

A 2003 Math MP 1

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.  
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE  
L'ESPACE,  
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,  
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES  
DE NANCY,  
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2003

**ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES**  
**PREMIÈRE ÉPREUVE**  
**Filière MP**

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

(L'usage d'ordinateur ou de calculatrice est interdit).

Sujet mis à la disposition des concours :

Cycle International, ENSTIM, ENSAE (Statistique), INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première  
page de la copie :

MATHÉMATIQUES 1-Filière MP.

Cet énoncé comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur  
d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les  
raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

**Première partie**

Le but de cette première partie est d'établir des résultats qui seront utiles  
dans la seconde partie.

Étant donné un entier  $n$  strictement positif ( $n \geq 1$ ), soient  $S_n$  et  $I_n$  les deux  
réels définis par les relations ci-dessous :

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \left( \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{i+j+1} \right) ; \quad I_n = \int_0^n dx \int_0^n \frac{dy}{x+y+1}.$$

**Intégrale  $I_n$ .**

1. Calculer, pour toute valeur de l'entier strictement positif  $n$ , l'intégrale  $I_n$ .
2. Déterminer les constantes  $A, B, C$  et  $D$  figurant dans le développement limité de la fonction  $n \mapsto I_n$  à l'infini qui s'écrit sous la forme suivante :

$$I_n = A n + B \ln n + C + \frac{D}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

**Somme  $S_n$  :**

3. Établir un encadrement du réel  $S_n$  à l'aide de  $I_n$ .
4. En déduire que la somme  $S_n$  est équivalente à l'infini à  $2n \ln 2$ .

Soit  $J_n$  l'intégrale suivante :

$$J_n = \int_0^1 \left( \sum_{k=0}^{n-1} x^k \right)^2 dx.$$

**Intégrale  $J_n$  :**

5. Déterminer la relation qui lie l'intégrale  $J_n$  au réel  $S_n$ . En déduire, lorsque l'entier  $n$  croît indéfiniment, un équivalent de  $J_n$  à l'infini.

## Seconde partie

Soit  $E$  un espace préhilbertien réel ; soit  $(x, y) \mapsto (x | y)$  le produit scalaire de cet espace. La norme d'un vecteur  $x$  de  $E$ , déduite de ce produit scalaire est notée  $\|x\|$ .

Étant donné un réel  $\mu$  supérieur ou égal à 1 ( $\mu \geq 1$ ), une suite de  $n$  vecteurs d'un espace euclidien  $E_n$ , de dimension finie  $n$ ,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  est dite  $\mu$ -presque orthogonale (en abrégé  $\mu$ -p.o.) si et seulement si :

- i. les vecteurs  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sont de norme unité,
- ii. pour toute suite finie de  $n$  réels  $a_1, a_2, \dots, a_n$  la norme du vecteur  $\sum_{i=1}^n a_i x_i$  vérifie la double inégalité suivante :

$$\frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^n (a_i)^2 \leq \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\|^2 \leq \mu \sum_{i=1}^n (a_i)^2.$$

Plus généralement : une suite dénombrable  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de vecteurs unitaires d'un espace préhilbertien réel est dite presque orthogonale (p. o.), si et seulement s'il existe un réel  $\mu \geq 1$  tel que, pour tout entier  $n$  strictement positif, pour toute suite extraite  $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_n}$  de la suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et pour toute suite finie de  $n$  réels  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , la norme du vecteur  $\sum_{i=1}^n a_i x_{k_i}$  vérifie la relation suivante :

$$\frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^n (a_i)^2 \leq \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_{k_i} \right\|^2 \leq \mu \sum_{i=1}^n (a_i)^2.$$

Remarque : la suite des indices  $k_1, k_2, \dots, k_n$  de la suite extraite  $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_n}$ , est une suite monotone strictement croissante  $k_1 < k_2 < \dots < k_n$ .

**Premières propriétés :**

Soit  $E_n$  un espace euclidien de dimension  $n$ .

6. Démontrer que, pour qu'une suite de  $n$  vecteurs  $x_1, x_2, \dots, x_n$  soit une base orthonormée de  $E_n$ , il faut et il suffit qu'elle soit une suite 1-presque orthogonale.

7. Démontrer que, si une suite de  $n$  vecteurs  $x_1, x_2, \dots, x_n$  de  $E_n$  est  $\mu$ -presque orthogonale, la suite est libre.

**Un exemple :**

Soit  $E$  l'espace vectoriel des fonctions réelles définies et continues sur le segment  $[0, 1]$  ; le produit scalaire de deux fonctions  $f$  et  $g$  de  $E$  est défini par la relation suivante :

$$(f | g) = \int_0^1 f(x) g(x) dx.$$

Soit  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite des fonctions de  $E$  définies par la relation suivante :

$$P_n(x) = \sqrt{2n+1} x^n.$$

8. Démontrer que, bien que la suite des fonctions  $P_n$  de norme unité soit libre, la suite  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas presque orthogonale.

