

Partie préliminaire

**(0.) L'ensemble  $M$  est un espace vectoriel réel.**

Notons que  $M = \{ \operatorname{Re} a \cdot I + \operatorname{Im} a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \operatorname{Re} b \cdot \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \operatorname{Im} b \cdot \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \}$ .

Ceci permet de voir que c'est un  $\mathbb{R}$ -ev de dimension 4 (engendré par les quatre matrices explicitées).

Pour démontrer que le produit de deux matrices  $m_1$  et  $m_2$  de l'espace  $M$  appartient encore à  $M$ , il suffit de vérifier que c'est vrai pour ces quatre générateurs.

C'est un peu fastidieux, mais

- La première matrice est l'identité, neutre pour la multiplication
- le carré de chacune des trois autres matrices  $u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$  est dans  $M$ , à savoir  $u^2 = I = w^2, v^2 = -I$ ,
- le produit de deux quelconques de ces trois matrices est au signe près la troisième. Plus précisément,

$$u \cdot v = -w = -v \cdot u \quad v \cdot w = v \cdot (v \cdot u) = v^2 \cdot u = -u \quad \text{et similairement} \quad w \cdot v = u, \quad u \cdot w = -w \cdot u = v$$

$M$  est donc stable par multiplication: c'est une sous-algèbre de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ .

Soit  $m = \begin{pmatrix} a & ib \\ i\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in G$ : la condition  $\det m = 1$  signifie tout simplement que  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ .

(Rem: en identifiant  $M$  à  $\mathbb{C}^2$ ,  $G$  est la sphère unité).

Comme  $\det$  est un morphisme multiplicatif et  $\{1\}$  un sous-groupe de  $(\mathbb{C}^*, \times)$  il est trivial que l'ensemble  $G$  est un groupe pour le produit des matrices (admis).

Les autres résultats admis sont tout aussi faciles.

Première partie

**(I.1) Propriétés élémentaires des matrices de l'espace  $M$  :** Soit  $m = \begin{pmatrix} a & ib \\ i\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in M$  ;

$$m + {}^t\bar{m} = \begin{pmatrix} a & ib \\ i\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{a} & -ib \\ -i\bar{b} & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + \bar{a} & 0 \\ 0 & a + \bar{a} \end{pmatrix} = \operatorname{tr} m \cdot I$$

$$m \cdot {}^t\bar{m} = \begin{pmatrix} a & ib \\ i\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \bar{a} & -ib \\ -i\bar{b} & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2 + |b|^2 & 0 \\ 0 & |a|^2 + |b|^2 \end{pmatrix} = \det m \cdot I$$

Pour qu'une matrice  $g$  de l'espace  $M$  appartienne au groupe  $G$  il faut et il suffit donc que  $g^{-1} = {}^t\bar{g}$ .

L'autre relation trouvée ci-dessus prouve que si  $m$  est une matrice de l'espace  $M$ ,

$$\operatorname{tr}(m) = 0 \iff m + {}^t\bar{m} = 0 \iff m = -{}^t\bar{m}$$

Calculons plus généralement  $m^2$ , pour cela on ruse:

$$\operatorname{tr} m \cdot m = m \cdot (\operatorname{tr} m \cdot I) = m \cdot (m + {}^t\bar{m}) = m^2 + m \cdot {}^t\bar{m} = m^2 + \det m \cdot I \quad (\text{on reconnaît Cayley-Hamilton !})$$

et donc  $m^2 = \operatorname{tr} m \cdot m - \det m \cdot I = -\det m \cdot I$  puisque  $\operatorname{tr} m = 0$ .

De même (transposer ne change pas le det)  $({}^t m)^2 = -\det m \cdot I$ .

**(I.2) Matrices  $u$  :**

Soit  $u = \begin{pmatrix} a & ib \\ i\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in U$  : on a donc (sucessivement)

$$a = 0 \quad b \in i\mathbb{R} \quad |b|^2 = 1 \quad b = \pm i \quad u = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \mp 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dépasse... composition du pb ! Soient  $m$  une matrice de l'espace  $M$ ,  $u$  une matrice de l'ensemble  $U$ . On peut donc (au signe près) poser  $u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ . Prenons  $m = \begin{pmatrix} a & ib \\ i\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ : il vient

$$m.u = \begin{pmatrix} a & ib \\ i\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ib & a \\ -\bar{a} & i\bar{b} \end{pmatrix} \quad u.\bar{m} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{a} & -i\bar{b} \\ -ib & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ib & a \\ -\bar{a} & i\bar{b} \end{pmatrix}$$

Ces deux produits sont donc égaux.

