ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2000

**MATHÉMATIQUES**

**PREMIÈRE ÉPREUVE**
**FILIÈRE MP**
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Sujet mis à la disposition des concours : ENSAE (Statistique), ENSTIM, INT, TPE-EIVP.

**L'emploi de la calculette est interdit**.

Les candidats sont priés de mentionner de façon très apparente sur la première page de la copie : MATHÉMATIQUES I - MP.

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP, comporte 5 pages.

Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le but de ce problème est l'étude d'endomorphismes définis par l'action d'un groupe sur un espace vectoriel de matrices complexes.

Soit $M$ l'ensemble des matrices complexes $m$ d'ordre 2 qui s'écrivent sous la forme suivante :

$$m = \begin{pmatrix} a & i\,b \\ i\,\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}.$$

Dans cette relation, $a$ et $b$ sont des nombres complexes, $i$ vérifie $i^2 = -1$, $\bar{a}$ (resp. $\bar{b}$) est le nombre complexe conjugué de $a$ (resp. $b$).

## Partie préliminaire

**0. L'ensemble $M$ est un espace vectoriel réel** :

Démontrer qu'en munissant l'ensemble $M$ de l'addition des matrices et de la multiplication des matrices par un réel, l'ensemble $M$ est un espace vectoriel réel. Préciser sa dimension.

Démontrer que le produit de deux matrices $m_1$ et $m_2$ de l'espace $M$ appartient à $M$.

Soit $I$ la matrice unité d'ordre 2. Soit $m$ une matrice appartenant à l'espace vectoriel $M$ ; la matrice transposée de la matrice $m$ est notée ${}^t m$. Si $p$ est un entier naturel, $m^p$ est le produit de la matrice $m$ p-fois par elle-même ; classiquement $m^0 = I$.

Soit $G$ le sous-ensemble des matrices $g$ appartenant à l'espace $M$ dont le déterminant est égal à 1 :

$$G = \{g \in M \mid \det g = 1\}.$$

Il est admis que l'ensemble $G$ est, pour le produit des matrices, un groupe.

Soit $U$ le sous-ensemble des matrices $u$ de l'espace $M$ antisymétriques dont le carré est égal à l'opposé de la matrice identité :

$$U = \left\{u \in M \mid u + {}^t u = 0,\ u^2 = -I\right\}.$$

Soit $V$ le sous-ensemble des matrices symétriques $v$ appartenant à l'espace $M$ :

$$V = \{v \in M \mid v = {}^t v\}.$$

Il est admis que le sous-ensemble $V$ de $M$ est un sous-espace vectoriel réel.

Soient $m_1$ et $m_2$ deux matrices appartenant à l'espace vectoriel $M$ ; il est admis que la trace de la matrice $\overline{m}_1.{}^t m_2$ est réelle ; soit $(m_1 \mid m_2)$ le réel défini par la relation suivante :

$$(m_1 \mid m_2) = \frac{1}{2} Tr(\overline{m}_1.{}^t m_2) = \frac{1}{2} Tr(m_1.{}^t \overline{m}_2).$$

L'égalité entre les traces des matrices $\overline{m}_1.{}^t m_2$ et $m_1.{}^t \overline{m}_2$ est admise.

Il est admis que l'espace $(M, (. \mid .))$ est un espace euclidien. Si le produit scalaire $(m_1 \mid m_2)$, de deux matrices $m_1$ et $m_2$, est nul, ces matrices sont dites perpendiculaires. Le sous-espace vectoriel $V$ de $M$ est un espace euclidien lorsqu'il est muni du produit scalaire induit par celui de $M$.

## Première partie

**I.1. Propriétés élémentaires des matrices de l'espace** $M$ :

Soit $m$ une matrice de l'espace $M$ ; démontrer que les matrices $m + {}^t\overline{m}$ et $m.{}^t\overline{m}$ s'expriment au moyen de la matrice identité $I$, du déterminant $\det m$, de la trace $Tr m$ de la matrice $m$.

Soit $g$ une matrice appartenant à $M$ ; déduire du résultat précédent que, pour qu'une matrice $g$ de l'espace $M$ appartienne au groupe $G$, il faut et il suffit qu'il existe une relation simple entre les matrices $g^{-1}$ et ${}^t\overline{g}$.

Soit $m$ une matrice de l'espace $M$ dont la trace est nulle $(Tr m = 0)$ ; établir la relation : $m = -{}^t\, \overline{m}$ ; calculer les matrices $m^2$, $({}^t m)^2$ en fonction du déterminant de la matrice $m$ et de la matrice unité $I$.

**I.2 Matrices** $u$ :

Déterminer les matrices $u$ qui appartiennent à l'ensemble $U$ défini ci-dessus.

