Un corrigé du concours Centrale MP 2014 maths 1

I. Une norme utile sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$

I.A- Tout revient à montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'application $h_k : \ A \longmapsto A^k$ est continue sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.
Les applications $\varphi : A \longmapsto \underbrace{(A, ..., A)}_{k\text{fois}}$ et $\psi : (A_1, ...A_k) \longmapsto A_1...A_k$ est multilinéaire et elles démarrent des espaces de dimensions finis, elles sont donc continues, donc $h_k = \psi \circ \varphi$ est continue sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.
L'application $A \longmapsto P(A)$ est somme finie de fonctions continues sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ donc continue sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

I.B- L'application est trivialement linéaire par rapport à la première composante.
$\mathrm{tr}({}^tAB) = \mathrm{tr}({}^t({}^tAB) = \mathrm{tr}({}^tBA)$, l'application est symétrique donc bilinéaire.
Si $A = (a_{i,j})$, alors $\mathrm{tr}({}^tAA) = \sum\limits_{i,j} a_{i,j}^2 \geqslant 0$ car $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, l'application est donc positive.
Si $\mathrm{tr}({}^tAA) = 0$, alors $\forall i, j \ \ a_{i,j} = 0$, c'est à dire que $A = 0$, l'application est donc un produit scalaire.

I.C- $\|A\| = \sqrt{\sum\limits_{i,j} a_{i,j}^2} \geqslant |a_{i,j}|$.

I.D- $\Big(\sum\limits_k a_{i,k} b_{k,j}\Big)^2 \leqslant \Big(\sum\limits_k a_{i,k}^2\Big)\Big(\sum\limits_k b_{k,j}^2\Big)$ c'est l'inégalité de Cauchy.
$\sum\limits_{i,j}\Big(\sum\limits_k a_{i,k} b_{k,j}\Big)^2 \leqslant \Big(\sum\limits_{i,k} a_{i,k}^2\Big)\Big(\sum\limits_{j,k} b_{k,j}^2\Big)$, ce qui se traduit par $\|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$.

I.E- Par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \ \|A^n\| \leqslant \|A\|^n$.

II. Séries entières de matrices

II.A- Si $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ est telle que $\|A\| < R$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, \ \ \|a_n A^n\| \leqslant |a_n|\,\|A\|^n$
La série $\sum |a_n|\,\|A\|^n$ converge donc $\sum a_n A^n$ converge absolument, l'espace $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ est un Banach, la série $\sum a_n A^n$ converge par conséquent φ est bien définie.
Soit $r \in]0, R[$, $\forall n \in \mathbb{N}, \ \ \|a_n A^n\| \leqslant |a_n|\,\|A\|^n \leqslant |a_n| r^n$, la série $\sum\limits_n |a_n| r^n$ converge. donc la série $\sum a_n A^n$ converge normalement sur le disque fermé de centre O et de rayon r, toutes les applications $A \longmapsto a_n A^n$ sont continues sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, l'application φ est donc continue sur $\mathcal{B}$.

II.B -

II.B.1) Une première méthode. Considérons l'ensemble :

$$J = \{i \in \mathbb{N}^* \ /(A^k)_{0 \leqslant k \leqslant i-1} \text{est libre}\}$$

l'ensemble J contient 1, car $I_d \neq 0$, et il est majoré par la dimension de $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ qui est d^2.
Soit $r = \max J$, alors $r \in J$ et $r + 1 \notin J$, c'est à dire $(A^k)_{0 \leqslant k \leqslant r-1}$ est libre et $(A^k)_{0 \leqslant k \leqslant r}$ est liée.
Une autre méthode c'est de penser au polynôme minimal de A.