Lorsque la trace de la matrice  $m$  est nulle, c'est à dire que  $a$  est imaginaire pur, on a  $a = -\bar{a}$ , c'est à dire que  $m.u$  est symétrique (non réelle !) De même pour  $u.m = \bar{m}.u$  en raisonnant sur  $\bar{m}$ . Par stabilité de  $M$  pour le produit, on est donc dans  $V$ .

**(I.3) Norme d'une matrice  $m$  :**

Soit  $m$  une matrice de l'espace  $M$  ;

$$\|m\| = \sqrt{|m|m|} = \sqrt{\frac{1}{2} \text{tr}({}^t\bar{m}.m)} = \sqrt{\frac{1}{2} \text{tr}(m.{}^t\bar{m})} = \sqrt{\frac{1}{2} \text{tr}(\det m.I)} = \sqrt{\det m}$$

Pas d'inquiétude: le déterminant d'un élément de  $M$  est toujours un réel positif ! on en déduit pour  $m$  et  $w$  dans  $M$

$$\|m.w\| = \sqrt{\det(m.w)} = \|m\| \cdot \|w\|$$

car  $\det$  et  $\sqrt{\phantom{x}}$  sont des morphismes multiplicatifs (passent aux produits, en bref).

(Remarque: cette astuce nous évite LA vérification pénible sur les quaternions...)

**(I.4) Matrices appartenant à  $G$  :**

(a) Soit  $g = \begin{pmatrix} a & ib \\ i\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$  appartenant au groupe  $G$ ; cela signifie que  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ . On peut donc poser  $a = \cos \theta + ci$ ,

puisque  $|\text{Re } a| \leq |a| \leq 1$ . Il vient alors  $g = \cos \theta I + m$ , où  $m = \begin{pmatrix} ci & ib \\ i\bar{b} & -ci \end{pmatrix} \in M$  et  $\text{tr } m = 0$ .

Le déterminant de la matrice  $m$  vaut  $c^2 + |b|^2 = (|a|^2 - \cos^2 \theta) + |b|^2 = 1 - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta$ .

Enfin  $m^2 = \begin{pmatrix} -c^2 - |b|^2 & 0 \\ 0 & -c^2 - |b|^2 \end{pmatrix} = -\sin^2 \theta.I$ .

(b) Soit  $m$  une matrice de l'espace  $M$  différente de 0 ; alors

$g_1 = \frac{1}{\sqrt{\det m}} m$  vérifie  $g_1 \in M$  et  $\det g_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{\det m}}\right)^2 \cdot \det m = 1$ , donc  $g_1 \in G$ .

Rem: au passage on remarque que toute matrice non nulle  $m$  de  $M$  admet un inverse dans  $M$ , qui est  $\frac{1}{\sqrt{\det m}} {}^t\bar{m}$ . La notion de corps non commutatif n'étant pas au programme, il est juste que cette propriété ne soit pas évoquée par le sujet.

**(I.5) Un sous-groupe de  $G$  :**

Remarquons pour le plaisir que  $G(g_1)$  est une ellipse !

(a)  $G(g_1)$  est (aussi) un sous-groupe commutatif du groupe  $G$ . En effet, si l'on considère deux éléments de  $G_1$ , par exemple  $m_\theta$  et  $m_\psi$ , on a

$$m_\theta.m_\psi = (I \cos \theta + g_1 \sin \theta).(I \cos \psi + g_1 \sin \psi) = I \cdot \cos \theta \cos \psi + g_1(\sin \theta + \sin \psi) + g_1^2 \sin \theta \sin \psi$$

et comme  $g_1^2 = -\det g_1.I = -I$ , il reste

$$m_\theta.m_\psi = I \cdot (\cos \theta \cos \psi - \sin \theta \sin \psi) + g_1(\cos \theta \sin \psi + -\sin \theta \cos \psi) = m_{\theta+\psi}$$

On peut vérifier dans l'élan que  $m_\theta^{-1} = m_{-\theta}$ , mais la relation qui nous venons d'obtenir prouve que l'on a un (iso)morphisme entre le groupe des angles (modulo  $2\pi$ ) et le groupe  $G(g_1)$ .