Soit $m$ une matrice de l'espace $M$, $u$ une matrice de l'ensemble $U$. Comparer les deux produits de matrices : $m.u$ et $u.\overline{m}$. Démontrer que, lorsque la trace de la matrice $m$ est nulle $(Tr m = 0)$, les deux matrices $m.u$ et $u.m$ appartiennent au sous-espace vectoriel $V$.

**I.3. Norme d'une matrice** $m$ :

Soit $m$ une matrice de l'espace $M$ ; calculer la norme de la matrice $m$ $\left(\| m \| = \sqrt{(m \mid m)}\right)$ en fonction du déterminant de cette matrice. Comparer pour deux matrices $m$ et $w$ de l'espace $M$ la norme $\| m.w \|$ du produit des matrices $m$ et $w$ avec le produit $\| m \| . \| w \|$ des normes de ces matrices.

**I.4. Matrices appartenant à** $G$ :

a. Démontrer que toute matrice $g$ appartenant au groupe $G$ s'écrit, de manière unique, sous la forme

$$g = I\ \cos\theta + m,$$

où $\theta$ est un réel appartenant au segment $[0,\pi]$ et $m$ une matrice de trace nulle $(Trm = 0)$ qui appartient à $M$.

Calculer, en fonction du réel $\theta$, le déterminant de la matrice $m$, ainsi définie à partir de la matrice $g$, ainsi que le carré $m^2$ de la matrice $m$.

b. Soit $m$ une matrice de l'espace $M$ différente de 0 $(m \neq 0)$ : démontrer que la matrice $g_1$ définie par la relation ci-dessous appartient au groupe $G$ :

$$g_1 = \frac{1}{\sqrt{\det m}} m.$$

**I-5 Un sous-groupe de** $G$ :

Soit $g_1$ une matrice, de trace nulle $(Trg_1 = 0)$, appartenant à $G$ ; soit $G(g_1)$ l'ensemble des matrices $m_\theta$ définies par la relation suivante

$$m_\theta = I\ \cos\theta + g_1\ \sin\theta,$$

où $\theta$ est un réel quelconque appartenant au segment $[0,2\pi]$ ; soit :

$$G(g_1) = \left\{m_\theta = I\ \cos\theta + g_1\ \sin\theta \ \middle|\ \theta \in [0,2\pi]\right\}.$$

a. Démontrer que l'ensemble $G(g_1)$ est un sous-groupe commutatif du groupe $G$.

b. Soit $m$ une matrice de l'espace $M$ ; la matrice exponentielle de la matrice $m$ est définie par la relation

$$\exp m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\ m^n.$$

Calculer la matrice $\exp(\theta.g_1)$.

## Deuxième partie

Cette partie est consacrée à l'étude d'une application définie dans le sous-espace vectoriel $V$ des matrices symétriques de $M$ à l'aide d'une matrice du groupe $G$.

Dans toute cette partie, $g$ est une matrice donnée du groupe $G$, de trace nulle $(Trg = 0)$ ; étant donnée une matrice $w$ appartenant au sous-espace vectoriel $V$ soit $l_g(w)$ la matrice définie par la relation suivante :

$$l_g(w) = g.w + w.{}^tg.$$

**II-1. L'endomorphisme $l_g$ de** $V$ :

a. Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel réel $V$ de l'espace vectoriel $M$. Déterminer une base de ce sous-espace vectoriel.

b. Démontrer que l'application $l_g : w \mapsto l_g(w)$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $V$. Démontrer que cet endomorphisme $l_g$ n'est pas nul.

**II-2. Propriétés de l'endomorphisme $l_g$** :

a. Comparer l'endomorphisme $l_g \circ l_g : w \mapsto l_g(l_g(w))$ à l'endomorphisme $w \mapsto 2g.l_g(w)$. Calculer l'expression $l_g(g.l_g(w))$ en fonction de $l_g(w)$.

Comparer les deux normes $\| \ l_g(w) \ \|$ et $\| \ g.l_g(w) \ \|$.
Calculer, pour une matrice $u$ de l'ensemble $U$, l'expression $l_g(g.u)$.

b. Déterminer une relation simple qui lie, pour deux matrices quelconques $v$ et $w$ de l'espace $V$, les produits scalaires $(l_g(v) \mid w)$ et $(v \mid l_g(w))$.
En déduire l'endomorphisme adjoint de l'endomorphisme $l_g$.

c. Déduire des résultats précédents, que, pour toute matrice $w$ de $V$, les matrices $l_g(w)$ et $g.l_g(w)$ sont perpendiculaires.