II.B.2) La famille $(A^k)_{0 \leqslant k \leqslant r}$ est liée, donc $\exists b_0, ...b_r$ des réels non tous nuls tels que $\sum\limits_{k=0}^{r} b_k A^k =$

0, si on suppose que $b_r = 0$, alors $\sum_{k=0}^{r-1} b_k A^k = 0$, la liberté de la famille $(A^k)_{0\leqslant k\leqslant r-1}$ entraîne que $b_0, ..., b_{r-1} = 0$ ceci est absurde par conséquent $b_r \neq 0$, et $A^r \in \text{vect}(A^k)_{0\leqslant k\leqslant r-1}$.
Donc $\forall n \in \{0, ..., r\}$ $A^n \in \text{vect}(A^k)_{0\leqslant k\leqslant r-1}$. Par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n \in \text{vect}(A^k)_{0\leqslant k\leqslant r-1}$.
C'est à dire l'existence des réels $\lambda_{0,n}, ..., \lambda_{r-1,n}$ tel que

$$A^n = \sum_{k=0}^{r-1} \lambda_{k,n} A^k$$

Si on suppose que $\sum_{k=0}^{r-1} \lambda_{k,n} A^k = A^n = \sum_{k=0}^{r-1} \lambda'_{k,n} A^k$ alors $\sum_{k=0}^{r-1} (\lambda_{k,n} - \lambda'_{k,n}) A^k = 0$
La liberté de la famille $(A^k)_{0\leqslant k\leqslant r-1}$ entraîne que $\forall k \in \{0, ..., r-1\}$ $\lambda_{k,n} = \lambda'_{k,n}$.

II.B.3) Sur l'espace $F = \text{vect}(A^k)_{0\leqslant k\leqslant r-1}$, on définit une norme, pour tout $B = \sum_{k=0}^{r-1} \alpha_{k,n} A^k$, posons $\|B\|_1 = \sum_{k=0}^{r-1} |\alpha_{k,n}|$, l'espace $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ est de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, Alors il existe $C > 0$, tel que $\|.\|_1 \leqslant C \|.\|$, en particulier $\|A^n\|_1 \leqslant C \|A^n\|$, c'est à dire

$$\sum_{k=0}^{r-1} |\lambda_{k,n}| \leqslant C \|A^n\|$$

II.B.4) En particulier pour tout k entre 0 et $r-1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|a_n \lambda_{k,n}| \leqslant C|a_n| \|A^n\| \leqslant C|a_n| \|A\|^n$$

La série $\sum_{n\geqslant 0} |a_n| \|A\|^n$ converge, car $\|A\| < R$, donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n \lambda_{k,n}$ converge absolument dans $\mathbb{C}$ par comparaison.

II.B.5) $\varphi(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_n A^n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_n \left[\sum_{k=0}^{r-1} \lambda_{k,n} A^k\right] = \sum_{k=0}^{r-1} \left[\sum_{k=0}^{+\infty} a_n \lambda_{k,n}\right] A^k$

Car chaque $\sum_{n\geqslant 0} a_n \lambda_{k,n}$ converge et soit $\ell_k = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \lambda_{k,n}$.

Alors $\varphi(A) = \sum_{k=0}^{r-1} \ell_k A^k = P(A)$, où $P = \sum_{k=0}^{r-1} \ell_k X^k$, $\deg(P) < r$.

L'unicité. Si il existe $Q = \sum_{k=0}^{r-1} \ell'_k X^k$ tel que $\sum_{k=0}^{r-1} \ell_k A^k = \varphi(A) = \sum_{k=0}^{r-1} \ell'_k A^k$, la famille $(A^k)_{0\leqslant k\leqslant r-1}$ est libre donc $\forall k \in \{0, ..., r-1\}$, $\ell_k = \ell'_k$.

II.B.6) Le calcul donne $A^2 = A$, et par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = A$, alors $\varphi(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} A^n = I_d + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} A = I_d + (e-1)A$
D'autre part $X^2 - X$ est un polynôme annulateur de A, et c 'est simple de vérifier que $\Pi_A = X^2 - X$, donc $r = 2$ dans ce cas, l'unicité du polynôme avec condition $\deg P < r = 2$ entraîne $P = 1 + (e-1)X$.
Remarque : $\exp(A) = I_d + (e-1)A$.

