Corrigé de l'epreuve math I (Mines-ponts 2006)

Par M. TAIBI Professeur de MP* Lycée Moulay Youssef Rabat Maroc

Partie I : Un vecteur propre strictement positif

$T \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ telle que $T > 0$ et $(I_n + T)^{n-1} > 0$.

1°. Soit $x \in B$ ($x > 0$ et $x \neq 0$) Montrons que $\Gamma_x = \{\theta \in \mathbb{R}_+ \ / \ \theta x \leqslant Tx\}$ est un enesemble non vide fermé et borné .

$0 \in \Gamma_x$ car $Tx \geqslant 0 = 0.x$, donc Γ_x est non vide.

Pour $i \in \{1, ..., n\}$, l'application $\varphi_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\theta \mapsto (Tx)_i - \theta.x_i$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc $\Gamma_x = \bigcap\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \varphi_i^{-1}\{[0, +\infty[\} \cap \mathbb{R}_+$ est un fermé coimme intresection de fermés .

Pour tout $\theta \in \Gamma_x$, et tout $i = 1...n$, on a : $\theta \leqslant \dfrac{(Tx)_i}{x_i}$ pour $x_i \neq 0$, donc Γ_x est borné .

On pose $\theta(x) = \max(\Gamma_x)$

2° Soit $x \in B$, montrons que $\theta(x) = \min\{\frac{(Tx)_i}{x_i} \ / \ i = 1...n, \ x_i \neq 0\}$.

Pour tout $\theta \in \Gamma_x$ et pour tour i$\in \{1, ..n\}$ tel que $x_i \neq 0$, on a : $\theta \leqslant \dfrac{(Tx)_i}{x_i}$. Donc $\theta(x) \leqslant \min\{\dfrac{(Tx)_i}{x_i}$ $/ \ i = 1...n, \ x_i \neq 0\}$

D'autre part les réels $\dfrac{(Tx)_i}{x_i}$ avec $x_i \neq 0$ sont dans Γ_x . D'où $\theta(x) = \min\{\dfrac{(Tx)_i}{x_i} \ / \ i = 1...n, \ x_i \neq 0\}$.

3° Montrons que pour tous $\alpha > 0$ et $x \in B$, on a : $\theta(\alpha x) = \theta(x)$

Comme T est linéaire, on a : $\{\dfrac{(T(\alpha x))_i}{(\alpha x)_i} \ / \ i = 1..n \text{ et } x_i \neq 0\} = \{\dfrac{(T(x))_i}{(x)_i} \ / \ i = 1..n \text{ et } x_i \neq 0\}$, donc $\theta(\alpha x) = \theta(x)$

4° Montrons que $P(B) \subset B^+$

Soit $x \in B$, posons $y = Px$, $P = (p_{ij})_{ij}$ et $(y)_i = y_i$.

Comme $x \neq 0$ et $x \geqslant 0$, alors il existe j_0 tel que $x_{j_0} > 0$, Dond, pour tout i, on a : $y_i = \sum\limits_{j=1}^{n} p_{ij} x_j = p_{ij_0} x_{j_0} + \sum\limits_{j=1, j \neq j_0}^{n} p_{ij} x_j > 0$ car $P > 0$ et $x \geqslant 0$. D'où le résultat demandé .

5° Montrons que : $\forall x \in B$, $\theta(Px) \geqslant \theta(x)$ et $\theta(Px) > 0$

Pour $\theta \in \Gamma_x$, on a : $\theta x \leqslant Tx$, donc $\theta Px = P(\theta x) \leqslant P(Tx)$ car $P > 0$ ($P(\underbrace{Tx - \theta x}_{\geqslant 0}) \geqslant 0$)

D'où $\theta Px \leqslant T(Px)$ car $TP = PT$ (P polynôme en T) et par suite $\Gamma_x \subset \Gamma_{Px}$

En conclusion :

$$\theta(x) = \max \Gamma_x \leqslant \max \Gamma_{Px} = \theta(Px).$$

Reste à verifier que $\theta(Px) > 0$.