(b) On peut couper la somme en 2 car la famille de tous les termes est sommable:

$$\exp(\theta.g_1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \theta^n g_1^n = \sum_{n \text{ pair}} \frac{1}{n!} \theta^n g_1^n + \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n!} \theta^n g_1^n = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\theta^{2p}}{(2p)!} (-1)^p I + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\theta^{2p+1}}{(2p+1)!} (-1)^p g_1$$

puisque  $g_1^2 = -I$ . Moralité: on reconnaît les séries définissant sinus et cosinus, et donc

$$\exp(\theta.g_1) = \cos \theta I + \sin \theta g_1 = m_\theta$$

## Deuxième partie

(II.1) L'endomorphisme  $l_g$  de  $V$  :

(a) Soit  $m = \begin{pmatrix} a & ib \\ i\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in V$ . La seule condition est donc  $b \in \mathbb{R}$  (termes non diagonaux imaginaires purs), il reste 3 degrés de liberté sur 4, 3 est la dimension de  $V$ . Prouvons-le en donnant une base: un tel  $m$  s'écrit

$$m = b \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \operatorname{Re} a. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \operatorname{Im} a. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Les trois matrices étant visiblement indépendantes ( $m = 0 \iff a = b = 0$ ) constituent une base de  $V$ .

(b)  $l_g(w) = g.w + w.^t g$  est une application de  $V$  dans  $V$ , car si  $w \in V$  on a

$${}^t(l_g(w)) = {}^t(g.w) + {}^t(w.^t g) = {}^t w.^t g + g^t w = l_g(w)$$

et par ailleurs  $l_g(w) \in M$ , ce dernier espace étant stable par produit et par transposition.

Enfin  $l_g$  est linéaire (produits...): c'est bien un endomorphisme de l'espace vectoriel  $V$ .

Il n'est pas nul, car par exemple  $l_g(I) = g + {}^t g$  ne peut être nul que si  $g \in G$  est antisymétrique, soit  $g \in U$ ;

mais alors nous avons vu que  $g = \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ , auquel cas  $l_g \left( \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \right) \neq 0$ .

(II.2) Propriétés de l'endomorphisme  $l_g$  :

(a) •  $l_g \circ l_g(w) = l_g(l_g(w)) = g.(g.w + w.^t g) + (g.w + w.^t g).^t g = -w + 2g.w.^t g - w = 2g.w.^t g - 2w$ .  
Par ailleurs,  $2g.l_g(w) = 2g.(g.w + w.^t g) = -2w + 2g.w.^t g$  (on a utilisé que  $g^2 = ({}^t g)^2 = -I$ ). Donc

$$\text{Les deux endomorphismes coïncident (sur } V \text{)}$$

En appliquant cette propriété à  $l_g(w)$  comme à  $w$ , il vient

- $l_g(g.l_g(w)) = \frac{1}{2} l_g \circ l_g \circ l_g(w) = \frac{1}{2} l_g \circ l_g[l_g(w)] = \frac{2}{2} g.l_g[l_g(w)] = g.2g.l_g[w] = -2l_g(w)$ .
- Comme  $\|g.h\| = \|g\|.\|h\|$  dans  $M$  et  $\|g\| = \sqrt{\det g} = 1$ , les deux normes  $\|l_g(w)\|$  et  $\|g.l_g(w)\|$  sont égales.
- Considérons une matrice  $u$  de l'ensemble  $U$ , via **I.2** qui s'applique car  $\operatorname{tr} g = 0$ , il vient

$$l_g(g.u) = g.(g.u) + (g.u).^t g = -u + (u.\bar{g}).^t g = -u + u.I = 0 \quad (\bar{g}.^t g = \bar{g}.\bar{g} = I)$$

(b) Soient  $v$  et  $w$  dans l'espace  $V$ ,  $\operatorname{tr} g = 0$  et donc  $g^2 = -I$  c'est à dire que  $g^{-1} = {}^t \bar{g} = -g$ ; d'où

$$\begin{aligned} (l_g(v)|w) &= \frac{1}{2} \operatorname{tr}((g.v + v.^t g).\bar{w}) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(g.v.\bar{w}) - \frac{1}{2} \operatorname{tr}(v.\bar{g}.\bar{w}) \quad (\text{car } {}^t g = -\bar{g}) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\bar{w}.g.v) - \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\bar{g}.\bar{w}.v) \quad (\text{car la trace "commute"; transposons:}) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{tr}({}^t v.^t g.^t \bar{w} - {}^t v.^t \bar{w}.^t \bar{g}) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}({}^t v(-\bar{g}.^t \bar{w} - {}^t \bar{w}.^t \bar{g})) \quad (\text{et pour finir conjugons:}) \\ &= -\frac{1}{2} \operatorname{tr}({}^t \bar{v}.(g.^t w + {}^t w.^t g)) = -\frac{1}{2} \operatorname{tr}({}^t \bar{v}.(g.w + w.^t g)) = -(v | l_g(w)) \end{aligned}$$

(en utilisant que  ${}^t w = w$ .) Ce qui signifie que l'endomorphisme adjoint de  $l_g$  est  $-l_g$  !

$$l_g \text{ est antisymétrique, ie } l_g^* = -l_g$$

réels obtient *hic et nunc* orthogonal à l'image, etc...