II.C- Supposons qu'il existe $P = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$ tel que $\forall A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, $\varphi(A) = P(A)$, alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(xE_{i,i}) = P(xE_{i,i})$, et ceci donne $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$, alors $(a_n)_n$ est stationnaire.
Réciproquement cette condition suffit. Donc la condition sur la série entière est que la suite $(a_n)_n$ soit stationnaire.

III. Deux applications

III.A- ***Première application : une formule de trigonométrie matricielle***

III.A.1) $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ deux suites de nombres complexes, on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Si $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n$ convergent absolument, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n$ converge absolument et on a $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n\right) = \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n\right)$

III.A.2) $AB = BA \iff (iA)(iB) = (iB)(iA)$, donc il suffit de montrer que si $AB = BA$, alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.

Les deux séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{n!}A^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{n!}B^n$, convergent absolument car $\|A^n\| \leqslant \|A\|^n$ et que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{n!}\|A\|^n$ converge et sa somme est $\exp(\|A\|)$.

$C_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}A^k \dfrac{1}{(n-k)!}B^{n-k} = \dfrac{1}{n!}\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{n!}{k!(n-k)!}A^k B^{n-k} = \dfrac{1}{n!}(A+B)^n$ car $AB = BA$.

Alors $\exp(A)\exp(B) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} C_n = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!}(A+B)^n = \exp(A+B)$.

Alors $\exp[i(A+B)] = \exp(iA)\exp(iB)$.

III.A.3) $\sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n \dfrac{A^{2n}}{(2n)!}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n \dfrac{A^{2n+1}}{(2n+1)!}$ convergent absolument, donc $\cos(A)$, $\sin(A)$, $\cos(A)^2$ et $\sin(A)^2$ existent, et d'après la partie $II)$ ce sont des polynômes en A, car les séries utilisées sont de rayons $+\infty$. On peut dire que $\cos(A)\sin(A) = \sin(A)\cos(A)$.

De plus A et $-A$ commutent, alors $I_d = \exp[i(A-A)] = \exp(iA)\exp(-iA)$

D'autre part $\exp(iA)\exp(-iA) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!}(iA)^n \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!}(-iA)^n$

$$= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}A^{2n} + i\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}A^{2n+1}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}A^{2n} - i\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}A^{2n+1}\right)$$

$= \big(\cos(A)^2 + \sin(A)^2 + i(\cos(A)\sin(A) - \sin(A)\cos(A))\big) = \cos(A)^2 + \sin(A)^2$.

Donc $\cos(A)^2 + \sin(A)^2 = I_d$.

III.B- ***Seconde application : Le théorème de Cayley-Hamilton***

III.B.1) Les valeurs propres d'une matrice A sont en nombres finies alors Sp(A) est bornée $\exists C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall \lambda \in$ Sp(A), $|\lambda| \leqslant C$, alors pour $R = C+1$, on a bien $Re^{i\theta} \notin$ Sp(A), par conséquent $(Re^{i\theta}I_d - A)$ est inversible.

Vérifions que $(Re^{i\theta}I_d - A)^{-1} = \left(Re^{i\theta}\right)^{-1}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(Re^{i\theta}\right)^{-n}A^n$.

Pour R assez grand la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\left(Re^{i\theta}\right)^{-n}A^n$ converge ($\|A\| < R$). De plus

$$(Re^{i\theta}I_d - A)\left(Re^{i\theta}\right)^{-1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(Re^{i\theta}\right)^{-n}A^n = \left(Re^{i\theta}\right)^{-1}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(Re^{i\theta}\right)^{-n+1}A^n - \sum_{n=0}^{+\infty}\left(Re^{i\theta}\right)^{-n}A^{n+1}\right)$$

$$= \left(Re^{i\theta}\right)^{-1}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(Re^{i\theta}\right)^{-n+1}A^n - \sum_{n=1}^{+\infty}\left(Re^{i\theta}\right)^{-n+1}A^n\right) = I_d$$

