Concours commun Mines-Ponts 2000

Corrigé de la seconde épreuve de mathématiques

1.a Nous pouvons appliquer le critère de d'Alembert :

$$\frac{C_{2n+2}^{n+1}}{C_{2n}^{n}} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 4,$$

donc le rayon R est égal à $1/4$.

1.b On sait que h est de classe C^1 avec $h'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)C_{2n+2}^{n+1}x^n$ pour tout $x \in]-R, R[$. Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
\forall x \in]-R,R[,\ (1-4x)h'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)C_{2n+2}^{n+1}x^n - 4\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)C_{2n+2}^{n+1}x^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)C_{2n+2}^{n+1}x^n - 4\sum_{n=1}^{+\infty}nC_{2n}^{n}x^n \\
&= C_2^1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(2n+1)(2n+2)}{n+1} - 4n\right)C_{2n}^{n}x^n \\
&= 2 + \sum_{n=1}^{+\infty}2C_{2n}^{n}x^n \\
&= 2\,h(x).
\end{aligned}$$

1.c La solution générale (sur $]-\infty, 1/4[$) de l'équation différentielle est $y(x) = \dfrac{\lambda}{\sqrt{1-4x}}$ où λ décrit $\mathbb{R}$. Comme $h(0) = 1$, nous obtenons $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-4x}}$ pour tout $x \in]-1/4, 1/4[$.

2. On sait que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in]-1,1[$, nous avons

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{k}x^k.$$

En particulier :

$$M_p(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{-p}{k}(-x)^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-p)(-p-1)\dots(-p-k+1)}{k!}(-x)^k = \sum_{k=0}^{+\infty}C_{p+k-1}^{k}x^k$$

pour tout $x \in]-1,1[$. Le coefficient en x^k du développement en série entière de M_p est donc égal à C_{p+k-1}^{k}.

3.a Le trinôme $1 - 6x + x^2$ s'annule en $3 - \sqrt{8}$ et $3 + \sqrt{8}$. La fonction f est donc définie sur le domaine $D_f =]-\infty, 3-\sqrt{8}[\cup]3+\sqrt{8}, +\infty[$.

3.b Soit $x \in D_f$ (en particulier, $x \neq 1$). On a alors :

$$-1/4 < \frac{x}{(1-x)^2} < 1/4 \iff -(1+x)^2 < 0 < 1 - 6x + x^2.$$

La quantité $\dfrac{1}{1-x}h\left(\dfrac{x}{(1-x)^2}\right)$ est donc bien définie, sauf quand $x=-1$, avec :

$$\frac{1}{1-x}h\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)=\frac{1}{(1-x)\sqrt{1-4\dfrac{x}{(1-x)^2}}}=f(x)\,\frac{|1-x|}{1-x}.$$

Le relation demandée est donc vérifiée pour $x\in D_f$ avec $x\neq -1$ et $x<1$, i.e. pour $x\in\,]-\infty,3-\sqrt{8}\,[\,\setminus\{-1\}$. En particulier, on peut écrire :

$$f(x)=\frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{+\infty}C_{2n}^{n}\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{C_{2n}^{n}}{(1-x)^{2n+1}}\,x^n$$

pour tout $x\in\,]-1,3-\sqrt{8}\,[$. Il vient donc $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda_n M_{2n+1}(x)x^n$ pour tout $x\in\,]-1,3-\sqrt{8}\,[$, en posant $\lambda_n=C_{2n}^{n}$.

3.c Soit $x\in\,]-1,3-\sqrt{8}\,[$. Comme $x\in\,]-1,1\,[$, nous pouvons écrire :

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda_n\left(\sum_{k=0}^{+\infty}C_{2n+k}^{k}x^k\right)x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\lambda_n\left(\sum_{m=n}^{+\infty}C_{m+n}^{m-n}\,x^m\right).$$

Nous devons maintenant échanger l'ordre des deux sommations. Notons donc $u_{n,m}$ le réel égal à 0 si $m<n$ et à $\lambda_n\,C_{m+n}^{m-n}\,x^m$ sinon. Pour $x\in\,]-3+\sqrt{8},3-\sqrt{8}\,[$, la famille $(u_{n,m})$ est sommable, puisque pour tout n, la série $\sum_{m\geq 0}|u_{n,m}|$ converge ainsi que la série $\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{m=0}^{+\infty}|u_{n,m}|\right)$. Il est donc possible d'échanger l'ordre de sommation :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty}u_{n,m}\right)=\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_{n,m}\right),$$

ce qui donne :

$$f(x)=\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_{n,m}\right)=\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{m}\lambda_n C_{m+n}^{m-n}\right)x^m,$$

pour tout $x\in\,]-3+\sqrt{8},3-\sqrt{8}\,[$. La fonction f est donc développable en série entière au voisinage de 0, le coefficient a_n demandé étant égal à $\displaystyle\sum_{n=0}^{m}C_{2n}^{n}\,C_{m+n}^{m-n}$.