D'après la question 4° $P(B) \subset B^+$, donc $TPx = P(Tx) > 0$ et $Px > 0$ car $Tx \in B$ et puis $\theta(Px) = \min\{\frac{(P(Tx))_{ii}}{(Px)_{ii}} \ , \ i = 1..n\} > 0$.

6° Supposons que $x \in B$ est un vecteur porpre de T associé à la valeur propre λ, montrons que $\theta(Px) = \theta(x)$.

x étént positif, donc $Tx > 0$ et pour tout $i = 1..n$, $0 \leqslant (Tx)_i \leqslant \lambda x_i$.

Pour $i_0 \in \{1, ..., n\}$ tel que $x_{i_0} \neq 0$, on a $\lambda \geqslant \dfrac{(Tx)_{i_0}}{x_{i_0}} \geqslant 0$.

Comme $P = (I+T)^{n-1}$, il en résulte que $(1+\lambda)^{n-1}$ est une valeur paropre de P et $Px = (1+\lambda)^{n-1}x$.

D'où $\theta(Px) = \theta((1+\lambda)^{n-1}x) = \theta(x)$ car $(1+\lambda)^{n-1} > 0$.

En conclusion : $\theta(Px) = \theta(x)$

7° Soit $x \in B$ tel que $\theta(Px) = \theta(x)$. Montrons que x est un vecteur propre associé à la valeur propre $\theta(x)$.
Posons $y = Tx - \theta(x)x$, on a $y \geqslant 0$
Si $y \neq 0$, comme $P > 0$, on a : $0 < Py = P(Tx - \theta(x)x) = P(Tx) - \theta(x)Px = T(Px) - \theta(x)P(x)$ car P et T commutent.
Donc, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, $(T(Px))_i - \theta(x)(Px)_i > 0$ et puisque $\theta(x) = \theta(Px)$, on a : $\theta(x) < \min\{\dfrac{(T(Px))_i}{(Px)_i}\ , i = 1..n\} = \theta(Px)$ ce qui est absurde .Donc : $y = 0$ et par suite $Tx = \theta(x)x$.

8° Soit $C = B \cap \sum = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ x \geqslant 0$ et $\|x\|_1 = 1\}$. Montrons que $\theta : P(C) \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \theta(y)$ est continue sur $P(C)$.
Pour $i = 1..n$, soit l'application $\varphi_i : y \mapsto \frac{(Ty)_i}{y_i}$ est bien définie et continue sur $P(C)$ car tout élément y de $P(C)$ est strictement positif . Donc $\theta = \min(\varphi_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est continue sur $P(C)$.

9° Comme $C = B \cap \sum = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ x \geqslant 0$ et $\|x\|_1 = 1\}$ est un compact (fermé +bornée en dimension finie) , et l'application P est coninue sur $\mathbb{R}^n$ car linéaire sur un espace de dimension finie, donc $P(C)$ est compact dans $\mathbb{R}^n$.
L'application θ étant continue sur le compact $P(C)$ à valeur dans R , il existe donc $x_0 \in P(C)$ tel que

$$\theta(x_0) = \sup_{x \in P(C)} \theta(x)$$

.

10° Pour $x \in C \subset B$, on a $Px \in P(C) \subset B^+$ et par la question 5) : $\theta(x) \leqslant \theta(Px)$. Donc :
Pour tout $x \in C = B \cap \sum$, $\theta(x) \leqslant \theta(Px) \leqslant \sup\limits_{y \in P(C)} \theta(y)$.et par suite :

$$\sup_{x \in C} \theta(x) \leqslant \sup_{y \in P(C)} \theta(y)$$

11° Lorsque x décrit B , alors $y = \frac{1}{\|x\|_1} x$ décrit C, donc $\sup\limits_{x \in B} \theta(x) = \sup\limits_{y \in C} \theta(\|x\|_1 y) = \sup\limits_{y \in C} \theta(y)$ car $\|x\|_1 > 0$ (voir question 3°)

