MINES-PONTS 2001. Filière MP. MATHÉMATIQUES 1.

Corrigé de JL. Lamard (jean-louis.lamard@prepas.org)

I.1. Premières propriétés.

a. Si x est vecteur co-propre (non nul) associé à μ_1 et μ_2 il vient $(\mu_1 - \mu_2)x = 0$ donc $\mu_1 = \mu_2$ car $x \neq 0$. CQFD.

b. Si μ est valeur co-propre et x vecteur co-propre associé, il vient immédiatement (tenant compte de la semi-linéarité) que $e^{i\theta}$ est également valeur co-propre et que $e^{-i\theta/2}x$ est vecteur co-propre associé. CQFD.

c. E_μ est un espace vectoriel réel mais n'est pas un espace vectoriel complexe.

d. Il vient immédiatement que la composée de deux applications semi-linéaires est linéaire.

I.2. Matrice associée à une application semi-linéaire.

a. Soit $A = \big(a_{ij}\big)$ avec a_{ij} la i^{eme} composante de $u(e_j)$ sur la base $\mathcal{B} = (e_k)$. Soit $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k$ et $y = u(x)$.

Il vient $y = \sum\limits_{k=1}^{n} \overline{x_k} u(e_k)$ donc $y_i = \sum\limits_{k=1}^{n} \overline{x_k} a_{ik}$. Ainsi $\boxed{Y = A\overline{X}}$. CQFD.

b Soit x quelconque de E et soit $y = u(x)$. Avec des notations claires on a, d'après **a.** ci-dessus : $Y = A\overline{X}$ et $Y' = B\overline{X'}$. Or $Y = SY'$ et $X = SX'$ donc $SY' = A\overline{SX'} = A\overline{S}\ \overline{X'}$ soit $Y' = \Big(S^{-1}A\overline{S}\Big)\overline{X'}$ puisque S est inversible. Il en résulte que $\Delta X' = 0$ avec $\Delta = B - S^{-1}A\overline{S}$ et cela pour tout vecteur x donc pour toute colonne X'. En prenant X' successivement égal aux vecteurs de la base canonique de $\mathbb{C}^n$, il vient que toutes les colonnes de Δ sont nulles donc que Δ est nulle. Ainsi $\boxed{B = S^{-1}A\overline{S}}$.

I.3. Exemples.

a. Si X est vecteur co-propre (non nul) associé à la valeur co-propre μ il vient $\begin{cases} \overline{b} = -\mu a \\ \overline{a} = \mu b \end{cases}$ donc $\begin{cases} b = -|\mu|^2 b \\ \overline{a} = \mu b \end{cases}$.
Or $X \neq 0$ donc $b \neq 0$ car $b = 0$ implique $a = 0$ donc $X = 0$. Ainsi $|\mu|^2 = -1$ ce qui est impossible.
La rotation d'angle $\pi/2$ n'admet aucune valeur co-propre.

b. Si A est réelle et admet une valeur propre réelle λ alors il existe X vecteur réel non nul tel que $AX = \lambda X$. Or $X = \overline{X}$ de sorte que $A\overline{X} = \lambda X$.
Si $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de la matrice réelle A alors elle est également valeur co-propre .

I.4. Valeurs co-propre de A et valeurs propres de $A\overline{A}$.

a. De $A\overline{X} = \mu X$ on tire immédiatement $A\overline{A}X = |\mu|^2 X$. CQFD.

b. Avec les notations de l'énoncé :

- Supposons $A\overline{X}$ et X liés. Comme $X \neq 0$, il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $A\overline{X} = \alpha X$ ce qui implique que α est valeur co-propre de A. D'après **a.** ci-dessus $A\overline{A}X = |\alpha|^2 X$. Donc $\lambda X = |\alpha|^2 X$ et $\lambda = |\alpha|^2$ car $X \neq 0$. Il en résulte qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha = \sqrt{\lambda}e^{i\theta}$. Comme α est valeur co-propre de A, il en découle d'après **1.b.** que $\sqrt{\lambda} = \alpha e^{-i\theta}$ est également valeur co-propre . CQFD.
- Supposons désormais $A\overline{X}$ et X indépendants. Il est naturel de chercher un vecteur co-propre associé à $\sqrt{\lambda}$ dans le plan engendré par ces deux vecteurs ce qui revient à chercher un vecteur co-propre de la forme $Y = A\overline{X} + \alpha X$. Or $A\overline{Y} = \lambda X + \overline{\alpha} A\overline{X}$. On constate que $\alpha = \sqrt{\lambda}$ convient. CQFD.
  Autre solution dans ce cas : soit u l'application semi-linéaire de matrice A dans la base canonique. On vérifie facilement que le plan engendré par les deux vecteurs $A\overline{X}$ et X est stable par u et que la matrice de la restriction v de u à ce plan dans la base $\big(A\overline{X}, X\big)$ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$. Or cette matrice est réelle et admet $\sqrt{\lambda}$ comme valeur propre donc, d'après **3.b.**, $\sqrt{\lambda}$ est valeur co-propre de v donc de u. CQFD.

c. Il découle immédiatement de **a.** et de **b.** que :
$\mu \geqslant 0$ est valeur co-propre de A si et seulement si μ^2 est valeur propre de $A\overline{A}$.