Nous avons montré précédemment que la série $\sum_{n\geq 0}a_n x^n$ était convergente pour $|x|<3-\sqrt{8}$. Nous en déduisons que le rayon de convergence de la série entière est au moins égal à $3-\sqrt{8}$. D'autre part, la quantité $f(x)$ tendant vers l'infini quand x tend vers $3-\sqrt{8}$, le rayon de convergence est au plus égal à $3-\sqrt{8}$: il est donc égal à $3-\sqrt{8}$.

3.d Nous avons $(1-6x+x^2)f^2(x)=1$, d'où $(-6+2x)f^2(x)+(2(1-6x+x^2)f(x)f'(x)=0$, puis

$$(-3+x)f(x)+(1-6x+x^2)f'(x)=0$$

pour tout $x\in D_f$ (car f ne s'annule pas). f vérifie donc l'équation différentielle $a(x)f'(x)+b(x)f(x)=0$ avec $a(x)=1-6x+x^2$ et $b(x)=-3+x$.

3.e Comme $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$ et $f'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ pour tout $x\in\,]-3+\sqrt{8},3-\sqrt{8}\,[$, nous avons

$$0 \;=\; (1-6x+x^2)\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n+(-3+x)\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n=1}^{+\infty}6na_nx^n + \sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)a_{n-1}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty}3a_nx^n + \sum_{n=1}^{+\infty}a_{n-1}x^n \\
&= a_1 - 3a_0 + (2a_2 - 6a_1 - 3a_1 + a_0)x + \sum_{n=2}^{+\infty}\left((n+1)a_{n+1} - 6na_n + (n-1)a_{n-1} - 3a_n + a_{n-1}\right)x^n \\
&= a_1 - 3a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left((n+1)a_{n+1} - 3(2n+1)a_n + na_{n-1}\right)\, x^n
\end{aligned}$$

pour tout $x \in]-3+\sqrt{8}, 3-\sqrt{8}[$. Par unicité du développement en série entière de la fonction nulle, nous obtenons $a_1 = 3a_0$ et $\forall n \geq 1$, $(n+1)a_{n+1} - 3(2n+1)a_n + na_{n-1} = 0$.

Nous avons en particulier :

$$a_0 = f(0) = 1,\ a_1 = 3a_0 = 3,\ a_2 = \frac{9a_1 - a_0}{2} = 13,\ a_3 = \frac{15a_2 - 2a_1}{3} = 63.$$

4.a Si la suite (b_n) existe, elle vérifie $b_0 = 0$, $b_1 = 1$ et $(\mathbf{R})$. Elle est donc déterminée sans ambiguïté :

$$\begin{cases} b_0 = 0, \\ b_1 = 1, \\ \forall n \geq 2, b_n = \dfrac{3(2n-1)b_{n-1} - (n-1)b_{n-2}}{n}. \end{cases}$$

Si le rayon R_b de la série est non nul, nous avons :

$$(1-6x+x^2)g'(x) + (-3+x)g(x) = b_1 - 3b_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left((n+1)b_{n+1} - 3(2n+1)b_n + nb_{n-1}\right)\, x^n = 1$$

pour tout $x \in]-R_b, R_b[$. g est donc solution de l'équation différentielle linéaire (non homogène) :

$$(1-6x+x^2)y' + (-3+x)y = 1.$$

4.b Nous supposons toujours que la fonction g existe. Il suffit de vérifier que l'application $G :\ x \longmapsto f(x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ vérifie les conditions : $a(x)G'(x) + b(x)G(x) = 1$ et $G(0) = 0$ pour assurer l'égalité de g et de G sur $]-R_b, R_b[\cap]-\infty, 3-\sqrt{8}[$ (théorème de Cauchy-Lipschitz : les fonctions a et b sont continues et a ne s'annule pas sur le domaine considéré). La condition $G(0) = 0$ est clairement vérifiée, puis

$$\begin{aligned}
a(x)G'(x) + b(x)G(x) &= (1-6x+x^2)f'(x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + (1-6x+x^2)f^2(x) + (-3+x)f(x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= 1 + \left[(1-6x+x^2)f'(x) + (-3+x)f(x)\right]\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 1.
\end{aligned}$$

