Corrigé

1 Les équations de Cauchy-Riemann

1) a) $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi]$ (car f et g le sont sur $\mathbb{R}^2$) et on a immédiatement

$$\boxed{\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta \, \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta \, \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)}$$

et

$$\boxed{\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin\theta \, \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta \, \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)}$$

b) De même (en omettant les variables pour plus de lisibilité),

$$\frac{\partial \tilde{g}}{\partial r} = \cos\theta \, \frac{\partial g}{\partial x} + \sin\theta \, \frac{\partial g}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \theta} = -r\sin\theta \, \frac{\partial g}{\partial x} + r\cos\theta \, \frac{\partial g}{\partial y}$$

d'où, à l'aide des équations de Cauchy-Riemann,

$$\boxed{\frac{\partial \tilde{g}}{\partial r} = -\cos\theta \, \frac{\partial f}{\partial y} + \sin\theta \, \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}} \text{ et } \boxed{\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \theta} = r\sin\theta \, \frac{\partial f}{\partial y} + r\cos\theta \, \frac{\partial f}{\partial x} = r\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}}$$

2) a) Soit $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, fixé. Pour tout α réel, φ_α est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\varphi_\alpha \in \mathcal{E}_n \iff \forall t > 0 \quad t^2\varphi_\alpha''(t) + t\varphi_\alpha'(t) - n^2\varphi_\alpha(t) = 0$$

d'où

$$\boxed{\varphi_\alpha \in \mathcal{E}_n} \iff \forall t > 0 \quad \big(\alpha(\alpha-1) + \alpha - n^2\big)\, t^\alpha = 0 \iff \alpha^2 - n^2 = 0 \boxed{\iff \alpha = \pm n}$$

b) On sait que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{E}_n$ est un plan vectoriel (espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 pouvant s'écrire sous forme résolue sur $\mathbb{R}_+^*$). Par ailleurs, pour $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, on sait d'après la question précédente que φ_n et φ_{-n} sont solutions de $\mathcal{E}_n$; comme ces fonctions sont linéairement indépendantes (car manifestement non proportionnelles), elles forment une base de $\mathcal{E}_n$. Par conséquent,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad \mathcal{E}_n = \operatorname{Vect}(\varphi_n, \varphi_{-n})}$$

On ne dispose par contre que d'une droite (engendrée par la fonction constante φ_0) incluse dans $\mathcal{E}_0$. On résout donc directement l'équation différentielle dans le cas $n = 0$:

$$f \in \mathcal{E}_0 \iff \forall t > 0 \quad t^2 f''(t) + t f'(t) = 0 \iff \exists \lambda_1 \in \mathbb{R}, \forall t > 0 \quad f'(t) = \frac{\lambda_1}{t}$$

donc

$$f \in \mathcal{E}_0 \iff \exists\, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, \forall t > 0 \quad f(t) = \lambda_1 \ln t + \lambda_2, \text{ d'où } \boxed{\mathcal{E}_0 = \operatorname{Vect}(\varphi_0, \ln)}$$

3) a) On applique le théorème de dérivation sous le signe $\int$; notons $\psi : \mathbb{R}_+^* \times [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ telle que $\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [-\pi,\pi] \quad \psi(r,\theta) = \tilde{f}(r,\theta) e^{-in\theta}$. La fonction $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition, ce qui légitime les assertions suivantes :

– Pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $\psi(r,\cdot)$ est continue (comme produit de fonctions continues) donc intégrable sur le segment $[-\pi,\pi]$;

– La fonction ψ admet une dérivée partielle par rapport à la première variable avec :

$$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [-\pi,\pi] \quad \frac{\partial \psi}{\partial r}(r,\theta) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\theta) e^{-in\theta}$$

– Pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $\frac{\partial \psi}{\partial r}(r,\cdot)$ est continue (comme produit de fonctions continues) donc intégrable sur le segment $[-\pi,\pi]$;

– Pour tout $\theta \in [-\pi,\pi]$, la fonction $\frac{\partial \psi}{\partial r}(\cdot,\theta)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$;

