Énoncé et corrigé Centrale - 2013 MP - Maths 2

Notations
Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul. On note :
- $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n à cœfficients réels ;
- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$;
- $\mathscr{O}(n)$ le groupe orthogonal d'ordre n ;
- $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, respectivement $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont positives ou nulles, respectivement strictement positives ;
- I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$;
- 0_n la matrice nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour toute matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on note ${}^tM$ sa matrice transposée, $\mathrm{tr}(M)$ sa trace, et, pour $(i,j)\in\{1,...,n\}^2$, m_{ij} le coefficient qui se trouve à l'intersection de la i-ème ligne et de la j -ème colonne. On munit$\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme définie, pour tout $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, par $\|M\| = \sup(|m_{ij}|,(i,j)\in\{1,...,n\}^2)$.

I Décomposition polaire d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$

Q1. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.

- **a/** Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Montrer que u est autoadjoint défini positif si et seulement si sa matrice dans n'importe quelle base orthonormée appartient à $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
- **b/** Montrer que si $S\in\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors S est inversible et $S^{-1}\in\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Q2. Dans cette question, u désigne un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ autoadjoint défini positif. On se propose de démontrer qu'il existe un unique endomorphisme v de $\mathbb{R}^n$ autoadjoint, défini positif, tel que $v^2 = u$.

- **a/** Soit v un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, autoadjoint défini positif et vérifiant $v^2 = u$, et soit λ une valeur propre de u. Montrer que v induit un endomorphisme de $\mathrm{Ker}(u-\lambda Id)$ que l'on déterminera.
- **b/** En déduire v, puis conclure.
- **c/** Montrer qu'il existe un polynôme Q à coefficients réels tel que $v = Q(u)$.

Q3. Soit $A\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

- **a/** Montrer que ${}^tAA\in\mathscr{S}^{++}(\mathbb{R})$.
- **b/** En déduire qu'il existe un unique couple $(O,S)\in\mathscr{O}(n)\times\mathscr{S}^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A = OS$.

Q4. Déterminer les matrices O et S lorsque $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ \sqrt{2}/2 & 3\sqrt{2} & -3\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$.

Q5.
- **a/** Montrer que $\mathscr{O}(n)$ est une partie compacte de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
- **b/** Montrer que $\mathscr{S}^+(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
- **c/** Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est une partie dense de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
- **d/** Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un couple $(O,S)\in\mathscr{O}(n)\times\mathscr{S}^+(\mathbb{R})$ tel que $A = OS$. Un tel couple est-il unique ?
- **e/** Soit φ l'application de $\mathscr{O}(n)\times\mathscr{S}^{++}(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(O,S) = OS$ pour tout couple (O,S) de $\mathscr{O}(n)\times\mathscr{S}^{++}(\mathbb{R})$.
  Montrer que φ est bijective, continue et que sa réciproque est continue.

II Deux applications

Première application

Dans cette partie, A et B désignent deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe une matrice U carrée de taille n, inversible, à cœfficients complexes, telle que $U^t\overline{U} = I_n$ et $A = UBU^{-1}$, où $\overline{U}$ désigne la matrice dont les cœfficients sont les conjugués de ceux de U.

Q1. Justifier que ${}^tA = U({}^tB)U^{-1}$.

Q2. On se propose de montrer qu'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PBP^{-1}$ et ${}^tA = P{}^tBP^{-1}$. Pour cela, on note X et Y les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $U = X + \mathrm{i}Y$.

a/ Montrer qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $X + \mu Y \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

b/ Montrer que $AX = XB$ et $AY = YB$.

c/ Conclure.

Q3. On écrit P sous la forme $P = OS$, avec $O \in \mathcal{O}(n)$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

a/ Montrer que $BS^2 = S^2B$, puis que $BS = SB$.

b/ En déduire qu'il existe $O \in \mathcal{O}(n)$ tel que $A = OB{}^tO$.

Seconde application

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On se propose de donner une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une solution $X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ au système

$$(*)\begin{cases} {}^tAA + {}^tXX &= I_n \\ {}^tAX - {}^tXA &= 0_n \end{cases}$$

Q1. Montrer que si le système $(*)$ admet une solution dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors les valeurs propres de ${}^tAA$ appartiennent à l'intervalle $[0,1[$.