4.c Il est maintenant temps de démontrer que g existe [1] ! Les questions a et b montrent qu'il existe au plus une applications g vérifiant les conditions demandées. Soit donc G définie par $G(x) = f(x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout x dans $]-\infty, 3-\sqrt{8}[$. Comme f est développable en série entière au voisinage de 0, il en est de même de $x \longmapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, ainsi que de G, par produit de Cauchy. Nous pouvons donc enfin poser $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_nx^n$

[1] L'énoncé est relativement mal posé, la distinction entre l'analyse et la synthèse n'étant pas faite !

avec $c_0 = 0$ et $c_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\, a_{k-1}a_{n-k}$ pour $n \geq 1$, cette fonction étant définie au moins sur l'intervalle $]-3+\sqrt{8}, 3-\sqrt{8}[$. On a évidemment $g = G$ sur l'intersection de leurs domaines de définition. G étant solution de l'équation différentielle $(1-6x+x^2)y' + (-3+x)y = 1$, nous en déduisons que $c_1 = G'(0) = 1$, puis que $(n+1)c_{n+1} - 3(2n+1)c_n + nc_{n-1} = 0$ pour tout $n \geq 1$. Autrement dit, la suite (c_n) est égale à la suite (b_n). Nous avons donc démontré l'existence et l'unicité de g :

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

pour $|x| < R_b$, avec $R_b \geq 3 - \sqrt{8}$ et $b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\, a_{k-1}a_{n-k}$ pour tout $n \geq 0$.

4.d On a $d_n b_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{d_n}{k}\, a_{k-1}a_{n-k} \in \mathbb{Z}$, puisque les a_i sont entiers (d'après la formule du 3.c), ainsi que d_n/k pour $1 \leq k \leq n$.

5.a On obtient directement $u_1 = 1$ et $u_2 = 1/2$. Pour $n \geq 1$, nous avons :

$$u_{n+1} = \begin{vmatrix} a_n & b_n \\ a_{n+1} & b_{n+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_n & b_n \\ \frac{3(2n+1)}{n+1}a_n - \frac{n}{n+1}a_{n-1} & \frac{3(2n+1)}{n+1}b_n - \frac{n}{n+1}b_{n-1} \end{vmatrix} = \frac{n}{n+1}\, u_n.$$

Nous en déduisons donc que $u_n = 1/n$ pour tout $n \geq 1$: la suite est décroissante et positive. Le plus petit de ses majorants est son premier terme : $C = u_1 = 1$.

5.b Comme $a_n = \sum_{n=0}^{m} C_{2n}^{n}\, C_{m+n}^{m-n}$ pour tout $n \geq 0$, a_n est un entier naturel non nul. On peut donc définir la suite $(b_n/a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Posons $q_n = b_n/a_n$. Nous avons : $q_n - q_{n-1} = \dfrac{u_n}{a_n a_{n-1}}$, et donc $0 < q_n - q_{n-1} \leq \dfrac{1}{a_n a_{n-1}}$ pour tout $n \geq 1$.

D'autre part, la suite a_n est strictement croissante. On a en effet $a_0 = 1 < 3 = a_1$ et si nous supposons que $a_{n-1} < a_n$ pour un certain $n \geq 1$, alors

$$a_{n+1} = \frac{3(2n+1)a_n - na_n}{n+1} > \frac{3(2n+1)a_n - na_n}{n+1} \geq \frac{5n+3}{n+1}a_n \geq a_n.$$

Comme $a_0 = 1$ et comme les a_n sont entiers, nous avons donc $a_n \geq n+1$. Ainsi,

$$0 \leq q_n - q_{n-1} \leq \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

et la série de terme général $q_n - q_{n-1}$ est convergente (critère de comparaison des séries à termes positifs). Ceci traduit simplement la convergence de la suite q_n vers un certain $\lambda > 0$.