Soit  $(V_1, V_2, \dots, V_n)$  une suite libre de  $n$  vecteurs indépendants unitaires d'un espace euclidien  $E_n$  de dimension  $n$ . Soit  $M$  la matrice carrée d'ordre  $n$  dont les éléments  $m_{i j}$  sont égaux aux produits scalaires des vecteurs  $V_i$  et  $V_j$ .

$$M = (m_{i j}) \quad ; \quad m_{i j} = (V_i | V_j).$$

Étant donnée une suite de  $n$  réels  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , soit  $A$  le vecteur de  $\mathbb{R}^n$  de coordonnées  $a_1, a_2, \dots, a_n$  et  $W$  le vecteur égal à la combinaison linéaire des vecteurs  $V_1, V_2, \dots, V_n$  avec les coefficients  $a_1, a_2, \dots, a_n$  :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} \quad ; \quad W = \sum_{i=1}^n a_i V_i.$$

**La suite de vecteurs  $(V_1, V_2, \dots, V_n)$  est  $\mu$ -presque orthogonale :**

9. Démontrer l'existence d'une matrice carrée  $P$  orthogonale et d'une matrice diagonale  $D$  dont tous les éléments de la diagonale sont différents de 0, telles que :

$$M = {}^t P.D.P.$$

10. Établir la relation qui lie la norme du vecteur  $W$  au réel  ${}^t A.M.A$  ;  ${}^t A$  désigne la matrice transposée de la matrice colonne  $A$ .

11. En déduire que les éléments de la matrice  $D$  sont strictement positifs, puis en déduire un encadrement de la norme du vecteur  $W$  à l'aide des valeurs propres de la matrice  $M$  et de la norme du vecteur  $B$  égal à l'image par la matrice  $P$  du vecteur  $A$  ( $B = P.A$ ).

12. En déduire que la suite  $(V_1, V_2, \dots, V_n)$  est  $\mu$ -presque orthogonale ; préciser des valeurs possibles pour le réel  $\mu$ .

Soit maintenant  $(V_n)_{n \geq 1}$  une suite dénombrable de vecteurs unitaires d'un espace préhilbertien réel  $E$ .

**Une condition suffisante :**

13. Démontrer que, s'il existe un réel  $\alpha$ , strictement supérieur à 3 ( $\alpha > 3$ ), tel que le produit scalaire de deux vecteurs  $V_p$  et  $V_q$  soit majoré en valeur absolue par le réel  $\alpha^{-|p-q|}$ , c'est-à-dire :

$$|(V_p | V_q)| \leq \frac{1}{\alpha^{|p-q|}},$$

la suite  $(V_n)_{n \geq 1}$  est presque orthogonale.

**Deux questions préliminaires :**

14. Soit  $f$  la fonction définie dans le quart de plan  $[1, \infty[ \times [1, \infty[$  par la relation suivante :

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{2y+1}\sqrt{2xy+1}}{y+xy+1}.$$

Soit  $G$  la fonction, définie sur la demi-droite  $[1, \infty[$ , par la relation suivante :

$$G(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} f(x, y).$$

Étudier les variations des six fonctions définies sur la demi-droite fermée  $[1, \infty[$  par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} x &\longmapsto f(x, 1) ; & y &\longmapsto f(1, y) ; & G &: x \longmapsto \lim_{y \rightarrow \infty} f(x, y) ; \\ y &\longmapsto \lim_{x \rightarrow \infty} f(x, y) ; & f_y &: x \longmapsto f(x, y) ; & f_x &: y \longmapsto f(x, y). \end{aligned}$$

15. Soit  $\gamma$  un réel strictement compris entre 0 et 1 ( $0 < \gamma < 1$ ). Démontrer l'existence d'une fonction  $\varphi_\gamma$ , définie sur la demi-droite fermée  $[1, \infty[$ , telle que, pour tout réel  $y$  de la demi-droite  $[1, \infty[$ , la relation ci-dessous soit vérifiée :

$$f(\varphi_\gamma(y), y) = \gamma.$$

Démontrer l'existence d'un réel  $\beta$  tel que la fonction  $G$ , définie ci-dessus, prenne la valeur  $\gamma$  en ce point :  $G(\beta) = \gamma$ . Démontrer que ce réel  $\beta$  est strictement supérieur à 1 et est un minorant de l'image par  $\varphi_\gamma$  de la demi-droite fermée  $[1, \infty[$ .

Soit  $(P_{k_i})$  une suite extraite de la suite des polynômes considérés à la question 8. L'application  $i \mapsto k_i$  est une suite strictement croissante. Pour simplifier les notations, soit  $Q_i$  le polynôme  $P_{k_i}$  :

$$Q_i = P_{k_i}.$$

**Étude de la suite  $(Q_i)_{i \geq 0}$  :**

16. On choisit une suite  $(k_i)_{i \geq 0}$  telle que la suite  $(Q_i)_{i \geq 0}$  soit presque orthogonale.

Démontrer que le réel  $\mu$  entrant dans la définition de la presque orthogonalité est strictement supérieur à 1 ( $\mu > 1$ ).

Démontrer qu'il existe un réel  $\beta$ , strictement supérieur à 1 ( $\beta > 1$ ), tel que, pour tout indice  $i$ , les indices  $k_i$  et  $k_{i+1}$  soient liés par la relation suivante :

$$k_{i+1} \geq \beta k_i.$$

FIN DU PROBLÈME