12° D'après ce qui prècède, on a :
$\sup\limits_{x \in B} \theta(x) = \sup\limits_{x \in C} \theta(x) \leqslant \sup\limits_{x \in P(C)} \theta(x) = \theta(x_0) \overset{noté}{=} \theta_0$
Comme l'application $\left\{ \begin{array}{ll} C = B \cap \sum & \to P(C) \\ x & \mapsto Px \end{array} \right\}$ est bijective, on a :

$$\sup_{x \in C} \theta(x) = \sup_{x \in P(C)} \theta(x)$$

13° $x_0 \in P(C)$, donc $x_0 > 0$. On rappelle que $C = B \cap \sum = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ x \geqslant 0$ et $\|x\|_1 = 1\}$ est compact .
On a aussi $y = Tx_0 - \theta_0 x_0 \geqslant 0$.
Si $y > 0$, alors pour tout $i = 1..n$; $(Tx_0)_i - \theta_0(x_0)_i > 0$, donc $\theta_0 < \{\frac{(Tx_0)_i}{(x_0)_i}, \ i = 1..n\}$ et apr suite :
$\theta_0 < \min\{\frac{(Tx_0)_i}{(x_0)_i}, \ i = 1..n\} = \theta(x_0) = \theta_0$ ce qui absurde. D'où $Tx_0 = \theta_0 x_0$.
Par $\theta(Px) > 0$ pour tout $x \in B \cap \sum = C$ et que θ est continue sur le compact $P(C)$, on déduit que $\theta_0 = \sup\limits_{x \in P(C)} \theta(x) > 0$.

Partie II : Une méthode d'approximation

T est une matrice stochastique positive telle que $P = (I_n + T)^{n-1} > 0$, $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{C}^n$ et $x^+ = (|x_1|, ..., |x_n|)$
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $R_k = \dfrac{1}{k} \sum\limits_{j=0}^{k-1} T^j$

14° Soit $\theta \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre de T associé à θ, on a $x \neq 0$ et $Tx = \theta x$
Pour $i = 1...n$; $(Tx)_i = \theta x_i$, donc $|\theta| \, |x_i| = |(Tx)_i|$.

Si $T = (t_{ij})$, alors $(Tx)_i = \sum\limits_{j=1}^{n} t_{ij}x_j$ et apr suite : $\begin{array}{ll} |(Tx)_i| & \leqslant \sum\limits_{j=1}^{n} t_{ij}\,|x_j| \quad ; t_{ij} \geqslant 0 \\ & = (Tx^+)_i \end{array}$,.D'où $|\theta|\,|x_i| \leqslant (Tx^+)_i$ et par suite :

$$|\theta|\, x^+ \leqslant Tx^+$$

15° Comme $x \neq 0$, on a $x^+ \geqslant 0$ et $x^+ \neq 0$ et $|\theta|\, x^+ \leqslant Tx^+$ (question 14). Donc $|\theta| \leqslant \theta(x^+) \leqslant \theta_0$.

16° On a $|\theta|\, \|x\|_1 = |\theta| \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i| = \sum\limits_{i=1}^{n} |\theta|\, |x_i|$. Or $Tx = \theta x$, donc :

$$\begin{aligned} |\theta|\, \|x^+\|_1 = |\theta|\, \|x\|_1 = \|\theta x\|_1 = \|Tx\|_i & = \sum_{i=1}^{n} |(Tx)_i| \\ & \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} t_{ij}\,|x_j| \\ & = \sum_{j=1}^{n} (\underbrace{\sum_{i=1}^{n} t_{ij}}_{=1})\,|x_j| \\ & = \sum_{j=1}^{n} |x_j| = \|x^+\|_1 \end{aligned}$$

En conclusion :

$$|\theta|\, \left\|x^+\right\|_1 \leqslant \left\|x^+\right\|_1$$

Comme $x \neq 0$, on a $\|x^+\|_1 > 0$ et puis $|\theta| \leqslant 1$.