6.a Comme $f(x) \sim \frac{1}{\sqrt[4]{32}\sqrt{3-\sqrt{8}-x}}$ quand x tend vers $3-\sqrt{8}$ par valeurs inférieures, on en déduit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $(3-\sqrt{8})^-$ et que l'intégrale impropre $\int_0^{3-\sqrt{8}} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Ainsi $g(x)$ tend également vers $+\infty$ (on peut d'ailleurs se contenter de la minoration : $g(x) \geq f(x)\int_0^{0,1} f(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout x compris enre $0,1$ et $3-\sqrt{8}$).

La fonction f est clairement croissante au voisinage de $3-\sqrt{8}$, ainsi que la fonction $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Comme f et F sont positive au voisinage de $3-\sqrt{8}$, g est également croissante au voisinage de $3-\sqrt{8}$. On en déduit que $f(x)$ et $g(x)$ tendent vers $+\infty$ en croissant quand x tend vers $3-\sqrt{8}$ par valeurs inférieures.

6.b Comme les a_n sont tous positifs, nous avons

$$a_n(\lambda - \varepsilon) \leq b_n \leq a_n(\lambda + \varepsilon)$$

pour tout $n \geq N$, puis

$$a_n x^n(\lambda-\varepsilon) \leq b_n x^n \leq a_n x^n(\lambda+\varepsilon)$$

pour tous $n \geq N$ et $x \geq 0$, puis

$$U_N(x)(\lambda-\varepsilon) \leq V_N(x) \leq U_N(x)(\lambda+\varepsilon)$$

pour tout $x \in]0, 3-\sqrt{8}\,[$, qui est l'encadrement demandé ($U_N(x)$ est strictement positif pour $x>0$).

6.c Les fonctions f_N et g_N sont polynomiales, elles sont donc majorées sur le compact $[0, 3-\sqrt{8}]$ par une même constante A.

On en déduit que $f(x) \sim U_N(x)$ et $g(x) \sim V_N(x)$ au voisinage de $(3-\sqrt{8})^-$, puis que $\dfrac{g(x)}{f(x)} \sim \dfrac{V_N(x)}{U_N(x)}$ au voisinage de $(3-\sqrt{8})^-$. Il existe alors un réel strictement positif η (avec $\eta < 3-\sqrt{8}$) tel que

$$1-\varepsilon \leq \frac{g(x)}{f(x)}\frac{U_N(x)}{V_N(x)} \leq 1+\varepsilon$$

pour tout $x \in]\,3-\sqrt{8}-\eta, 3-\sqrt{8}\,[$ (en supposant que ε est inférieur à 1). Ainsi,

$$(1-\varepsilon)(\lambda-\varepsilon) \leq \frac{g(x)}{f(x)} \leq (1+\varepsilon)(\lambda+\varepsilon)$$

pour tout $x \in]\,3-\sqrt{8}-\eta, 3-\sqrt{8}\,[$. Autrement dit, pour tout $\varepsilon < 1$, il existe $\eta > 0$ (qui ne dépend que de ε et de N, i.e. qui ne dépend que de ε) tel que

$$\lambda-\varepsilon(1+\lambda) \leq \lambda-\varepsilon(1+\lambda-\varepsilon) \leq \frac{g(x)}{f(x)} \leq \lambda+\varepsilon(1+\lambda+\varepsilon) \leq \lambda+\varepsilon(2+\lambda)$$

pour tout $x \in]\,3-\sqrt{8}-\eta, 3-\sqrt{8}\,[$. Ainsi, $g(x)/f(x)$ tend vers λ quand x tend vers $(3-\sqrt{8})^-$.

6.d On a déjà remarqué que $g(x)/f(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ converge vers $\int_0^{3-\sqrt{8}} f(t)\,\mathrm{d}t$ quand x tend vers $3-\sqrt{8}$. Nous avons donc :

$$\lambda = \int_0^{3-\sqrt{8}} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\ln 2}{2}.$$

7.a Pour tout $n \geq 1$, nous avons :

$$\sqrt{n+1}\,a_{n+1} - \frac{6n+3}{\sqrt{n+1}}\,a_n + \frac{n}{\sqrt{n+1}}\,a_{n-1} = 0,$$

soit

$$v_{n+1} - \frac{6n+3}{\sqrt{(n+1)n}}\,v_n + \frac{n}{\sqrt{(n+1)(n-1)}}\,v_{n-1} = 0,$$

en posant $v_k = \sqrt{k}a_k$ pour tout $k \geq 0$. Autrement dit,

$$v_{n+1} - 6v_n + v_{n-1} = \left(\frac{6n+3}{\sqrt{n(n+1)}} - 6\right)v_n + \left(1 - \frac{n}{\sqrt{(n+1)(n-1)}}\right)v_{n-1},$$