Q2. On suppose dans cette question que les valeurs propres de ${}^tAA$ appartiennent à l'intervalle $[0,1[$.

a/ Justifier que l'on peut chercher les solutions X de $(*)$ sous la forme $X = UH$, avec $U \in \mathcal{O}(n)$ et $H \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

b/ Déterminer H.

c/ Montrer l'existence d'une solution $X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de $(*)$ appartenant à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

III Valeurs propres d'une matrice

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$A_p = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$$

On note P_p le polynôme tel que, pour tout réel x, $P_p(x) = \det(xI_p - A_p)$.

Q1. Montrer qu'à $x \in \mathbb{R}$ fixé, la suite $(P_p(x))_{p\in\mathbb{N}^*}$ vérifie une relation linéaire d'ordre 2, que l'on précisera.

Q2. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|2-x| < 2$. Après avoir justifié l'existence d'un unique $\theta \in]0,\pi[$ tel que $2 - x = 2\cos\theta$, déterminer $P_p(x)$ en fonction de $\sin((p+1)\theta)$ et de $\sin(\theta)$.

Q3. Déterminer les valeurs propres de A_p.

Q4. Montrer que A_p est diagonalisable, et en déterminer une base de vecteurs propres, en précisant pour chacun la valeur propre associée.

VI

Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q1. Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f(M) = \mathrm{tr}(AM)$.
Dans la suite, A désigne la matrice définie dans cette question IV.1.

Q2. **a/** Justifier l'existence de $M_n = \sup(f(O), O \in \mathcal{O}(n))$.

b/ Justifier que ${}^tAA$ admet n valeurs propres positives $\mu_1,\dots,\mu_n$, comptées avec multiplicités.

c/ Montrer que $M_n = \sup(\mathrm{tr}(D\Omega), \Omega \in \mathcal{O}(n))$, où D est la matrice diagonale, dont les éléments diagonaux sont $\sqrt{\mu_1},\dots,\sqrt{\mu_n}$.

d/ En déduire que $M_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\mu_k}$.

Q3. Dans cette question, f désigne la forme linéaire définie par $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(M) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} m_{i,j}$.

a/ Déterminer la matrice A telle que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(M) = \mathrm{tr}(AM)$.

b/ Montrer que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c/ Déterminer les valeurs propres de $A^{-1}\,{}^tA^{-1}$.

d/ Montrer que $M_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\cos\frac{k\pi}{2n+1}}$.

e/ Donner un équivalent de M_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Fin énoncé

Corrigé

I Décomposition polaire d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$

Q1. **a/** Soient $\mathscr{B}$ une base de $\mathbb{R}^n$, $A = \text{mat}_{\mathscr{B}}u$; $X, Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ $X = \text{mat}_{\mathscr{B}}x$ et $Y = \text{mat}_{\mathscr{B}}y$

$\Longrightarrow$ La base $\mathscr{B}$ étant orthonormé et $u^* = u$ alors :

$$\langle u(x)|y\rangle = \langle x, u(y)\rangle \implies {}^tX{}^tAY = {}^tXAY$$

Et ceci pour tout $X, Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, donc ${}^tA = A$.

Pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\}$, $\langle x|u(x)\rangle = {}^tXAX > 0$ car u est défini positif, donc $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

$\Longleftarrow$ Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$

$${}^tX{}^tAY = {}^tXAY \implies \langle u(x)|y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$$

Donc $u = u^*$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, $\langle x|u(x)\rangle = {}^tXAX > 0$ car A est définie positif, donc u est défini positif.

b/ 0 n'est pas valeur propre de S, donc S est inversible, ${}^tS = S \Longrightarrow {}^tS^{-1} = S^{-1}$ c-à-d S^{-1} est symétrique.

De plus le théorème spectrale assure l'existence d'une matrice P orthogonale et d'une matrice $D = \text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, telles que $S = PDP^{-1}$, donc $S^{-1} = P\text{diag}(\frac{1}{\lambda_1}, ..., \frac{1}{\lambda_n})P^{-1}$, il apparaît bien que les valeurs propres de S^{-1} sont strictement positives.

Q2. **a/** $v \circ (u - \lambda Id) = v^3 - \lambda v = (u - \lambda Id) \circ v$, alors $\ker(u - \lambda Id)$ est stable par v.