I.5. Cas d'une matrice triangulaire supérieure.

a. Soit A triangulaire supérieure de diagonale donc de spectre $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Classiquement la matrice $A\overline{A}$ est triangulaire supérieure de diagonale donc de spectre $(|\lambda_1|^2, |\lambda_2|^2, \ldots, |\lambda_n|^2)$. Ainsi si λ est valeur propre de A alors $|\lambda|^2$ est valeur propre de $A\overline{A}$. D'après **4.** ci-dessus, $|\lambda|$ est valeur co-propre de A, donc λ également d'après **1.b.**, donc encore $\lambda e^{i\theta}$ pour tout réel θ toujours d'après **1.b.** CQFD.

b. Si μ est valeur co-propre de A alors $|\mu|$ également d'après **1.b.** donc $|\mu|^2$ est valeur propre de $A\overline{A}$ donc figure sur la diagonale. Donc il existe λ sur la diagonale de A donc valeur propre de A tel que $|\lambda|^2 = |\mu|^2$. Donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda = \mu e^{i\theta}$. CQFD.

En résumé :
Soit A triangulaire. Si λ est valeur propre de A alors $\lambda e^{i\theta}$ est valeur co-propre de A pour tout réel θ.
Réciproquement si μ est valeur co-propre de A il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\mu e^{i\theta}$ soit valeur propre de A.

c. D'après **a.** ci-dessus, 1 est bien valeur co-propre de A et, avec les notations de l'énoncé, $A\overline{X} = X \iff \begin{cases} a = b + c \\ d = c \end{cases}$
E_1 est un plan de $\mathbb{C}^2$ identifié à $\mathbb{R}^4$.

I.6. Une caractérisation des valeurs co-propres.

$\mu = \mu_1 + i\mu_2$ (avec μ_1 et μ_2 réels) est valeur co-propre de $A = B + iC$ si et seulement si il existe $Z = X + iY \neq 0$ (avec X et Y réels) tel que $A\overline{Z} = \mu Z$ c'est à dire tel que $\begin{cases} BX + CY = \mu_1 X - \mu_2 Y \\ CX - BY = \mu_2 X + \mu_1 Y \end{cases} \quad (S)$.
Supposons μ valeur co-propre . Alors $|\mu|$ aussi d'après **1.b.**. En reportant dans (S) ci-dessus avec $\mu_1 = |\mu|$ et $\mu_2 = 0$ il vient que $D\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = |\mu| \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ donc $|\mu|$ est valeur propre de D puisque $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ est non nul.
Réciproquement supposons que $|\mu|$ soit valeur propre de D. Alors (S) implique que $|\mu| = |\mu| + i0$ est valeur co-propre de A donc μ aussi d'après **1.b.**

μ est valeur co-propre de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ si et seulement si $|\mu|$ est valeur propre de $D \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

II.1. Une relation d'équivalence.

D'après **I.2.b.** A et B sont en relation si et seulement si elles repèrent la même application semi-linéaire dans deux bases différentes. Il est alors patent qu'il s'agit bien d'une relation d'équivalence. CQFD.
La relation de co-similitude est une relation d'équivalence.

II.2. Indépendance des vecteurs co-propres.

D'après **I.4.a.** la famille $\big(X_1, X_2, \ldots, X_k\big)$ est une famille de vecteurs propres de $A\overline{A}$ associés aux valeurs propres $|\mu_1|^2, |\mu_2|^2, \ldots, |\mu_k|^2$ qui sont deux à deux distinctes donc cette famille est libre par le théorème d'indépendance linéaires des sous-espaces propres. CQFD.
Il en découle immédiatement d'après **I.4.c.** que :

Si la matrice $A\overline{A}$ admet n valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ positives ou nulles et deux à deux distinctes alors A est co-diagonalisable en $\operatorname{diag}\big(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}\big)$.