En posant $A_n = n^2\left(\dfrac{6n+3}{\sqrt{n(n+1)}} - 6\right)$ et $B_n = n^2\left(1 - \dfrac{n}{\sqrt{(n+1)(n-1)}}\right)$, nous avons bien

$$v_{n+1} - 6v_n + v_{n-1} = \frac{1}{n^2}\left(A_n v_n + B_n v_{n-1}\right).$$

Il reste à faire un développement asymptotique pour vérifier que A_n et B_n ont une limite finie en $+\infty$:

$$\frac{6n+3}{\sqrt{n^2+n}} = \left(6+\frac{3}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1/2} = \left(6+\frac{3}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{3}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 6+\frac{3}{4n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$1-\frac{n}{\sqrt{n^2-1}} = 1-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}} = -\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On en déduit que A_n et B_n tendent respectivement vers $\dfrac{3}{4}$ et $-\dfrac{1}{2}$ quand n tend vers l'infini.

7.b Le polynôme r^2-6r+1 admet deux racines distinctes $3-\sqrt{8}$ et $3+\sqrt{8}$. Il existe donc α et β tels que, pour tout $n \geq 0$, $w_n = \alpha(3-\sqrt{8})^n + \beta(3+\sqrt{8})^n$. Les conditions initiales donnent facilement : $\alpha = -\frac{3\sqrt{2}}{8}$ et $\beta = \frac{3\sqrt{2}}{8}$. Nous avons donc :

$$w_n = \frac{3\sqrt{2}}{8}\left((3+\sqrt{8})^n-(3-\sqrt{8})^n\right)$$

pour tout $n \geq 0$, puis $w_n \sim_{+\infty} \frac{3\sqrt{2}}{8}(3+\sqrt{8})^n$.

7.c En admettant que v_n et w_n sont équivalents, nous obtenons directement :

$$a_n = \frac{v_n}{\sqrt{n}} \sim_{+\infty} \frac{3\sqrt{2}}{8}\,\frac{(3+\sqrt{8})^n}{\sqrt{n}}.$$

8.a Posons $K_1 = \dfrac{3\sqrt{2}}{8}$. Comme $\dfrac{\sqrt{n}\,a_n}{K_1\,e^{nu}}$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini, cette quantité est comprise entre 1/2 et 2 à partir d'un certain rang N_1.

8.b Nous savons que $0 \leq \dfrac{b_n}{a_n} - \dfrac{b_{n-1}}{a_{n-1}} \leq \dfrac{1}{a_n a_{n-1}}$ pour tout $n \geq 1$. En sommant ces inégalités, nous obtenons :

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{b_k}{a_k} - \frac{b_{k-1}}{a_{k-1}} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{a_k a_{k-1}}$$

pour tout $n \geq 0$. Comme b_k/a_k tend vers λ quand n tend vers l'infini, la première somme est égale à $\lambda - \dfrac{b_n}{a_n}$. Enfin, pour $n \geq N_1$,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{a_k a_{k-1}} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{4\sqrt{k}\sqrt{k-1}}{K_1^2\,e^{(2k-1)u}} \leq \frac{4\,e^u}{K_1^2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{k}{e^{2ku}}.$$

On a pour $q \in]-1,1[$:

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} kq^k = q\,\frac{d}{d\,q}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} q^k\right) = \frac{q^{n+1}}{1-q}\left[n+\frac{1}{1-q}\right],$$

d'où $\lambda - \dfrac{b_n}{a_n} = O\left(n\,e^{-2un)}\right)$ quand n tend vers l'infini. Comme pour tout $a \in]0,2[$, $n\,e^{-2nu}$ est négligeable devant e^{-anu}, on en déduit que $\lambda - \dfrac{b_n}{a_n} = O\left(e^{-aun}\right)$. Il existe donc une constante K_2 telle que l'encadrement demandé soit vérifié (pour tout $n \geq 0$).