(c) Soit  $w \in V$ , on a compte tenu de ce qui précède

$$(l_g(w) | g.l_g(w)) = (w | l_g^*(g.l_g(w))) = (w | -l_g(g.l_g(w))) = (w | 2l_g(w)) = (2l_g^*(w) | w) = -(2l_g(w) | w) = 0$$

puisque cette quantité est égale à son opposé. Ces deux matrices sont donc orthogonales dans l'espace euclidien  $V$  ("perpendiculaires", comme dit l'énoncé).

**(II.3) Une base de l'espace  $V$  :**

(a)  $(u | h_0) = (u | g.u) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(g.u.t\bar{u}) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} g = 0$  par hypothèse;

$$(u | h_1) = (u | l_g(v)) = (-l_g(u) | v) = (0 | v) = 0;$$

$$(u | h_2) = (u | g.l_g(v)) = (u | \frac{1}{2}l_g(l_g(v))) = (-l_g(u) | l_g(v)) = 0$$

$$(h_0 | h_0) = \|g.u\|^2 = \|g\|^2 \|u\|^2 = 1.1 = 1$$

$$(h_1 | h_1) = \|l_g(v)\|^2 > 0 \text{ par hypothèse;}$$

$$(h_2 | h_2) = \|g.h_1\|^2 = \|h_1\|^2 \text{ puisque } \|g\| = 1.$$

$$(h_0 | h_1) = (g.u | l_g(v)) = (l_g^*(g.u) | v) = -(l_g(g.u) | v) = (0 | v) = 0 \text{ (II.2.a)}$$

$$(h_0 | h_2) = (g.u | g.l_g(v)) = \frac{1}{2}(g.u | l_g(l_g(v))) = \frac{1}{2}(l_g^*(g.u) | l_g(v)) = (0 | l_g(v)) = 0$$

$$(h_1 | h_2) = (l_g(v) | g.l_g(v)) = 0 \text{ (question précédente)}$$

(b) La famille des matrices  $h_i$ ,  $0 \leq i \leq 2$ , est orthogonale, ne contient pas 0, donc est libre: vu son cardinal c'est une base de l'espace vectoriel  $V$ . On fait de cette base une base orthonormée en divisant  $h_1$  et  $h_2$  par leurs normes.

La matrice associée à l'endomorphisme  $l_g$  dans cette base peut être obtenue en projetant (orthogonalement) les images sur la base orthogonale en question: on sait déjà que  $l_g(h_0) = l_g(g.u) = 0$ ; de plus, avec ce qui précède,

$$\begin{aligned} l_g(h_1) = l_g(l_g(v)) &= \frac{(l_g(h_1) | h_0)}{\|h_0\|^2} h_0 + \frac{(l_g(h_1) | h_1)}{\|h_1\|^2} h_1 + \frac{(l_g(h_1) | h_2)}{\|h_2\|^2} h_2 \\ &= \frac{(l_g(v) | -l_g(h_0))}{\|h_0\|^2} h_0 + \frac{(l_g(l_g(v)) | l_g(v))}{\|h_1\|^2} h_1 + \frac{(2h_2 | h_2)}{\|h_2\|^2} h_2 = 2h_2 \end{aligned}$$

Donc  $l_g(h_1) = 2h_2$ . De même, comme

$$(l_g(h_2) | h_1) = (l_g(g.l_g(v)) | l_g(v)) = (-2l_g(v) | l_g(v)) = -2\|h_1\|^2 \text{ et } (l_g(h_2) | h_2) = 0$$

on trouve que  $l_g(h_2) = -2h_1$ . Finalement,

La matrice de  $l_g$  dans la base  $(h_0, h_1, h_2)$  est  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

La transformation géométrique associée à l'endomorphisme  $\frac{1}{2}l_g$  n'a pas de nom dans le programme, c'est la composée (commutative) d'une projection orthogonale sur le plan engendré par  $(h_1, h_2)$  et d'une rotation d'angle  $\pi/2$  autour de  $h_0$ .

**(II.4) Un endomorphisme de l'espace vectoriel  $M$  :**

Soit  $m_\theta = I \cos \theta + g \sin \theta$  où  $\theta \in [0, 2\pi]$  et  $s_\theta : w \mapsto m_\theta.w$ .