– Soit $[a,b]$ un segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$; la fonction $\left|\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}\right|$ est continue sur le compact $K = [a,b] \times [-\pi,\pi]$, donc y est bornée. En notant M_1 son maximum sur K, on a donc :

$$\forall (r,\theta) \in [a,b] \times [-\pi,\pi] \quad \left|\frac{\partial \psi}{\partial r}(r,\theta)\right| \leq M_1$$

et la fonction constante $\theta \longmapsto M_1$ est continue, positive et intégrable sur le segment $[-\pi,\pi]$. L'hypothèse de domination locale est donc vérifiée.

Il en résulte que $\boxed{\text{la fonction } c_{n,f} \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$ et, avec 1)b) :

$$\forall r \in \mathbb{R}_+^* \quad (c_{n,f})'(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\theta) e^{-in\theta} \,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi r} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \theta}(r,\theta) e^{-in\theta} \,\mathrm{d}\theta$$

Fixons $r \in \mathbb{R}_+^*$; les fonctions qui à θ associent respectivement $\tilde{g}(r,\theta)$ et $e^{-in\theta}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur $[-\pi,\pi]$, et sont d'autre part 2π-périodiques, ce qui permet d'intégrer par parties et de simplifier :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \theta}(r,\theta) e^{-in\theta} \,\mathrm{d}\theta = \underbrace{\left[\tilde{g}(r,\theta) e^{-in\theta}\right]_{\theta=-\pi}^{\theta=\pi}}_{=0 \text{ par } 2\pi-\text{périodicité par rapport à } \theta} + in \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{g}(r,\theta) e^{-in\theta} \,\mathrm{d}\theta$$

On en déduit que

$$\boxed{\forall r \in \mathbb{R}_+^* \quad (c_{n,f})'(r) = \frac{in}{r} c_{n,g}(r)}$$

b) On montre de même que précédemment que la fonction $c_{n,g}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec

$$\forall r \in \mathbb{R}_+^* \quad (c_{n,g})'(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial r}(r,\theta) e^{-in\theta} \,\mathrm{d}\theta = -\frac{1}{2\pi r} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r,\theta) e^{-in\theta} \,\mathrm{d}\theta = -\frac{in}{r} c_{n,f}(r)$$

par le même type d'intégration par parties, mutatis mutandis. Cela implique que $\boxed{c_{n,f} \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$ et, en dérivant l'expression de $(c_{n,f})'$,

$$\forall r \in \mathbb{R}_+^* \quad (c_{n,f})''(r) = -\frac{in}{r^2} c_{n,g}(r) + \frac{n^2}{r^2} c_{n,f}(r) = -\frac{1}{r} (c_{n,f})'(r) + \frac{n^2}{r^2} c_{n,f}(r)$$

d'où finalement

$$\forall r \in \mathbb{R}_+^* \quad r^2 (c_{n,f})''(r) + r (c_{n,f})'(r) - n^2 c_{n,f}(r) = 0 \text{ ie } \boxed{c_{n,f} \in \mathcal{E}_n}$$

Par ailleurs, f étant continue (car de classe $\mathcal{C}^1$) sur $\mathbb{R}^2$, elle est bornée sur la boule fermée unité (pour la norme euclidienne usuelle), qui est compacte. Par conséquent : $\exists M_2 \in \mathbb{R}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad x^2+y^2 \leq 1 \implies |f(x,y)| \leq M_2$. On a donc a fortiori : $\forall (r,\theta) \in]0,1] \times [-\pi,\pi] \quad \left|\tilde{f}(r,\theta)\right| \leq M_2$, d'où