8.c Notons $(p_i)_{i\geq 1}$ la suite croissante des nombres premiers. Tout entier $k \in [1,n]$ s'écrit d'une unique façon sous la forme

$$k = p_1^{v_1(k)} p_2^{v_2(k)} \ldots p_{N(n)}^{v_{N(n)}(k)}$$

avec $v_1(k), v_2(k), \ldots, v_{N(n)}(k) \in \mathbb{N}$. Le p.p.c.m. des n premiers entiers s'écrit donc :

$$d_n = p_1^{v_1} p_2^{v_2} \ldots p_{N(n)}^{v_{N(n)}}$$

avec $v_i = \max\{v_i(1), v_i(2), \ldots, v_i(n)\}$ pour tout i compris entre 1 et $N(n)$. Pour chacun de ces i, nous avons $p_i^{v_i} \leq n$, puisque $p_i^{v_i}$ divise l'un des entiers compris entre 1 et n. On en déduit que $d_n \leq n^{N(n)}$. Enfin, $N(n)$ étant équivalent à $n/\ln n$ à l'infini, il est majoré par $\dfrac{11\,n}{10\,\ln n}$ à partir d'un certain rang, ce qui donne $d_n \leq e^{1{,}1\,n}$ pour n assez grand.

8.d On peut remarquer que p_n et q_n ne sont pas (en général) premiers entre eux ($p_4 = 1335$ et $q_4 = 3852$ ont 3 pour p.g.c.d.). Ceci dit, on a $\lambda - \frac{p_n}{q_n} = \lambda - \frac{b_n}{a_n}$. Il suffit donc de démontrer que $e^{-anu} = O\left(\frac{1}{q_n^{r+1}}\right)$ au voisinage de l'infini pour un certain $a \in]0,2[$ et pour un certain $r > 0$ pour prouver l'existence de r, de N_3 et de K_3. Or, pour n assez grand :

$$0 \leq q_n \leq 2K_1 \, \frac{e^{1{,}1\,n+nu}}{\sqrt{n}} = O\left(\frac{e^{(u+1{,}1)n}}{\sqrt{n}}\right) = O\left(\frac{e^{\frac{un}{0{,}61}}}{\sqrt{n}}\right).$$

En choisissant r strictement compris entre 0 et $0,22$, nous aurons :

$$(\sqrt{n})^{r+1}\, e^{-\frac{r+1}{0{,}61}nu} = O\left(\frac{1}{q_n^{r+1}}\right).$$

On peut enfin fixer a tel que $2 > a > \dfrac{r+1}{0,61}$ (car $2 > \dfrac{r+1}{0,61}$) et on a bien

$$e^{-anu} = O\left((\sqrt{n})^{r+1}\, e^{-\frac{r+1}{0{,}61}nu}\right) = O\left(\frac{1}{q_n^{r+1}}\right).$$

8.e Supposons que λ soit rationnel : $\lambda = p/q$ avec p et q entier naturels non nuls. Alors pour tout rationnel p'/q' (avec $q' > 0$) distinct de λ, nous avons :

$$\left|\lambda - \frac{p'}{q'}\right| = \frac{|pq' - p'q|}{qq'} \geq \frac{1}{qq'},$$

puisque $pq' - p'q$ est un entier non nul. Comme la suite b_n/a_n croît strictement vers λ, p_n/q_n est pour tout n un rationnel distinct de λ. On en déduit l'inégalité demandée, en posant $L = 1/q$.

8.f D'après la question 8.d, la suite $q_n\left(\lambda - \frac{p_n}{q_n}\right)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ (elle est positive et majorée par q_n^{-r} avec $q_n \longrightarrow +\infty$). λ n'est donc pas rationnel, car sinon, cette même suite serait minorée par une constante L strictement positive. On en déduit donc que $\ln 2 = 2\,\lambda$ n'est pas rationnel [2].

[2] Utiliser le théorème des nombres premiers pour montrer l'irrationalité de $\ln 2$, il fallait oser le faire !

FICHE D'ÉVALUATION DES SUJETS DE CONCOURS

Libellé complet de l'épreuve : **Concours Commun MINES-Ponts option MP, deuxième épreuve de Mathématiques**

Nom : LEGROS Stéphane, professeur de la MP du lycée Pierre CORNEILLE de Rouen

Adresse : 5, rue de la Briqueterie 76 130 Mt St Aignan

Tel : 02 35 74 91 63

Titre proposé pour l'épreuve : Suites d'entiers, séries génératrices et propriétés asymptotiques (et incidemment : $\ln 2$ n'est pas rationnel).