En admettant que  $u, h_0, h_1, h_2$  constituent une base (c'est parce que  $M = \mathbb{R}.U \oplus V$ , et elle est orthogonale d'après II.3.a), on peut rechercher la matrice de  $s_\theta$  dans cette base: d'abord notons que pour  $w$  quelconque

$$s_\theta(w) = w \cos \theta + g.w \sin \theta$$

On en déduit par des calculs simples (utilisant seulement que  $g^2 = -I$ ) la matrice

$$M(s_\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

**Troisième partie**

**(III.1) Endomorphisme  $\psi_m$  de l'espace  $V$  :**

(a) Il est clair que l'application  $w \mapsto m.w.tm$  est un endomorphisme de  $M$  (vu sa stabilité par  $\times$ ). Reste à vérifier la stabilité de  $V$ : or si  $v \in V$ ,  ${}^t v = v$  et  ${}^t(m.v.tm) = m.v.tm$ , cqfd.

Pour  $u \in U$ , on a  $m.u.tm = m.t\bar{m}u = \det mu$  (cf. I2). groupe...

- (b) Si  $\psi_m$  est l'application identité, c'est que pour tout  $w$  on a  $m.w.^t m = w$ . En particulier pour  $w = I$  on trouve que  $m.^t m = I$  et donc  $m$  est réelle, de norme 1, c'est nécessairement une matrice de rotation  $\begin{pmatrix} a & b' \\ -b' & a \end{pmatrix}$ .

On applique alors à  $w = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$  par exemple, ce qui donne  $b = 0$  et finalement

Le noyau du morphisme  $m \in M \setminus \{0\} \mapsto \psi_m$  est réduit à  $\pm I$

**(III.2) Endomorphisme  $\psi_g$  :**

- (a) La question I-4 prouve l'existence d'un (unique) réel  $\theta \in [0, \pi]$  et d'une matrice  $m \in M$ , différente de 0, de trace nulle, telle que  $g = I \cos \theta + m$ . La condition  $g \neq \pm I$  impose  $\sin \theta \neq 0$ , c'est à dire  $\theta \in ]0, \pi[$ , cqfd.

Soit  $\gamma$  la matrice définie à partir de la matrice  $m$  par la relation suivante :  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{\det m}} m$ .

Rappelons que  $\det m = \sin^2 \theta$  et donc  $m = \gamma \sin \theta$ ,  $g = I \cos \theta + \gamma \sin \theta = m_\theta$ .

- (b)  $\psi_g(w) = (I \cos \theta + \gamma \sin \theta).w.(I \cos \theta + {}^t \gamma \sin \theta) = w \cos^2 \theta + \cos \theta(m.w + w.^t m) + m.w.^t m$   
En remplaçant  $m = \gamma \sin \theta$ , il vient

$$\psi_g(w) = w \cos^2 \theta + l_\gamma(w) \cos \theta \sin \theta + \psi_\gamma(w) \sin^2 \theta$$

- (c) On a donc  $\psi_g = I \cos^2 \theta + \cos \theta \sin \theta l_\gamma + \sin^2 \theta \psi_\gamma$ : il suffit de trouver la matrice de  $\psi_\gamma$ .  
Or  $\gamma \in G$  et  $\text{tr } \gamma = 0$  par construction: on a donc  $\gamma^2 = -I$  comme le  $g$  de la partie II. Ce qui permet d'écrire
- $\psi_\gamma(\gamma u) = -u.^t \gamma = -{}^t \bar{\gamma} u = \underline{\gamma} u$  (en utilisant aussi **I.2**)
  - $\psi_\gamma(l_\gamma(v)) = \gamma(\gamma v + v.^t \gamma)^t \gamma = -v.^t \gamma - \gamma v = \underline{-l_\gamma(v)}$ .
  - $\psi_\gamma(\gamma l_\gamma(v)) = -(\gamma v + v.^t \gamma)^t \gamma = -\gamma.v.^t \gamma - v = \underline{-\gamma l_\gamma(v)}$ .
- $\psi_\gamma$  est donc un demi-tour, et la matrice de  $\psi_g$  est immédiatement

$$\text{Mat}(\psi_g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 2 \cos \theta \sin \theta \\ 0 & -2 \cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

son déterminant est  $\det \psi_g = 1$  et c'est une rotation d'angle  $\pm 2\theta$  autour de l'axe dirigé par  $h_0 = \gamma.u$ .

On a donc ainsi n'importe quelle rotation de  $V$ .

**(III.3) Endomorphisme  $\psi_m$  :**

Soit  $m$  une matrice différente des matrices 0,  $I$  et  $-I$ , et posons  $g = \frac{m}{\sqrt{\det m}}$ ; on a alors  $g \in G$  et  $\psi_m = \det m \psi_g$ .

L'endomorphisme  $\psi_m$  est donc une (toute !) similitude directe.