Posons donc $w = v/\ker(u-\lambda Id)$, w est évidement symétrique défini positif, donc diagonalisable, soit donc $\mu > 0$ l'une de ses valeurs propres.

$\exists x \in \ker(u - \lambda Id) - \{0\}$ tel que $w(x) = \mu x$, donc $w^2(x) = v^2(x) = \mu^2 x = u(x) = \lambda x$

Donc $\mu = \sqrt{\lambda}$, comme w possède des valeurs propres, alors $\text{Sp}(w) = \{\sqrt{\lambda}\}$.

L'endomorphisme w est diagonalisable, donc $\ker(u - \lambda Id) = \ker(w - \sqrt{\lambda} Id)$, c-à-d $\forall x \in \ker(u - \lambda Id)$, $v(x) = \sqrt{\lambda}x$

b/ L'endomorphisme u est diagonalisable, donc $\mathbb{R}^n = \bigoplus\limits_{\lambda \in \text{Sp}u} \ker(u - \lambda Id)$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, x s'écrit d'une façon unique sous la forme $x = \sum\limits_{\lambda \in \text{Sp}u} x_\lambda$, alors $v(x) = \sum\limits_{\lambda \in \text{Sp}u} \sqrt{\lambda}x_\lambda$, ainsi v est bien déterminé et donc unique.

Reste à montrer que v existe. Soit $\mathscr{B}$ une base de $\mathbb{R}^n$ et $A = \text{mat}_{\mathscr{B}}u$, $B = \text{mat}_{\mathscr{B}}v$. Le théorème spectrale appliqué à A assure l'existence d'une matrice P orthogonale et d'une matrice $D = \text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, telles que $S = PDP^{-1}$, tous les λ_i sont > 0, car u est défini positif, posons $B = P\text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_n})P^{-1}$.

On a bien $B^2 = A$ et B est symétrique et définie positive, c-à-d l'existence de v auto-adjoint défini positif tel que $v^2 = u$

c/ Soient $\mu_1, ..., \mu_r$ les valeurs propres distinctes de u et $m_1, ..., m_r$ leurs multiplicités respectives, considérons l'application : $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{r-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^r \\ Q & \longmapsto & (Q(\mu_1), ..., Q(\mu_r)) \end{array}$

φ est une application linéaire injective, les espaces $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ et $\mathbb{R}^r$ ont la même dimension, c'est donc un isomorphisme.

$(\sqrt{\mu_1}, ..., \sqrt{\mu_r}) \in \mathbb{R}^r$, $\exists! Q \in \mathbb{R}_{r-1}[X]$ tel que $(Q(\mu_1), ..., Q(\mu_r)) = (\sqrt{\mu_1}, ..., \sqrt{\mu_r})$, on peut écrire :

$Q(A) = Q(P\text{diag}(\mu_1 I_{m_1}, ..., \mu_r I_{m_r})P^{-1}) = P\text{diag}(Q(\mu_1)I_{m_1}, ..., Q(\mu_r)I_{m_r})P^{-1} = B$.

Q3. **a/** C'est évident que ${}^tAA$ est symétrique. Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\}$, ${}^tX{}^tAAX = \|AX\|^2 \geqslant 0$

Si $AX = 0$, alors $A^{-1}AX = 0$, c-à-d $X = 0$, donc ${}^tX{}^tAAX > 0$.

b/ Il existe une unique matrice $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que ${}^tAA = S^2$ et ceci de la question précédente car ${}^tAA \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. De la question 1, S est inversible, posons $O = AS^{-1}$, alors ${}^tOO = S^{-1}\,{}^tAA\,S^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n$.

S est unique, donc O aussi.

c/ On a ${}^t\!AA = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -6 \\ 0 & 36 & 0 \\ -6 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

L'ensemble de ses valeurs propres est $\{4, 16, 36\}$

Alors ${}^t\!AA = P\mathrm{diag}(4,16,36)\,{}^tP$ où $P = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}$, on prend alors :

$S = P\mathrm{diag}(2,4,6)\,{}^tP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, par conséquent $O = AS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.