$$\forall r \in]0,1] \quad |c_{n,f}(r)| \leq M_2$$

ce qui prouve que $\boxed{c_{n,f} \text{ est bornée au voisinage de } 0}$. Or $c_{n,f} \in \mathcal{E}_n$; si $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\mathcal{E}_n = \operatorname{Vect}(\varphi_n, \varphi_{-n}) = \operatorname{Vect}\left(\varphi_{|n|}, \varphi_{-|n|}\right)$ d'après 2)b) et, des deux fonctions précédentes, seule $\varphi_{|n|}$ est bornée au voisinage de 0. De même, $\mathcal{E}_0 = \operatorname{Vect}(\varphi_0, \ln)$ et φ_0 est bornée au voisinage de 0 tandis que ln ne l'est pas. Par conséquent, dans tous les cas, $c_{n,f} \in \operatorname{Vect}\left(\varphi_{|n|}\right)$, autrement dit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z} \quad \exists a_n \in \mathbb{C}, \forall r \in \mathbb{R}_+^* \quad c_{n,f}(r) = a_n r^{|n|}}$$

c) Fixons $r \in \mathbb{R}_+^*$; l'application partielle $\tilde{f}(r,\cdot)$ est 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ (donc en particulier continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux) sur $\mathbb{R}$. On peut donc lui appliquer le théorème de convergence normale, selon lequel sa série de Fourier converge (normalement sur $\mathbb{R}$) vers $\tilde{f}$. Après avoir remarqué que les $c_{n,f}$ ne sont autres que les coefficients de Fourier exponentiels de $\tilde{f}$ et appliqué le résultat précédent, on en déduit que

$$\boxed{\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \quad \tilde{f}(r,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n r^{|n|} e^{in\theta}}$$

4) a) D'après 1)a), si les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont bornées sur $\mathbb{R}^2$, il en est de même de la fonction $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. En notant M_3 un majorant de $\left|\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}\right|$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on a, avec la première expression de $(c_{n,f})'(r)$:

$$\left|(c_{n,f})'(r)\right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\theta)\right| \mathrm{d}\theta = M_3$$

donc, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{Z},\ (c_{n,f})' \text{ est bornée sur } \mathbb{R}_+^*}$.

b) D'après 3)b), on a $\forall (r,n) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{Z} \quad (c_{n,f})'(r) = |n|\, a_n r^{|n|-1}$; mais $(c_{n,f})'$ devant être bornée sur $\mathbb{R}_+^*$, cela implique (en faisant tendre r vers $+\infty$) que si $|n| \geq 2$, alors $a_n = 0$. La question 3)c) donne alors :

$$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \quad \tilde{f}(r,\theta) = \left(a_{-1}e^{-i\theta} + a_1 e^{i\theta}\right) r + a_0$$

soit encore

$$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \quad \tilde{f}(r,\theta) = (a_{-1}+a_1)\, r\cos\theta + i\,(a_1 - a_{-1})\, r\sin\theta + a_0$$

d'où l'on déduit

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = (a_{-1}+a_1)\, x + i\,(a_1 - a_{-1})\, y + a_0$$

Il en résulte immédiatement

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = a_{-1} + a_1 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = i\,(a_1 - a_{-1})$$

Par conséquent, $\boxed{\text{les fonctions } \frac{\partial f}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial x} \text{ sont constantes sur } \mathbb{R}^2}$.

2 Quelques solutions de (1)

1) Soit $\psi : (x,y) \longmapsto ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f \in \mathcal{P}_2$. Alors

$$\boxed{\psi \text{ est solution de } (1) \iff 4ac-b^2=1}$$

2) Remarquons que si u est solution de (2), alors u ne peut s'annuler sur I. En supposant que $0 \notin I$, on peut alors écrire

$$\forall t \in I \quad u'(t) = -\frac{1}{2t}\left(\frac{1}{u(t)}+u(t)\right)$$

La fonction $\xi : (t,u) \longmapsto -\frac{1}{2t}\left(\frac{1}{u}+u\right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $(\mathbb{R}^*)^2$; en vertu du théorème de Cauchy-Lipschitz, pour tout $(t_0,u_0) \in (\mathbb{R}^*)^2$, le problème de Cauchy $\begin{cases} u' = \xi(t,u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$ admet une solution maximale (unique), qui est définie sur un intervalle ouvert contenant t_0.