III.B.2) Soit $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ip\theta}d\theta = \delta_{p,0}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, et R assez grand, la série $\sum_{k\geqslant 0}\left(\theta \longmapsto Re^{i\theta}\right)^{n-k-1} A^k$, converge normalement sur $[0,2\pi]$, et les applications $\theta \longmapsto \left(Re^{i\theta}\right)^{n-k-1} A^k$ sont continues sur $[0,2\pi]$, alors on peut permuter les signes $\int$ et $\sum$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(Re^{i\theta}\right)^n (Re^{i\theta}I_d - A)^{-1}d\theta &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\left(Re^{i\theta}\right)^{n-k-1}A^k d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\left(Re^{i\theta}\right)^{n-k-1}d\theta A^k \\
&= A^{n-1}
\end{aligned}$$

III.B.3) On a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ A^{n-1} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(Re^{i\theta}\right)^n (Re^{i\theta}I_d - A)^{-1}d\theta$. Donc :

$$\begin{aligned}
\chi_A(A) &= \sum_{k=0}^{d} a_k A^k \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{d} a_k\left(Re^{i\theta}\right)^{k+1}(Re^{i\theta}I_d - A)^{-1}d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(Re^{i\theta}\right)\chi_A(Re^{i\theta})(Re^{i\theta}I_d - A)^{-1}d\theta
\end{aligned}$$

III.B.4) On a la formule valable pour une matrice B inversible ${}^t comB = (\det B)B^{-1}$.
Donc pour $B = Re^{i\theta}I_d - A$, on a alors $\chi_A(A) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}(-1)^d\left(Re^{i\theta}\right){}^t comB d\theta$.
Mais les composantes de $comB$ sont des polynômes en $Re^{i\theta}$, et comme $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}e^{ip\theta}d\theta = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, alors $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}(-1)^d\left(Re^{i\theta}\right){}^t comB d\theta = 0$. Donc

$$\chi_A(A) = 0$$

IV. Étude d'une équation fonctionnelle

IV.A- Pour x fixé dans $]-\infty, M[$. Soit l'application :

$$h : y \longmapsto 2\left(F(x+y) - F(x+\alpha) - \frac{1}{4}F(2y) + \frac{1}{4}F(2\alpha)\right) - (y-\alpha)f(2x)$$

h est dérivable sur $\left]-\infty, \dfrac{M}{2}\right[$ et $h'(y) = 2f(x+y) - 2\dfrac{1}{2}f(2y) - f(2x) = 0$. Mais $h(\alpha) = 0$, donc

$$\forall y \in]-\infty, M[,\ \ h(y) = 0$$

IV.B- F est une primitive d'une fonction continue donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, M[$, donc l'application $x \longmapsto f(x) = 2\dfrac{F(x/2+y) - F(x/2+\alpha) - \frac{1}{4}F(2y) + \frac{1}{4}F(2\alpha)}{y-\alpha}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, M[$
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, si on suppose que f est $\mathcal{C}^n$ sur $]-\infty, M[$, alors F est $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $]-\infty, M[$, et de l'égalité précédente f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $]-\infty, M[$.
Donc f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, M[$.

IV.C- Alors $2f'(2x) = \dfrac{2}{y-\alpha}\left(f(x+y) - f(x+\alpha)\right) = \dfrac{1}{y-\alpha}\left(f(2x) + f(2y) - f(2x) - f(2\alpha)\right)$
$= \dfrac{1}{y-\alpha}\left(f(2y) - f(2\alpha)\right)$

Donc $4f''(2x) = 0$ et ceci pour tout $x \in \left]-\infty, \dfrac{M}{2}\right[$, alors $f'' = 0$, alors f est affine c'est à dire $f \in$ vect$(x \mapsto 1, x \mapsto x)$, réciproquement toutes les fonctions de vect$(x \mapsto 1, x \mapsto x)$ vérifie bien l'équation $(VI.1)$, donc les solutions de $(VI.1)$ est vect$(x \mapsto 1, x \mapsto x)$.