II.3. Quelques propriétés.

a. Il vient immédiatement que $A\overline{A} = I_n$.

b. Pour toute matrice A, on peut trouver $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $-e^{-2i\theta}$ ne soit pas valeur propre donc tel que $A + e^{-2i\theta} I_n$ soit inversible donc $S(\theta)$ aussi.
Si on suppose en outre que $A\overline{A} = I_n$ alors $A\overline{S}(\theta) = S(\theta)$ d'où $A = S(\theta)\overline{S}^{-1}(\theta)$.
En résumé :
$A\overline{A} = I_n$ si et seulement si il existe $S \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = S\overline{S}^{-1}$ c'est à dire A co-semblable à I_n.

II.4. Une condition nécessaire de co-diagonalisibilité.

Notons $S^{-1}A\overline{S} = D = \operatorname{diag}(\lambda_, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Il vient $A\overline{A} = S\,\mathrm{D}\,\overline{D}S^{-1}$.
Ainsi $A\overline{A}$ est semblable à $D\overline{D} = \operatorname{diag}(|\lambda_1|^2, |\lambda_2|^2, \ldots, |\lambda_n|^2)$ donc est bien diagonalisable avec des valeurs propres positives ou nulles. En outre le rang de A est égal à celui de D (puisque S est inversible) donc au nombre de λ_i non nuls donc encore au rang de $D\overline{D}$ donc à celui de $A\overline{A}$ (car semblable). CQFD.

II.5. Une condition suffisante de co-diagonalisibilité.

a. $B\overline{B} = \Big(S^{-1}A\overline{S}\Big)\big(\overline{S}^{-1}\overline{A}S\big) = S^{-1}A\overline{A}S = \Lambda$ Or Λ est réelle. Donc $B\overline{B} = \overline{B}B = \Lambda$.
Il vient alors $B\Lambda = B\big(B\overline{B}\big) = B\big(\overline{B}B\big) = \big(B\overline{B}\big)B = \Lambda B$. *Ainsi Λ et B commutent.*

b. Comme la matrice B commutent avec la matrice Λ, les sous-espaces propres de Λ sont stables par B. Donc :
La matrice B s'écrit par blocs sous la forme proposée.

c. De $B\overline{B} = \Lambda$ on tire par blocs que $B_i\overline{B}_i = \lambda_i I_{n_i}$.
Si $\lambda_i > 0$ on en déduit par **II.3.b.** que $\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i}} B_i$ est co-semblable à I_{n_i} donc que B_i est co-semblable à $\sqrt{\lambda_i} I_{n_i}$.
Comme $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_k \geqslant 0$ il vient que ceci est valable pour i de 1 à $k-1$.
Si $\lambda_k > 0$ c'est également vrai pour $i = k$.

Mais c'est encore vrai pour $i = k$ même si $\lambda_k = 0$. En effet dans ce cas il vient $\mathrm{rg}(A\overline{A}) = \mathrm{rg}(\Lambda) = n_1+n_2+\cdots+n_{k-1}$ et $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B) = \mathrm{rg}(B_1)+\mathrm{rg}(B_2)+\cdots+\mathrm{rg}(B_k)$. Or pour $i \leqslant k-1$, B_i est co-semblable à $\sqrt{\lambda_i} I_{n_1}$ donc $\mathrm{rg}(B_i) = n_i$. Comme par hypothèse $A\overline{A}$ et A ont même rang, il vient que $\mathrm{rg}(B_k) = 0$ donc que $B_k = 0$ et ainsi B_k (matrice nulle) est bien co-semblable $\sqrt{\lambda_k} I_{n_k}$ (matrice nulle).
Ainsi B_i est co-semblable à $\sqrt{\lambda_i} I_{n_i}$ pour tout i de 1 à k. Il en découle immédiatement par blocs que B est co-semblable à la matrice Δ obtenue à partir de Λ en remplaçant les λ_i par $\sqrt{\lambda_i}$.
Or A est co-semblable à B donc à Δ. CQFD.
En résumé :

Les trois propriétés constituent une condition nécessaire et suffisante de co-diagonalisibilité.

II.6. Exemples.

a. Si A est symétrique réelle, elle est (ortho-)semblable à $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ donc $A\overline{A} = A^2$ est semblable à D^2 et la condition précédente est clairement satisfaite. CQFD.

Une matrice symétrique réelle est co-diagonalisable.

Remarque : une matrice hermitienne n'est pas forcément co-diagonalisable. En effet par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas co-diagonalisable car est de rang 1 alors que $A\overline{A} = 0$.

b. $A\overline{A} = I_2$ donc la condition est clairement satisfaite. *A est co-diagonalisable.*

$B\overline{B} = 2\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dont les valeurs propres ne sont pas réelles. *B n'est pas co-diagonalisable.*

$C\overline{C} = 0$ alors que C est de rang 1. *C n'est pas co-diagonalisable.*

$D\overline{D} = I_2$ et la condition est clairement satisfaite. *D est co-diagonalisable.*

FIN