Q4. **a/** L'application $\varphi_1 : A \longmapsto ({}^tA, A)$ est linéaire et $\varphi_2 : (A,B) \longmapsto AB$ est bilinéaire, ces applications démarrant tous des espaces de dimensions finies, donc elles sont continues. $\mathcal{O}(n) = (\varphi_2 \circ \varphi_1)^{-1}\{I_n\}$, donc $\mathcal{O}(n)$ est un fermé.

Si $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{O}(n)$, alors $\forall i, j \in [\![1,n]\!], |a_{i,j}| \leqslant 1$, alors $\|A\| \leqslant 1$, donc $\mathcal{O}(n)$ est borné, on est dans un espace de dimension fini alors $\mathcal{O}(n)$ est un compact.

b/ Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & {}^tXMX \end{array}$ est linéaire et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie donc continue.

Soit $(A_p)_p$ une suite d'éléments de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ qui converge vers A.

Soit $p \in \mathbb{N}$, on a ${}^tA_p = A_p$, donc ${}^tA = A$, car la transposition est continue.

${}^tX\,{}^tA_pX \geqslant 0$, donc ${}^tX\,{}^tAX \geqslant 0$ car φ est continue.

Donc $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, et $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est un fermé.

c/ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, posons pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $A_p = A - \dfrac{1}{p}I_n$. On a $\|A_p - A\| = \dfrac{1}{p} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Les valeurs propres de A sont en nombres finie, $\exists N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall p \geqslant N$, $\dfrac{1}{p} \notin \mathrm{Sp}(A)$.

Alors $\forall p \geqslant N, A_p \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

d/ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ qui converge vers A.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $(O_p, S_p) \in \mathcal{O}(n) \times \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ tel que $A_p = O_pS_p$.

$\mathcal{O}(n)$ est un compact, il existe une sous suite $(O_{a(p)})_p$ de $(O_p)_p$ qui converge vers $\underline{O \in \mathcal{O}(n)}$.

Comme l'application $\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M^{-1} \end{array}$ est continue (cours), alors $O_{a(p)}^{-1}$ converge vers O^{-1}.

l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ (A,B) & \longmapsto & AB \end{array}$ est continue, alors $O_{a(p)}^{-1}A_{a(p)}$ converge vers $O^{-1}A$.

Posons : $O^{-1}A = S$, alors $\underline{A = OS}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $O_{a(p)}^{-1}A_{a(p)} = S_{a(p)}$, la suite $(S_{a(p)})_p$ d'éléments de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ qui est un fermé est convergente vers $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, alors $\underline{S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})}$.

$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{orthogonale}}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{symétrique}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{orthogonale}}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{symétrique}}$, il n'y a donc pas unicité de la décomposition polaire.

Q5. L'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ (A,B) & \longmapsto & AB \end{array}$ est continue, donc φ est continue.

De la question **3.*b*)** φ est bijective.

Soit $(A_p)_p$ une suite d'éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ qui converge vers $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, posons pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A_p = O_pS_p$ et $A = OS$ les décompositions polaires de A_p et de A, montrons que $\varphi^{-1}(A_p) = (O_p, S_p)$ tend vers $\varphi^{-1}(A) = (O, S)$ c'est à dire montrons que O_p tend vers O et S_p tend vers S.

On a ${}^tA_pA_p = S_p^2$ tend vers ${}^tAA = S^2$, alors $\mathrm{tr}({}^tA_pA_p) = \mathrm{tr}(S_p^2)$ tend vers $\mathrm{tr}({}^tAA) = \mathrm{tr}(S^2)$.

L'application $(A,B) \longmapsto \mathrm{tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, posons $\|A\|_2 = \sqrt{\mathrm{tr}({}^tAA)}$.

Alors $\|S_p\|_2$ tend vers $\|S\|_2$, donc la suite $(S_p)_p$ est bornée et elle admet donc au moins une valeur d'adhérence (Bolzano).