V. Étude d'une autre fonction matricielle

V.A- Si ζ est une fonction qui vérifie $(V.1)$, alors $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\zeta(x) \neq 0$, les fonctions qui vérifie $(V.1)$ sont les fonctions qui ne s'annulent qu'en 0 éventuellement.

V.B- Si $ad \neq bc$ alors la matrice $\begin{pmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ c & d & 0 & \dots & 0 \\ c & d & & & \\ \vdots & \vdots & & I_{d-2} & \\ c & d & & & \end{pmatrix}$ est inversible, donc la matrice

$A' = \begin{pmatrix} \zeta(a) & \zeta(b) & \zeta(0) & \dots & \zeta(0) \\ \zeta(c) & \zeta(d) & \zeta(0) & \dots & \zeta(0) \\ \zeta(c) & \zeta(d) & & & \\ \vdots & \vdots & & *** & \\ \zeta(c) & \zeta(d) & & & \end{pmatrix}$ est inversible.

Ses deux premières colonnes forment une famille libre et de même pour ses deux premières lignes.
Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha(\zeta(a), \zeta(b)) + \beta(\zeta(c), \zeta(d)) = (0,0)$.

Supposons que $\alpha \neq 0$, alors $\zeta(a) = -\dfrac{\beta}{\alpha}\zeta(c)$ et $\zeta(b) = -\dfrac{\beta}{\alpha}\zeta(d)$, donc $\begin{pmatrix} \zeta(a) \\ \zeta(c) \\ \vdots \\ \zeta(c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\beta}{\alpha}\zeta(c) \\ \zeta(c) \\ \vdots \\ \zeta(c) \end{pmatrix} =$

$\zeta(c)\begin{pmatrix} -\dfrac{\beta}{\alpha} \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, de même $\begin{pmatrix} \zeta(b) \\ \zeta(d) \\ \vdots \\ \zeta(d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\beta}{\alpha}\zeta(d) \\ \zeta(d) \\ \vdots \\ \zeta(d) \end{pmatrix} = \zeta(d)\begin{pmatrix} -\dfrac{\beta}{\alpha} \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, alors les deux premières colonnes de A' forment une famille liée, absurde donc $\alpha = 0$, et si on suppose que $(\zeta(c), \zeta(d)) = (0,0)$, alors les deux premières colonnes de A' forment une famille liée, absurde, par conséquent $\beta = 0$.
La famille $(\zeta(a), \zeta(b)), (\zeta(c), \zeta(d))$ est libre, alors $\zeta(a)\zeta(d) \neq \zeta(b)\zeta(c)$.

V.C- Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \neq y$, alors $\zeta(1)\zeta(x) \neq \zeta(1)\zeta(y)$.
D'autre part $1.0 \neq 1.1$, donc $\zeta(1)\zeta(0) \neq \zeta(1)^2$, c'est à dire $\zeta(1)\big(\zeta(1) - \zeta(0)\big) \neq 0$, alors $\zeta(1) \neq 0$, par conséquent $\zeta(x) \neq \zeta(y)$. L'application ζ est injective.
On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe quatre réels x_1, x_2, x_3 et x_4 tels que :

$$\begin{cases} x_1 < x_2 \text{ et } \zeta(x_1) < \zeta(x_2) \\ x_3 < x_4 \text{ et } \zeta(x_3) > \zeta(x_4) \end{cases}$$

Puis on considère la fonction : $\varphi : \begin{cases} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \zeta(x_1 + t(x_3 - x_1)) - \zeta(x_2 + t(x_4 - x_2)) \end{cases}$
On a $\varphi(0) = \zeta(x_1) - \zeta(x_2) < 0$, et $\varphi(1) = \zeta(x_3) - \zeta(x_4) > 0$, et comme φ est continue, alors il existe $c \in]0,1[$ tel que $\varphi(c) = 0$.

Or $(1-c)x_1 - cx_4 < (1-c)x_2 - cx_3$, donc $x_1 + c(x_3 - x_1) \neq x_2 + c(x_4 - x_2)$, alors ζ n'est pas injective, ce qui est absurde, alors ζ est strictement monotone.