3) Si u était solution polynômiale de (2) sur J, alors u serait constante pour des raisons de degré, et on aurait alors $u^2=-1$, ce qui est impossible car u est à valeurs réelles. On en déduit qu' $\boxed{\text{il n'existe pas de solution polynômiale de (2) sur un intervalle non vide}}$.

4) a) $\Omega(J)$ est l'image réciproque de l'(intervalle) ouvert J par l'application continue (car polynômiale, ou bilinéaire sur un espace de dimension finie) $(x,y) \longmapsto xy$, donc $\Omega(J)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Par ailleurs, $\Omega(J) \neq \emptyset$ car il contient par exemple $\{1\} \times J$ et $J \neq \emptyset$. Finalement, $\boxed{\Omega(J) \text{ est un ouvert non vide de } \mathbb{R}^2}$.

b) $\boxed{W \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \Omega(J)}$ en tant que composée d'une application de classe $\mathcal{C}^2$ et d'une application de classe $\mathcal{C}^\infty$. On calcule ensuite

$$\forall (x,y) \in \Omega(J) \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(x,y) = y^2 w''(xy), \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}(x,y) = x^2 w''(xy)$$

et

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}(x,y) = xyw''(xy) + w'(xy)$$

Donc

$$W \text{ vérifie (1) sur } \Omega(J) \iff \forall (x,y) \in \Omega(J) \quad (xyw''(xy))^2 - (w'(xy)+xyw''(xy))^2 = 1$$

En développant et en simplifiant, on obtient

$$W \text{ vérifie (1) sur } \Omega(J) \iff \forall (x,y) \in \Omega(J) \quad w'(xy)\,(w'(xy)+2xyw''(xy)) = -1$$

On en déduit que si w' vérifie (2) sur J, alors W vérifie (1) sur $\Omega(J)$. Réciproquement, si W vérifie (1) sur $\Omega(J)$, alors pour tout $t \in J$, on a $w'(t)(w'(t)+2tw''(t)) = -1$ en prenant $(x,y)=(1,t)$ dans la relation précédente, donc w' vérifie (2) sur J. Finalement, $\boxed{W \text{ vérifie (1) sur } \Omega(J) \iff w' \text{ vérifie (2) sur } J}$.

c) Si w est affine, il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall t \in J \quad w(t) = \alpha t + \beta$; mais alors $\forall (x,y) \in \Omega(J) \quad W(x,y) = \alpha xy + \beta$, donc W est la restriction d'une fonction de $\mathcal{P}_2$. Réciproquement, supposons que W est la restriction à $\Omega(J)$ d'une fonction de $\mathcal{P}_2$.

Alors $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$ sont des constantes (notées respectivement K_1 et K_2) sur $\Omega(J)$; or on a par ailleurs $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = y^2 w''(xy)$ et $\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = x^2 w''(xy)$. Supposons que w'' ne soit pas la fonction nulle sur J ; il existe alors $t_0 \in J$, que l'on peut supposer non nul par continuité de w'', tel que $w''(t_0) \neq 0$. Il est alors possible (il y a suffisamment de points sur une hyperbole pour cela) de choisir $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x_0 y_0 = t_0$ et $K_1 x_0^2 \neq K_2 y_0^2$: contradiction. On en déduit que $w'' = 0$ sur J, donc que w est une fonction affine. Finalement,
$\boxed{W \text{ est la restriction à } \Omega(J) \text{ d'une fonction de } \mathcal{P}_2 \iff w \text{ est une fonction affine}}$.

5) Comme $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$, $f_{a,b} \in \mathcal{C}^2(\Omega_{a,b}, \mathbb{R})$ et

$$\forall (x,y) \in \Omega_{a,b} \quad \frac{\partial^2 f_{a,b}}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x-a, y-b), \text{ etc.}$$

Il en résulte immédiatement que $\boxed{f_{a,b} \text{ vérifie (1) sur } \Omega_{a,b}}$.