Soient L_1 et L_2 deux valeurs d'adhérence de $(S_p)_p$, alors ils existent deux sous suites $(S_{a(p)})_p$ et $(S_{b(p)})_p$ de $(S_p)_p$ qui convergent respectivement vers L_1 et L_2, alors $L_1^2 = L_2^2 = S^2$, les matrices L_1 et L_2 sont dans $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et de la question ***I*.2)** alors $L_1 = L_2 = S$ et la suite $(S_p)_p$ admet une seul valeur d'adhérence S.
Supposons par l'absurde que $(S_p)_p$ ne converge pas vers S, alors
$\exists \varepsilon,\ \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geqslant N / \|S_n - S\| \geqslant \varepsilon$, ainsi on peut construire une sous suite $(S_{a(p)})_p$de $(S_p)_p$ qui vérifie :
$\exists \varepsilon,\ \forall p \in \mathbb{N}, \left\|S_{a(p)} - S\right\| \geqslant \varepsilon$; $(*)$
Par la même procédure la suite $(S_{a(p)})_p$ est bornée donc possède une valeur d'adhérence qui est celle de $(S_p)_p$ c-à-d S et ceci est absurde avec $(*)$
$O_p = A_p S_p^{-1}$ tend vers $O = AS^{-1}$.

II Deux applications

Première application

Q1. On a $\overline{A} = \overline{U}\,\overline{B}\,\overline{U}^{-1}$, les matrices A et B sont dans à cœfficients réelles, donc $A = \overline{U}B\overline{U}^{-1}$.

Alors ${}^tA = {}^t\overline{U}^{-1}({}^tB){}^t\overline{U}$ et ${}^t\overline{U} = U^{-1}$, donc ${}^tA = U({}^tB)U^{-1}$.

Q2. **a/** Posons $Q(X) = \det(A + XB) \in \mathbb{R}[X]$, $Q(\mathrm{i}) = \det(U) \neq 0$, donc Q est non nul, ses racines sont en nombres finis, il existe donc $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $Q(\mu) \neq 0$ et $A + \mu B$ est inversible.

b/

$$\begin{aligned} A = UBU^{-1} &\implies AU = UB \\ &\implies AX + \mathrm{i}AY = XB + \mathrm{i}YB \\ &\implies AX = XB \text{ et } AY = YB \end{aligned}$$

c/ ALors

$$\begin{aligned} AX = XB \text{ et } AY = YB &\implies AX + \mu AY = XB + \mu YB \\ &\implies A(X + \mu Y) = (X + \mu Y)B \\ &\implies A = (X + \mu Y)B(X + \mu Y)^{-1} \end{aligned}$$

En echangent les rôles de (A et ${}^tA$) et (B et ${}^tB$), on obtient ${}^tA = (X + \mu Y){}^tB(X + \mu Y)^{-1}$
La matrice $P = X + \mu Y$ qui est dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ répond à la question.

Q3. **a/** De ce qui précède $PBP^{-1} = A = {}^tP^{-1}B{}^tP$, alors ${}^tPPB = B{}^tPP$, par conséquent $S^2B = BS^2$.

Or $S^2 = (S^2)$ et de la question ***I*)2)*c*)** il existe un polynôme Q tel que $S = Q(S^2)$, alors $BS = BQ(S^2) = Q(S^2)B = SB$.

b/ On alors, $A = OSBS^{-1}O^{-1} = OBO^{-1}$.

Seconde application

Q1. La matrice ${}^tAA$ est symétrique positive, donc ses valeurs propres sont positives.

Soit λ une valeur propre de ${}^tAA$, il existe $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que ${}^tAAY = \lambda Y$.

La première équation du système entraine que ${}^tY{}^tAAY + {}^tY{}^tXXY = {}^tYY$, alors $\lambda\|Y\|^2 + \|XY\|^2 = \|Y\|^2$, ce qui s'écrit $\dfrac{\|XY\|^2}{\|Y\|^2} = 1 - \lambda > 0$ car X est inversible. Donc $\lambda \in [0, 1[$.

Q2. **a/** $\mathrm{Sp}(I_n - {}^tAA) = \left\{1 - \lambda / \lambda \in \mathrm{Sp}({}^tAA)\right\} \subset \mathbb{R}^{*+}$, donc si X solution de $(*)$ existe elle est inversible et de la partie I il existe $(U, H) \in \mathscr{O}_n \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $X = UH$.

b/ On a alors de la première équation du système $I_n - {}^tAA = H^2$, et H existe et unique de la partie ***I*)2)**.

c/ Reste à donner une matrice orthogonale U telle que la matrice $X = UH$ est solution du système.
$\exists (O, S) \in \mathscr{O}(n) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}),\ / A = OS$, alors, la matrice U, doit vérifier $S^tOUH = H^tUOS$, c'est la 2 ème équation du système. On prend $U = O$, et on vérifiera que ça marche.
On a alors $SH = HS$ et la première équation du système entraîne $S^2 + H^2 = I_n$.
En apliquant la partie I, il existe un polynôme Q tel que $Q(I_n - {}^tAA) = H$, car $I_n - {}^tAA = H^2$, alors H est un polynôme en S^2 donc en S. Le choix donc de U est convenable.