V.D- Soit $x \in \mathbb{R}^*$, alors $1.x \neq 0.x$, donc $\zeta(x)\zeta(1) \neq \zeta(x)\zeta(0)$, c'est à dire que $\zeta(x)\big(\zeta(1) - \zeta(0)\big) \neq 0$, alors $\zeta(x) \neq 0$.

V.E -

V.E.1) On suppose par exemple que ζ est strictement croissante. On suppose que $\zeta(0) > 0$, considérons l'application $\psi : x \longmapsto \zeta(x)\zeta(1) - \zeta(0)\zeta(2)$.
ψ est continue sur $\mathbb{R}$, $\psi(0) = \zeta(0)\big(\zeta(1) - \zeta(2)\big) < 0$, $\psi(2) = \zeta(2)\big(\zeta(1) - \zeta(0)\big) > 0$, il existe alors $\alpha \in]0, 2[$ tel que $\zeta(\alpha)\zeta(1) = \zeta(0)\zeta(2)$.
Si on suppose que $\zeta(0) < 0$, comme ζ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$, alors nécessairement $\zeta(1), \zeta(2) \in \mathbb{R}^-$, donc $\psi(0) = \zeta(0)\big(\zeta(1) - \zeta(2)\big) > 0$, $\psi(2) = \zeta(2)\big(\zeta(1) - \zeta(0)\big) < 0$, c'est une absurdité.
On raisonne de même si ζ est strictement décroissante.

V.E.2) Par ailleurs $0.2 \neq 1\alpha$, alors $\zeta(\alpha)\zeta(1) \neq \zeta(0)\zeta(2)$ ce qui est absurde. Donc $\zeta(0) = 0$.

V.F - Supposons que $\eta(xy)\eta(xy) \neq \eta(x^2)\eta(y^2)$, d'après $V.B)$, $\zeta\big(\eta(xy)\big)\zeta\big(\eta(xy)\big) \neq \zeta\big(\eta(x^2)\big)\zeta\big(\eta(y^2)\big)$.
Alors $xyxy \neq x^2y^2$, ce qui est absurde, alors lorsque cela est défini on a

$$\eta(xy)\eta(xy) = \eta(x^2)\eta(y^2)$$

V.G -

V.G.1) ζ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc $\zeta(\mathbb{R}) = I$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, plus précisément $I =]\lim\limits_{x \to -\infty} \zeta(x), \lim\limits_{x \to +\infty} \zeta(x)[=]\alpha, \beta[$, de plus $\zeta(0) = 0$, donc $0 \in I$.
Alors la trace de I sur chacun des intervalle $]0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$ est un intervalle non vide, et on a $I \cap]0, +\infty[=]0, \beta[$, alors $\{x \in \mathbb{R} \,/\, \exp(x) \in]0, \beta[\} =]-\infty, M[$, où $M = \lim\limits_{x \to \beta^-} \ln x$ et f est bien définie sur $]-\infty, M[$.
Soient $x, y \in]-\infty, M[$,

$$\begin{aligned} 2f(x+y) &= 2\ln \eta\big(\exp x + y\big) \\ &= \ln\Big[\eta\big(\exp x \exp y\big)\Big]^2 \\ &= \ln \eta\big(\exp 2x\big)\eta\big(\exp 2y\big); \quad V.F) \\ &= \ln \eta\big(\exp 2x\big) + \ln \eta\big(\exp 2y\big) \text{les deux quantités existent c'est par hypothèse} \\ &= f(2x) + f(2y) \end{aligned}$$

V.G.2) De la partie VI, $\exists a, b \in \mathbb{R}$, tels que $\forall x \in]-\infty, M[, \quad f(x) = \ln \eta \exp(x) = ax + b$. les trois fonctions $\ln$, η et $\exp$ sont strictement croissantes alors $a > 0$, donc $\forall t \in]0, \beta[, \quad \eta(t) = \exp(a \ln t + b) = \exp(b) a^t$, qui est de la forme demandé.