ÉVALUATION

I. Erreurs d'énoncé - influence des calculatrices

Il y a trois erreurs dans l'énoncé;, mais aucune ne porte à conséquence :

1. À la question 6.b, il faut remplacer $x \in [0, 3-\sqrt{8}[$ par $x \in]0, 3-\sqrt{8}[$;
2. À la question 8.b, il faut lire "5.b" au lieu de "5.d" (erreur sans incidence puisqu'il n'existe pas de question 5.d) ;
3. À la question 8.d, l'auteur affirme que p_n et q_n sont premiers entre eux, ce qui est faux en général (le p.g.c.d. de p_4 et q_4 est 3), mais l'erreur est encore sans incidence puisque l'on n'a pas à utiliser cette propriété fausse.

Les calculatrices étaient interdites.

II. Conformité au programme

Aucune question n'est hors programme.

L'esprit du programme est également respecté, mais on demande des qualités de calculs que peu d'élèves possèdent aujourd'hui. Le premier tiers du problème est toutefois facilement traitable.

Par contre, le cours d'analyse n'est que partiellement couvert : séries entières, recherche d'équivalent du terme général d'une suite, équations différentielles linéaires d'ordre 1 et un soupçon d'arithmétique.

Qualités qui me semblent le plus testées :

- le cours sur les séries entières et le théorème d'échange de deux sommes infinies doivent être parfaitement connus ;
- le pb est assez technique, les majorations demandées demandant beaucoup de calculs ; les méthodes choisies par l'énoncé ne sont d'ailleurs pas toujours les plus simples (on peut simplifier plusieurs preuves en utilisant des relations de comparaison) ;
- pas de difficulté de modélisation, d'imagination ou de choix de méthode.
- un peu d'intuition, certains résultats devant être devinés.

Originalité du sujet : sujet classique de manipulation de suite d'entiers par le biais de séries génératrices.

Intérêt mathématique du sujet : très limité, le but affiché ($\ln 2 \notin \mathbb{Q}$) n'étant pas raisonnable en regard des propriétés admises (en particulier le th. des nombres premiers) !

III. Tri, Niveau de difficulté

Longueur du sujet : Sujet trop long (calculs lourds, candidats mal guidés).

Difficulté et caractère progressif : quelques questions très délicates et techniques ; il était très difficile de sauter une question, de nombreux résultats intermédiaires (indispensables pour la suite) n'étant pas énoncés dans le texte.

Notes significatives : oui pour le premier tiers, mais sans doute pas pour les suivants. Par contre, les très bons candidats seront facilement détectés.

Autres remarques : l'énoncé présente quelques maladresses :

- À la question 5.a), on étudie la suite (u_n), et on montre facilement que $u_n = 1/n$. L'énoncé demande ensuite d'étudier le signe, la croissance et de donner un majorant de u_n. Ces questions évidentes poussent le candidat à douter de la validité de la relation $u_n = 1/n$, qu'il est laborieux de vérifier sans machine, même pour $n = 3$. On demande ensuite en 5.b d'en déduire une majoration "en fonction de n, a_n et a_{n-1}", sans en dire plus. Plusieurs de mes élèves ont alors hésité à se lancer dans des calculs lourds, doutant de leur majoration de départ ;
- Plusieurs questions sont vagues ("trouver une équa. diff. vérifier par g",...), et il est souvent indispensable d'énoncer les solutions pour résoudre les questions suivantes ;
- La démarche choisie à la question 6. est très lourde et l'utilisation de relations de prépondérance était beaucoup plus efficace ;
- De nombreuses propriétés sont admises : la relation

$$\int_0^{3-\sqrt{8}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-6x+1}} = \frac{\ln 2}{2}$$

  est donnée par l'énoncé, et c'est très bien : cela évite un calcul un peu fastidieux. Par contre, on admet dans la question 7.c que le terme w_n obtenu en perturbant la relation de récurrence définissant (v_n) est équivalent à v_n au voisinage de $+\infty$ (ce qui n'est pas du tout évident), et on termine le problème en admettant le théorème des nombres premiers (8.c), uniquement pour démontrer que $\ln 2 \notin \mathbb{Q}$!

IV. Parties du programmes utilisées

2. Suites et séries numériques ;
5. Séries entières ;
7. Intégrales sur un intervalle quelconque (à peine) ;
9. Équations différentielles.

Aucune question ne peut être abordée en première année. Il est d'ailleurs presque impossible (sans réécrire le sujet) d'isoler une partie du sujet.