**II-3. Une base de l'espace** $V$ :
Etant données une matrice $v$ de l'espace vectoriel $V$ telle que son image par l'endomorphisme $l_g$ soit différente de 0 ($l_g(v) \neq 0$), une matrice $u$ de l'ensemble $U$ ($u$ appartient à $M$, est antisymétrique, $u^2 = -I$), soient $h_0$ le produit des matrices $g$ et $u$, $h_1$ l'image de la matrice $v$ par l'application $l_g$, $h_2$ le produit des matrices $g$ et $h_1$ :

$$h_0 = g.u,\ h_1 = l_g(v),\ h_2 = g.l_g(v).$$

a. Calculer les produits scalaires de la matrice $u$ avec chacune des matrices $h_i, 0 \leq i \leq 2$, et des matrices $h_i, 0 \leq i \leq 2$, deux à deux :

$$(u \mid h_i),\ 0 \leq i \leq 2,\ (h_k \mid h_l), 0 \leq k \leq l \leq 2.$$

b. Démontrer que la suite des matrices $h_i$, $0 \leq i \leq 2$, est une base de l'espace vectoriel $V$. Déduire de cette base une base orthonormée. Quelle est la matrice associée à l'endomorphisme $l_g$ dans cette base ? Déterminer la transformation géométrique associée à l'endomorphisme $\frac{1}{2} l_g$.

**II-4. Un endomorphisme de l'espace vectoriel** $M$ :
Soit $\theta$ un réel donné appartenant au segment $[0, 2\pi]$ ; soit $m_\theta$ la matrice appartenant au groupe $G$ (question I-5) définie par la relation suivante :

$$m_\theta = I\cos\theta + g\sin\theta.$$

Soit $s_\theta$ l'application qui, à une matrice $w$ de l'espace vectoriel $M$, associe la matrice $m_\theta.w$ :

$$s_\theta \ : \ w \mapsto m_\theta.w.$$

Déterminer la matrice associée à l'endomorphisme $s_\theta$ dans la base définie par les matrices $u,\ h_0,\ h_1,\ h_2$.

## Troisième partie

Soit $m$ une matrice donnée de l'espace vectoriel $M$. A toute matrice $w$ du sous-espace vectoriel $V$ de $M$ est associée la matrice $m.w.{}^tm$.

**III-1. Endomorphisme $\psi_m$ de l'espace** $V$ :
a. Démontrer que l'application $w \mapsto m.w.{}^tm$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $V$. L'endomorphisme $w \mapsto m.w.{}^tm$ de $V$ est noté $\psi_m$.
Calculer $m.u.{}^tm$ où $u$ est une matrice de l'ensemble $U$.

b. Déterminer les matrices $m$ de l'espace vectoriel $M$ pour lesquelles l'application $\psi_m$ est l'application identité.

**III-2. Endomorphisme $\psi_g$** :
Soit $g$ une matrice, différente des matrices $I$ (identité) et $-I$, appartenant au groupe $G$.

a. Démontrer, à l'aide de la question I-4, qu'il existe un réel $\theta$ appartenant à l'intervalle ouvert $]0,\pi[$ et une matrice $m,$ appartenant à $M$, différente de 0, de trace nulle, tels que la relation ci-dessous soit vérifiée :

$$g = I\cos\theta + m\ ;\ \theta \in\ ]0,\pi[,\ m \in M.$$

Soit $\gamma$ la matrice définie à partir de la matrice $m$ par la relation suivante :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\det m}}m.$$

b. Exprimer, pour toute matrice $w$ de l'espace vectoriel $V$, la matrice $\psi_g(w)$ en fonction des matrices $w,\ l_\gamma(w), \psi_\gamma(w)$ et du réel $\theta$.

c. Soit $v$ une matrice de l'espace vectoriel $V$ telle que son image par l'application $l_\gamma$ soit différente de 0 ($l_\gamma(v) \neq 0$). D'après la question II-3.b, la famille $\gamma.u,\ l_\gamma(v),\ \gamma.l_\gamma(v)$ est une base de l'espace vectoriel $V$. Déterminer la matrice associée à l'endomorphisme $\psi_g$ dans cette base. Calculer le déterminant de cette matrice noté $\det\psi_g$. Caractériser la transformation géométrique définie par l'endomorphisme $\psi_g$.

**III-3. Endomorphisme** $\psi_m$ :

Soit $m$ une matrice, différente des matrices 0, $I$ et $-I$, appartenant à l'espace vectoriel $M$. Démontrer qu'il existe une matrice $g$ appartenant au groupe $G$ telle que l'endomorphisme $\psi_m$ soit proportionnel à l'isomorphisme $\psi_g$. En déduire une interprétation géométrique de l'endomorphisme $\psi_m$.

FIN DU PROBLEME