III Valeurs propres d'une matrice

Q1. $P_1(x) = x-2$ et $P_2(x) = (x-2)^2 - 1$.
Pour $p \geqslant 3$, un développement suivant la première ligne de $P_p(x)$, donne $P_p(x) = (x-2)P_{p-1}(x) - P_{p-2}(x)$.

Q2. L'application $\cos$ réalise une bijection de $]0,\pi[$ vers $]-1,1[$, $(2-x)/2 \in]-1,1[$, donc $\exists! \theta \in]0,\pi[$ tel que $2-x = 2\cos\theta$.
On remarque que $P_1(x) = -\dfrac{\sin(2\theta)}{\sin\theta}$ et $P_2(x) = \dfrac{\sin(3\theta)}{\sin\theta}$
Soit $p \geqslant 3$, supposons que $P_{p-1}(x) = (-1)^{p-1}\dfrac{\sin(p\theta)}{\sin\theta}$ et $P_{p-2}(x) = (-1)^{p-2}\dfrac{\sin((p-1)\theta)}{\sin\theta}$, alors

$$\begin{aligned}
P_p(x) &= (x-2)P_{p-1}(x) - P_{p-2}(x) \\
&= 2\cos\theta(-1)^p\frac{\sin(p\theta)}{\sin\theta} - (-1)^p\frac{\sin((p-1)\theta)}{\sin\theta} \\
&= \frac{(-1)^p}{\sin\theta}\left[2\cos\theta\sin(p\theta) - \sin(p-1)\theta\right] \\
&= \frac{(-1)^p}{\sin\theta}\sin(p+1)\theta
\end{aligned}$$

Donc $\forall p \in \mathbb{N}^*, P_p(x) = (-1)^p\dfrac{\sin(p+1)\theta}{\sin\theta}$.

Q3. La matrice A_p admet au plus p valeurs propres.
Cherchons ses valeurs propres x qui vérifient $|2-x| < 2$,

$$\begin{aligned}
P_p(x) = 0 &\iff \sin(p+1)\theta = 0 \\
&\iff (p+1)\theta = k\pi, \quad k \in \{1,\dots,p\} \text{ car } \theta \in]0,\pi[\\
&\iff \theta = \frac{k\pi}{p+1}, \quad k \in \{1,\dots,p\}
\end{aligned}$$

Alors $x_k = 2 - 2\cos\theta = 4\sin^2\dfrac{k\pi}{2(p+1)}$ avec $k \in \{1,\dots,p\}$, comme le nombre de ces valeurs propres est p, ce sont donc les valeurs propres de A_p.

Q4. A_p est symétrique réelle (ou bien admet p valeurs propres distinctes) donc diagonalisable.
Soit $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_k = 4\sin^2\dfrac{\theta_k}{2}$ où $\theta_k = \dfrac{k\pi}{p+1}$.

$$A_p\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \lambda_k\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{l} x_n - (2-\lambda_k)x_{n+1} + x_{n+2} = 0 \\ 0 \leqslant n \leqslant p-1 \\ \text{avec la convention } \ x_0 = x_{p+1} = 0 \end{array}\right.$$

Mais $2 - \lambda_k = 2\cos\theta_k$, alors x_n est de la forme $a\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta_k} + b\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta_k}$ où $a,b \in \mathbb{C}$, et puisque $x_0 = 0$, alors $x_n = 2\mathrm{i}a\sin n\theta_k$, par conséquent $E_{\lambda_k}(A_p) = \operatorname{vect}\begin{pmatrix} \sin\theta_k \\ \vdots \\ \sin p\theta_k \end{pmatrix}$

VI

Q1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, considérons l'application linéaire suivante $\delta_A : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & \operatorname{tr}(AM) \end{array}$, alors l'application $\delta : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^* \\ A & \longmapsto & \delta_A \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, en effet :
Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$,

$$A \in \ker\delta \iff \forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \ \operatorname{tr}(AM) = 0$$