17° Comme T est stochastique ($\forall j$, $\sum\limits_{i=1}^{n} t_{ij} = 1$), alors $\theta = 1$ est une valeur propre de T associée au vecteur propre $x = (1, 1, ..., 1) \in \mathbb{R}^n$, donc $\theta = 1 \leqslant \theta_0$ (question 15). or θ_0 est valeur propre de T (question 13) et puis apr la question 16, on a :

$$\theta_0 = 1$$

18° Montrons que pour tout $k \geqslant 1$, T^k et R_k sont stochastiques.
Première méthode : On ulilise les résultats suivants
(1) Une matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ et stochastique si et seulement si $u = (1, ..., 1)$ est vecteur propre associé à la veleur propre 1.
(2) Si $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ admet une valeur propre λ associé à un vecteur propre x, alors $Q(\lambda)$ est une veleur propre de $Q(A)$ associé au vecteur propre x.
Et on remarque que T^k et R_k sont des polynômes en la matrice stochastique T .
Dexième méthode : Utiliser une récurrence
$T^0 = I_n$ et T^1 sont stochastiques
Si, pour $k \geqslant 1$ la matrice T^k est stochastique, alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} (T^{k+1})_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} (T)_{il}(T^k)_{lj} & = \sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} (T)_{il}(T^k)_{lj} \\ & = \sum_{l=1}^{n} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (T)_{il}}_{=1}(T^k)_{lj} \\ & = \sum_{l=1}^{n} (T^k)_{lj} = 1 \qquad \text{(par hypothèse de récurrence)} \end{aligned}$$

Donc T^{k+1} est aussi stochastique.

$R_k = \dfrac{1}{k}\sum\limits_{j=0}^{k-1} T^j$, donc $\sum\limits_{i=1}^{n} (R_k)_{ij} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{k} \sum\limits_{j=0}^{k-1} (T^j)_{ij} = \sum\limits_{j=0}^{k-1} \dfrac{1}{k} \underbrace{\sum_{i=0}^{n} (T^j)_{ij}}_{=1} = \sum\limits_{j=0}^{k-1} \dfrac{1}{k} = 1$.

19° Montrons les inégalités : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\left\|T^k\right\|_1 \leqslant 1$ et $\|R_k\|_1 \leqslant 1$
Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $x \neq 0$, et $k \geqslant 1$, on a :

$$
\begin{aligned}
\left\|T^k x\right\|_1 &= \sum_{i=1}^{n}\left|(T^k x)_i\right| \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}(T^k)_{ij}x_j\right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\left|T^k)_{ij}\right|\left|x_j\right| \quad = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{(T^k)_{ij}}_{\geqslant 0}\left|x_j\right| \quad \text{Car } T\geqslant 0 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = \sum_{j=1}^{n}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(T^k)_{ij}}_{=1}\left|x_j\right| \quad \text{car } T \text{ est stochastique} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = \sum_{j=1}^{n}\left|x_j\right| = \|x\|_1
\end{aligned}
$$

On en déduit que $\left\|T^k\right\|_1 = \sup\limits_{x\neq 0}\frac{\left\|T^k x)\right\|_1}{\|x\|_1}\leqslant 1$.

De même $\|R_k\|_1 \leqslant 1$ car R_k est aussi stochastique.

20° Montrons que : $\forall k\in\mathbb{N}^*$; $\|TR_k - R_k\| \leqslant \dfrac{2}{k}$

Soit $k\in\mathbb{N}^*$, Si $k=1$, alors $R_1 = I_n$, donc $TR_1 - R_1 = T - I_n$ et par suite $\|TR_1 - R_1\|_1 = \|T - I_n\|_1 \leqslant \|T\|_1 + \|I_n\|_1 = 1+1 = \frac{2}{1}$
Si $k>1$, on a :
$TR_k - R_k = \dfrac{1}{k}\sum\limits_{j=0}^{k-1}T^{j+1} - \frac{1}{k}\sum\limits_{j=0}^{k-1}T^j = \dfrac{1}{k}\left(\sum\limits_{j=1}^{k}T^j - \sum\limits_{j=0}^{k-1}T^j\right) = \dfrac{1}{k}(T^k - I_n)$, donc $\|TR_k - R_k\|_1 = \left\|\frac{1}{k}(T^k - I_n)\right\|_1 \leqslant \frac{1}{k}\left(\left\|T^k\right\|_1 + \|I_n\|_1\right) \leqslant \dfrac{2}{k}$