V.G.3) Sur l'intervalle $I \cap]-\infty, 0[=]\alpha, 0[$, la fonction η est strictement négative, car croissante et $\eta(0) = 0$.
Je laisse la suite au lecteur.

V.G.4) Alors

$$\eta : \left\{ \begin{array}{ccl}]\alpha, \beta[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{array}{ll} K_1 x^{\alpha_1} & \text{si} \quad x \in]0, \beta[\\ K_2(-x)^{\alpha_2} & \text{si} \quad x \in]\alpha, 0[\end{array} \end{array} \right.$$

Donc

$$\zeta : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow &]\alpha, \beta[\\ x & \longmapsto & \begin{array}{ll} \left(\dfrac{x}{K_1}\right)^{1/\alpha_1} & \text{si} \quad x \in]0, \beta[\\ -\left(\dfrac{x}{K_2}\right)^{1/\alpha_2} & \text{si} \quad x \in]\alpha, 0[\end{array} \end{array} \right.$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \zeta(x) = +\infty = \beta$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \zeta(x) = -\infty = \alpha$, donc $I = \mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}^+$, De $V.F$, on a $\eta\Big(-\sqrt{x}\sqrt{x}\Big)^2 = \eta(x)\eta(x) = \eta\Big(x\Big)^2$, alors $\eta(-x) = -\eta(x)$, car $\eta(x)$ et $\eta(-x)$ n'ont pas le même signe.
Si $x \in \mathbb{R}^-$, alors $-x \in \mathbb{R}^+$, donc $\eta(x) = -\eta(-x)$. La fonction η est donc impaire.

V.H - La fonction ζ est strictement monotone, donc deux cas qui se présentent :

Cas1. c'est l'hypothèse fait au $V.5$, alors η et par conséquent ζ est impaire. Sa restriction sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \longmapsto Cx^\gamma$, avec $C > 0$ et $\gamma > 0$.

En effet $Cx^\gamma = y \Longleftrightarrow x = \left(\dfrac{y}{C}\right)^{1/\gamma}$.

Cas2. si on suppose que ζ est strictement décroissante, alors en considérant $x \longmapsto -\eta$, qui est strictement croissante on se ramène au cas 1. alors $-\eta$ est impaire, c'est à dire η, et donc ζ l'est aussi.

De ce qui précède la forme de ζ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \longmapsto Cx^\gamma$, avec $C \neq 0$ et $\gamma > 0$.

V.I -En effectuant les opérations suivantes $C_1 \longleftarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{d} C_i$, $L_i \longleftarrow L_i - L_1$ pour i entre 2 et d, la valeur du déterminant donné est $(\lambda - 1)^{d-1}(\lambda + d - 1)$.

V.J - D'après la question $V.H$ une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $V.1$, est nécessairement impaire et sa restriction sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \longmapsto Cx^\gamma$, avec $C \neq 0$ et $\gamma > 0$.

Soit ζ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ impaire telle que sa restriction sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \longmapsto Cx^\gamma$, avec $C \neq 0$ et $\gamma > 0$.

En considérant A_λ de la question précédente qui est inversible pour $\lambda \notin \{1, 1-d\}$, or le déterminant de la matrice $f_\zeta(A_\lambda)$ est $C^d\left(\dfrac{\zeta(\lambda)}{C} - 1\right)^{d-1}\left(\dfrac{\zeta(\lambda)}{C} + d - 1\right)$.

ζ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et $C(1-d)$, possède un unique antécédent λ par ζ.

$\zeta(1) = C \neq C(1-d) = \zeta(\lambda)$ et $\zeta(1-d) = -\zeta(d-1) = -C(d-1)^\gamma \neq C(1-d) = \zeta(\lambda)$ pour $\gamma \neq 1$.

Donc pour $\gamma \neq 1$ la fonction ζ ne vérifie pas $V.1$.

C'est évident que pour $\gamma = 1$, c'est à dire que $\zeta : x \longmapsto Cx$, vérifie bien $V.1$, c'est donc les seules fonctions qui vérifient $V.1$.

sadikoulmeki@yahoo.fr