En particulier $\mathrm{tr}({}^t\!AA) = 0$, par conséquent $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2 = 0$, alors $A = 0$, δ est donc injective, les espaces $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^*$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ont la même dimension qui est n^2 fini.
$f \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^*$, donc $\exists! A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ /\ \delta(A) = f$, autrement dit :

$$\exists! A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ f(M) = \mathrm{tr}(AM)$$

Q2. **a/** f est linéaire, et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, alors, f est continue.
$\mathcal{O}(n)$ est un compact et f est à valeurs dans $\mathbb{R}$, donc M_n existe.

b/ Elle est évident que ${}^t\!AA$ est symétrique positive donc amdet n valeurs propres positives comptés avec leurs multiplicités.

c/ Pour toute $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(n) & \longrightarrow & \mathcal{O}(n) \\ M & \longmapsto & BM \end{array}$ est une bijection.
De la partie I il existe $(U, H) \in \mathcal{O}(n) \times \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = UH$,
$\exists P \in \mathcal{O}(n)$ telle que ${}^t\!AA = P(D^2)\,{}^t\!P$, et $H = PD\,{}^t\!P$ et $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$
alors :

$$\begin{aligned} M_n &= \sup\{\mathrm{tr}(OA)\ /\ O \in \mathcal{O}(n)\} \\ &= \sup\{\mathrm{tr}(OUH)\ /\ O \in \mathcal{O}(n)\} \\ &= \sup\{\mathrm{tr}(\Omega H)\ /\ \Omega \in \mathcal{O}(n)\} \\ &= \sup\{\mathrm{tr}(\Omega PD\,{}^t\!P)\ /\ \Omega \in \mathcal{O}(n)\} \\ &= \sup\{\mathrm{tr}(\Omega D)\ /\ \Omega \in \mathcal{O}(n)\} \end{aligned}$$

d/ D'une part $\sup\{\mathrm{tr}(\Omega D)\ /\ \Omega \in \mathcal{O}(n)\} \geqslant \mathrm{tr}(D) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{\mu_i}$ car I_n est une matrice orthogonale.

D'autre part si on pose $\Omega = (\omega_{i,j})$, alors $\mathrm{tr}(\Omega D) = \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_{i,i}\sqrt{\mu_i}$,

Mais Ω est orthogonale, donc $\forall i, j \in \{1,..,n\}, \omega_{i,j} \leqslant 1$, donc $\mathrm{tr}(\Omega D) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{\mu_i}$, alors $M_n \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{\mu_i}$.

Par conséquent : $M_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{\mu_i}$.

Q3. **a/** Posons $A = (a_{i,j})$, pour $k, \ell \in \{1,\dots,n\}$, $f(E_{k\ell}) = \mathrm{tr}(AE_{k\ell}) = a_{\ell k} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k < \ell \\ 1 & \text{si} \quad k \geqslant \ell \end{cases}$

Alors

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b/ Posons $X \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, alors

$$\begin{aligned} AX = Y \quad &\iff \left\{ \begin{array}{ccc} x_1 + \dots + x_n & = & y_1 \\ x_2 + \dots + x_n & = & y_2 \\ \cdots & = & \cdots \\ x_n & = & y_n \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{ccc} y_1 - y_2 & = & x_1 \\ \cdots & = & \cdots \\ y_{n-1} - y_n & = & x_{n-1} \\ y_n & = & x_n \end{array} \right. \\ &\iff A^{-1}Y = X \end{aligned}$$

où $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c/ Posons $J = A^{-1}\,{}^tA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ Attention, ce n'est pas A_n de la partie III.

Mais déjà on peut remarquer qu'elle est symétrique réelle.