21° Soit $x\in\mathbb{C}^n$, montrons que la suite vectorielle $(R_k x)_k$ a au moins une valeur d'adhérence
Comme R_k est stochastique pour tout $k>0$, on a d'après la question 19) : $\|R_k x\|_1 \leqslant \|R_k\|_1\|x\|_1 \leqslant \|x\|_1$. La suite $(R_k x)_k$ est bornée dans l'espace de dimension finie $\mathbb{C}^n$, donc par le théorème de Bolzano-Weiestrass, la suite $(R_k x)_k$ admet au moins une valeur d'adhérence dans $\mathbb{C}^n$.

22° Soit y une valeur d'adhérence de la suite $(R_k x)_{k\geqslant 1}$ et $\varphi:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$, $k\mapsto\varphi(k)$ une extraction telle que $\lim\limits_{k\infty}R_{\varphi(k)}x = y$. Or $\left\|TR_{\varphi(k)}x - R_{\varphi(k)}x\right\|_1 \leqslant \left\|TR_{\varphi(k)} - R_{\varphi(k)}\right\|_1\|x_1\|_1 \leqslant \frac{2}{\varphi(k)}\|x_1\|_1 \underset{k\infty}{\to} 0$, donc $\lim\limits_{k\infty}\left(TR_{\varphi(k)}x - R_{\varphi(k)}x\right) = 0$ (toutes les normes sur C^n sont équivalentes) et comme T est continue sur C^n (application liéaire sur un espace de dimension finie) et que $\lim\limits_{k}R_{\varphi(k)}x = y$, il en résulte que $\lim\limits_{k}TR_{\varphi(k)}x = Ty$ et puis $Ty = y$.

Pour tout $j\in N$, $T^j y = y$ (y point fixe de T), donc $R_k y = \dfrac{1}{k}\sum\limits_{j=0}^{k-1}T^j y = \dfrac{1}{k}\sum\limits_{j=0}^{k-1}y = y$.

23° Soient y et z deux valeurs d'adhérence de la suite $(R_k x)_k$ et m, l deux entiers naturels, on a :
$R_l(R_m x - z) - R_m(R_l x - y) = -R_l z + R_m y = y - z$ (resulte de la question 20) et du fait que R_l et R_m commutent car des polynômes en T) .

24° Montrons que la suite $(R_k x)_k$ admet une seule valeur d'adhérence.
Si y et z sont des vaelurs d'adhérence de la suite $(R_k x)_k$, alors d'après la question 23)

$$
\begin{aligned}
\|y - z\|_1 &= \|R_l(R_m x - z) - R_m(R_l x - y)\|_1 \\
&\leqslant \|R_l(R_m x - z)\|_1 + \|R_m(R_l x - y)\|_1 \\
&\leqslant \|R_l\|_1\|R_m x - z\|_1 + \|R_m\|_1\|R_l x - y\|_1 \\
&\leqslant \|R_m x - z\|_1 + \|R_l x - y\|_1 \qquad\qquad \text{car } \|R_k\|_1 \leqslant 1
\end{aligned}
$$

On prend alors $l=\varphi(k)$ et $m=\psi(k)$ où φ et ψ sont deux extractions telles que $\lim\limits_{k\infty}\left\|R_{\psi(k)}x - z\right\|_1 = 0$ et $\lim\limits_{k\infty}\left\|R_{\varphi(k)}x - y\right\|_1 = 0$, pour déduire que $\lim\limits_{k\infty}\|y - z\|_1 = 0$ et puis $y = z$.

25° Soit $x\in C^n$, *la* suite $(R_k x)_k$ est bornée et admet une unique valeur d'adhérence dans C^n, donc converge dans C^n. Sa limite dépond à priori de x, notons la Rx : $Rx = \lim\limits_{k\infty}R_k x$.

Par linérité de R_k et de la limite, on déduit que R est linéaire (R est donc une matice, d'après d'identification faite au début du problème) .