6) On peut supposer, quitte à translater (question précédente), que $(x_0, y_0) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$. Posons $t_0 = x_0 y_0$ et fixons $u_0 \in \mathbb{R}^*$; d'après 1), il existe un intervalle ouvert J contenant t_0 et une fonction $u \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{R})$ vérifiant (2) sur J avec $u(t_0) = u_0$. Alors pour toute primitive w de u sur J, la fonction W définie comme au 4) sera solution de (1) sur $\Omega(J) = U$; on obtient ainsi (via le choix des constantes d'intégration) une infinité de fonctions de $\mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ vérifiant (1) sur U. Si par ailleurs l'une de ces fonctions W appartenait à $\mathcal{P}_2$, cela impliquerait que w est affine d'après 4)c), donc u constante, ce qui est impossible d'après 3). $\boxed{\text{D'où le résultat}}$.

3 Un critère de difféomorphisme

1) Un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme est une application de classe $\mathcal{C}^1$, bijective, et telle que sa réciproque soit $\mathcal{C}^1$.
Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $f(\mathbb{R}^2)$ si f est injective et sa différentielle en tout point est inversible.
Remarque préliminaire : l'inégalité $\forall (p,h) \in (\mathbb{R}^2)^2 \quad \langle \mathrm{d}F_p(h), h \rangle \geq \alpha \|h\|^2$ implique que $\boxed{\text{la différentielle de } F \text{ est injective (donc bijective) en tout point de } \mathbb{R}^2}$.

2) a) Soit $\psi : t \in \mathbb{R} \longmapsto F(p + t(q-p))$; par composition, ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \psi'(t) = \langle \mathrm{grad} F(p + t(q-p)), q-p \rangle = \mathrm{d}F_{p+t(q-p)}(q-p)$$

d'où

$$\psi(1) - \psi(0) = \boxed{F(q) - F(p) = \int_0^1 \mathrm{d}F_{p+t(q-p)}(q-p)\,\mathrm{d}t}$$

b) On a donc

$$\langle F(q) - F(p), q-p \rangle = \langle \int_0^1 \mathrm{d}F_{p+t(q-p)}(q-p)\,\mathrm{d}t, q-p \rangle$$

Or l'application $\langle \cdot, q-p \rangle$ (où p et q sont fixés) est linéaire, donc

$$\langle F(q) - F(p), q-p \rangle = \int_0^1 \langle \mathrm{d}F_{p+t(q-p)}(q-p), q-p \rangle\,\mathrm{d}t$$

d'où, grâce à l'hypothèse sur F et à la croissance de l'intégrale,

$$\boxed{\langle F(q)-F(p), q-p\rangle \geq \int_0^1 \alpha \|q-p\|^2 \, \mathrm{d}t = \alpha \|q-p\|^2}$$

On remarque que cette inégalité implique que $\boxed{F \text{ est injective}}$.

3) a) On peut écrire $G^a = N \circ F^a$ avec $N : p \longmapsto \|p\|^2$ et $F^a : p \longmapsto F(p) - a$. Le point a étant fixé, l'application F^a est manifestement différentiable en tout point avec $\forall p \in \mathbb{R}^2 \quad \mathrm{d}F^a_p = \mathrm{d}F_p$; par ailleurs, la relation

$$\forall (p,h) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^2 \quad \|p+h\|^2 - \|p\|^2 = 2\langle p, h\rangle + \|h\|^2$$

montre que N est différentiable en tout point, avec $\forall p \in \mathbb{R}^2 \quad \mathrm{d}N_p : h \longmapsto 2\langle p, h\rangle$. On en déduit par composition que $\boxed{G^a \text{ est différentiable en tout point}}$ et

$$\boxed{\forall (p,h) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^2 \quad \mathrm{d}G^a_p(h)} = \mathrm{d}N_{F^a(p)}\left(\mathrm{d}F^a(h)\right) \boxed{= 2\langle F(p)-a, \, \mathrm{d}F_p(h)\rangle}$$

b) En utilisant 2)b) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\forall (p,q) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^2 \quad \|F(q)-F(p)\| \, \|q-p\| \geq \langle F(q)-F(p), q-p\rangle \geq \alpha \|q-p\|^2$$

d'où

$$\forall (p,q) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^2 \quad \|F(q)-F(p)\| \geq \alpha \|q-p\|$$