On reprend les notations de III, $2 - x = 2\cos\theta$.

$$\begin{aligned}
(-1)^n \chi_J(x) &= \det(xI_n - J) \\
&= (x-1)P_{n-1}(x) - P_{n-2}(x) \quad \text{Décomposition suivant la dernière ligne} \\
&= (x-1)(-1)^{n-1}\frac{\sin n\theta}{\sin\theta} - (-1)^n \frac{\sin(n-1)\theta}{\sin\theta} \\
&= \frac{(-1)^n}{\sin\theta}[\sin n\theta(2\cos\theta - 1) - \sin(n-1)\theta] \\
&= \frac{(-1)^n}{\sin\theta}[\sin(n+1)\theta - \sin n\theta] \\
&= \frac{(-1)^n}{\cos\theta/2}[\cos(2n+1)\theta/2]
\end{aligned}$$

Alors

$$\chi_J(x) = 0 \iff \theta = \frac{(2k+1)\pi}{2n+1}; \quad k \in \{0, \dots, (n-1)\}$$

Ainsi $x = 2(1 - \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n+1}) = 2(1 + \cos(\pi - \frac{(2k+1)\pi}{2n+1})) = 2(1 + \cos\frac{2(n-k)\pi}{2n+1}) = 4\cos^2\frac{(n-k)\pi}{2n+1}$

Donc $\mathrm{Sp}(A^{-1}\,{}^tA^{-1}) = \left\{4\cos^2\frac{(n-k)\pi}{2n+1} \,/\, k \in [[0, n-1]]\right\} = \left\{4\cos^2\frac{k\pi}{2n+1} \,/\, k \in [[1, n]]\right\}$

d/ On a ${}^tAA = J^{-1}$, donc $\mu_k^{-1} = 4\cos^2\frac{k\pi}{2n+1}$, par conséquent :

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\cos\frac{k\pi}{2n+1}}$$

e/ Remarquons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\cos\frac{k\pi}{2n+1}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{2n+1})} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sin(\frac{2k+1}{2(2n+1)}\pi)}$.

On a $\forall x \in]0, \pi/2[,\ 0 < x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x$.

Donc

$$s_n \overset{\text{déf}}{\widehat{=}} \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\frac{2k+1}{(2n+1)}\pi} \leqslant M_n \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\frac{2k+1}{(2n+1)}\pi - \frac{(2k+1)^3}{24(2n+1)^3}\pi^3} \overset{\text{déf}}{\widehat{=}} S_n$$

Mais

$$s_n = \frac{(2n+1)}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2k+1} = \frac{(2n+1)}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n\ln n}{\pi}$$

En effet la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k}$ diverge et $\dfrac{1}{2k-1} \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2k}$, de plus $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

Pour montrer que $M_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n\ln n}{\pi}$, il suffit de montrer que $S_n - s_n \underset{n\to+\infty}{=} o(s_n)$.

Lorsque cela est possible, on a $\dfrac{1}{x-\frac{x^3}{24}}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x}{24(1-\frac{x^2}{24})}$, alors :

$$0 \leqslant S_n - s_n = \frac{1}{24}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\frac{2k+1}{2n+1}\pi}{\left(1-\frac{(2k+1)^2}{24(2n+1)^2}\pi^2\right)} \leqslant \frac{1}{24}\sum_{k=1}^{2n}\frac{\frac{k}{2n+1}\pi}{\left(1-\frac{k^2}{24(2n+1)^2}\pi^2\right)} \leqslant \frac{2n+1}{24\pi}\,\frac{\pi}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n}\frac{\frac{k}{2n+1}\pi}{\left(1-\frac{k^2}{24(2n+1)^2}\pi^2\right)}$$

Mais $\dfrac{\pi}{2n+1}\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{\frac{k}{2n+1}\pi}{\left(1-\frac{k^2}{24(2n+1)^2}\pi^2\right)} \xrightarrow{n\to+\infty} \int_0^{\pi}\frac{x}{1-\frac{x^2}{24}}\,dx = -12\ln\left(1-\frac{\pi^2}{24}\right)$

Alors $\dfrac{2n+1}{24\pi}\,\dfrac{\pi}{2n+1}\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{\frac{k}{2n+1}\pi}{\left(1-\frac{k^2}{24(2n+1)^2}\pi^2\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{n}{\pi}\ln\left(1-\frac{\pi^2}{24}\right) \underset{n\to+\infty}{=} o(n\ln n)$

Par conséquent : $S_n - s_n \underset{n\to+\infty}{=} o(s_n)$, donc $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} s_n$.

Conclusion :

$$M_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n\ln n}{\pi}$$

Pour les coquilles....., $\boxed{\text{sadikoulmeki@yahoo.fr}}$