Si l'on prend $x = E_j$ où $(E_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ est la base canonique de C^n, on a : $\lim\limits_{k} R_k E = RE_j$, donc les suites composantes de $(R_k)_k$ convergent vers les composantes de R et par suite $(R_k)_k$ converge vers R ..

26° Montrons que T et R commutent .
T et R_k commutent car R_k est un polynôme en T. Comme $TR_k = R_k$ pour tout $k \geqslant 1$ et que les applications $\begin{array}{ccc} M_{n,n}(\mathbb{C}) & \to M_{n,n}(\mathbb{C}) \\ M & \mapsto MT \end{array}$ et $\begin{array}{ccc} M_{n,n}(\mathbb{C}) & \to M_{n,n}(\mathbb{C}) \\ M & \mapsto TM \end{array}$ sont continues (car linéaires sur un espace de dimensions finie) , on a donc : $TR = \lim\limits_{k} TR_k = \lim\limits_{k} R_k T = RT$.

27° Montrons que $RT = R$ et $R^2 = R$.
D'après al question 20) la suite $(TR_k - R_k)_k$ converge vers 0 et par la question 25) la suite $(R_k)_k$ converge vers R, donc $(TR_k)_k$ converge vers R. Mais $(TR_k)_k$ converge aussi vers TR, donc $TR = R$..
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $R_k R = \dfrac{1}{k}\sum\limits_{j=0}^{k-1} T^j R = \dfrac{1}{k}\sum\limits_{j=0}^{k-1} RT^j$ et puisque $RT = R$, on a aussi $RT^j = R$ pour tout $j \geqslant 0$, donc $R_k R = \dfrac{1}{k}\sum\limits_{j=0}^{k-1} R = R$.
On fait tendre alors k vers $+\infty$ (l'application $M \mapsto MR$ est continue), il en resulte que $R^2 = R$.

28° Par $TR = R$, on a : $(T - I_n)R = R(T - I_n) = 0$ (T et R commutent). Donc : $\left\{ \begin{array}{l} Im(T - I_n) \subset \ker(R) \\ Im(R) \subset \ker(T - I_n) \end{array} \right.$
De plus $R^2 = R$, donc R est un projecteur tel que $Im(R) \subset \ker(T - I_n)$.

29° On suppose que $\ker(T - I_n) = 1$, alors par la question 28) , $rg(R) \leqslant 1$.
Notons $u = (1, ..., 1)$, on a : $R_k u = u$ pour tout $k \geqslant 1$ car R_k est stochastique. Donc $Ru = \lim\limits_{k\infty} R_k u = u$ et par suite $R \neq 0$ (R est même stochastique).
D'où $rg(R) \geqslant 1$.
On conclut que $Im(R) = \ker(T - I_n)$ et $\ker(R) = Im(T - I_n)$.
On sait que x_0 est un vecteur propre de T associé à la valeur propre 1 (voir questions 13 et 17), donc $\ker(T - I_n) = vect(x_0)$.
Soit $x \in B$, on a $Rx \in Im(R) = \ker(T - I_n) = vect(x_0)$, donc il existe $\lambda \in R$ tel que $Rx = \lambda x_0$ (**).
De (**) on déduit que $\lambda \geqslant 0$ car $R \geqslant 0$ et $x_0 > 0$
De plus

$$\begin{aligned} |\lambda|\,\|x_0\|_1 = \|Rx\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} (Rx)_i && \text{car } R \geqslant 0 \text{ et } x \geqslant 0 \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (R)_{ij} x_j \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} (R)_{ij} x_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (R)_{ij}}_{=1} x_j && R \text{ est stochastique} \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j = \|x\|_1 \end{aligned}$$

Donc $\lambda = |\lambda| = \frac{\|x\|_1}{\|x_0\|_1}$ et par suite $Rx = \frac{\|x\|_1}{\|x_0\|_1} x_0$
Remaque : Si $y \in B \cap \sum = C$, alors $y \in B$ et $\|y\|_1 = 1$, et par suite

$$\lim_{k\infty} R_k y = Ry = \frac{x_0}{\|x_0\|_1}.$$