Comme $\left|T_k\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\right| \leq \varphi(N)\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$, que $\varphi(N)$ est une constante et que la série $\sum\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$ converge (car la suite $(1/k)$ converge), la série $\sum T_k\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$ converge absolument, donc converge.
D'où la convergence de la suite $\left(\sum_{k=2}^{n} \frac{\chi(k)}{k}\right)$ et celle de $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\chi(k)}{k}\right)$.
12. On se limite aux diviseurs dans N. Comme n et m sont premiers entre eux, tout diviseur de nm s'écrit de manière unique comme produit d'un diviseur de n et d'un diviseur de m et le produit d'un diviseur de n par un diviseur de m est un diviseur de mn. On peut donc écrire :
$f_{nm} = \sum_{d\,|\,nm} \chi(d) = \sum_{u\,|\,n \text{ et } v\,|\,m} \chi(uv) = \sum_{u\,|\,n \text{ et } v\,|\,m} \chi(u)\chi(v) = \sum_{u\,|\,n}\sum_{v\,|\,m} \chi(u)\chi(v) = \sum_{u\,|\,n} \chi(u) \sum_{v\,|\,m} \chi(v) = f_n f_m$.
13. Comme p est premier, les diviseurs de p^α sont les p^β avec $0 \leq \beta \leq \alpha$.
Comme $\chi(p^\beta) = \chi(p)^\beta$ et que $\chi(p) \in \{-1,0,1\}$, on a :
$$f_{p^\alpha} = \sum_{\beta=0}^{\alpha} \chi(p)^\beta = \begin{cases} \alpha+1 & \text{si } \chi(p)=1 \\ \dfrac{1-\chi(p)^{\alpha+1}}{1-\chi(p)} & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} \alpha+1 & \text{si } \chi(p)=1 \\ 1 & \text{si } \chi(p)=0 \\ 0 & \text{si } \chi(p)=-1 \text{ et } \alpha \text{ impair} \\ 1 & \text{si } \chi(p)=-1 \text{ et } \alpha \text{ pair} \end{cases} \text{ ; donc } f_{p^\alpha} \geq 0.$$
14. Comme n possède au plus n diviseurs dans $\mathbb{N}$ et que $\chi \leq 1$, on a : $f_n \leq n$.
Si $n \geq 2$: on utilise l'écriture primaire de n : $n = \prod_{i=1}^{q} p_i^{\alpha_i}$, où les p_i sont des nombres premiers distincts et les α_i des entiers au moins égaux à 1. Par multiplicativité de f, comme les $p_i^{\alpha_i}$ sont premiers entre eux deux à deux, $f_n = \prod_{i=1}^{q} f_{p_i^{\alpha_i}}$. Donc $f_n \geq 0$.
15. Pour $n \geq 2$, on reprend les notations de la question précédente. Alors $f_{n^2} = \prod_{i=1}^{q} f_{p_i^{2\alpha_i}}$. Or, à la question 13, avec α pair, quelle que soit la valeur de $\chi(p) \in \{-1,0,1\}$, $f_{p^\alpha} > 0$. Donc $f_{n^2} > 0$. Comme f_{n^2} est dans $\mathbb{Z}$, $f_{n^2} \geq 1$.
16. Si $|x| < 1$, alors la suite $(f_n x^n)$ converge vers 0 (puisque $|f_n x^n| \leq n\,|x|^n$). Donc le rayon de convergence de la série entière vaut au moins 1. Si $|x| > 1$, alors la suite $(f_{n^2} x^{n^2})$ tend vers l'infini (puisque $\left|f_{n^2} x^{n^2}\right| \geq |x|^{n^2}$). Donc le rayon de convergence de la série entière vaut au plus 1. Finalement le rayon de convergence vaut 1.
17. Comme $x \geq 0$ et $f_n \geq 0$, on a : $f(x) \geq \sum_{n=1}^{\infty} f_{n^2} x^{n^2} \geq \sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2}$.
On définit la fonction g par $g(t) = x^{t^2} = e^{t^2 \ln x}$; g est continue sur $[1,+\infty[$, décroissante, intégrable ($\ln x < 0$).
Pour tout $n \geq 1$, on a : $g(n) = \int_n^{n+1} g(n)\,dt \geq \int_n^{n+1} g(t)\,dt$.
Donc $f(x) \geq \sum_{n=1}^{\infty} g(n) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} g(t)\,dt = \int_1^{+\infty} g(t)\,dt$.
Le changement de variable affine $u = t\sqrt{-\ln x}$ s'écrit :
$\int_1^{+\infty} g(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{-\ln x}} \int_{\sqrt{-\ln x}}^{+\infty} e^{-u^2}\,du \geq \frac{1}{\sqrt{-\ln x}} \int_{\sqrt{\ln 2}}^{+\infty} e^{-u^2}\,du$ (car $-\ln x \leq \ln 2$).
D'où la minoration demandée.