(l'inégalité est vraie même si $q = p$). En particulier, en notant $0 = (0,0)$,

$$\forall p \in \mathbb{R}^2 \quad \|F(p) - F(0)\| \geq \alpha \|p\|$$

d'où, en vertu de l'inégalité triangulaire,

$$\forall p \in \mathbb{R}^2 \quad \|F(p)\| \geq \alpha \|p\| - \|F(0)\|$$

d'où, de même,

$$\forall p \in \mathbb{R}^2 \quad \|F(p) - a\| \geq \|F(p)\| - \|a\| \geq \underbrace{\alpha \|p\| - \|F(0)\| - \|a\|}_{\to +\infty \text{ lorsque } \|p\| \to +\infty}$$

A fortiori, $\boxed{G^a(p) \to +\infty \text{ lorsque } \|p\| \to +\infty}$.

c) D'après la question précédente :

$$\exists A \in \mathbb{R}_+^*, \forall p \in \mathbb{R}^2 \quad \|p\| > A \implies G^a(p) > G^a(0)$$

De plus, la restriction de la fonction continue G^a à la boule fermée $\mathcal{B}$ de centre 0 et de rayon A, qui est compacte, admet un minimum m atteint en un point p_0 ; par construction, on a alors : $\forall p \in \mathbb{R}^2 \quad G^a(p) \geq m$ (en effet, $\forall p \in \mathcal{B} \quad G^a(p) \geq m$ et $\forall p \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{B} \quad G^a(p) > G^a(0) \geq m$). Donc $\boxed{G^a \text{ admet un minimum global sur } \mathbb{R}^2}$.

d) La fonction G^a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$ et admet un minimum global en p_0, donc sa différentielle est nulle en p_0. On a donc d'après 3)a) :

$$\forall h \in \mathbb{R}^2 \quad \langle F(p_0) - a,\, \mathrm{d}F_{p_0}(h)\rangle = 0$$

Or on a vu en 1) que $\mathrm{d}F_{p_0}$ est bijective, donc $\mathrm{d}F_{p_0}(h)$ décrit $\mathbb{R}^2$ lorsque h décrit $\mathbb{R}^2$. Le vecteur $F(p_0) - a$ est donc orthogonal à tout vecteur de $\mathbb{R}^2$, donc il est nul : $\boxed{F(p_0) = a}$.

4) On peut maintenant appliquer le théorème rappelé au 1) : F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ par hypothèse, injective d'après 2)b), surjective d'après 3) et $\mathrm{d}F$ est bijective en tout point d'après la remarque du 1). On en déduit que $\boxed{F \text{ est un } \mathcal{C}^1\text{-difféomorphisme de } \mathbb{R}^2 \text{ sur } \mathbb{R}^2}$.

4 Le théorème de Jörgens

1) F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ car f est de classe $\mathcal{C}^2$. On a immédiatement (en utilisant le théorème de Schwarz pour les dérivées croisées, car f est $\mathcal{C}^2$)

$$\mathrm{Jac}F(x,y) - I_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$

Le déterminant de cette matrice symétrique vaut 1 par hypothèse sur f, et sa trace est strictement positive comme somme de deux termes strictement positifs (comme f vérifie (1), $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ sont de même signe en tout point car leur produit est strictement positif, et on a supposé $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$). Donc les valeurs propres λ_1 et λ_2 de la matrice sont strictement positives, donc $\boxed{\mathrm{Jac}F(x,y) - I_2 \text{ est symétrique (définie) positive}}$.
On a par conséquent

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall h \in \mathbb{R}^2 \quad \langle \mathrm{d}F_{(x,y)}(h), h\rangle = \|h\|^2 + \underbrace{\langle (\mathrm{Jac}F(x,y) - I_2)(h), h\rangle}_{\geq 0} \geq \|h\|^2$$

Donc $\boxed{F \text{ est un } \mathcal{C}^1\text{-difféomorphisme de } \mathbb{R}^2 \text{ sur } \mathbb{R}^2}$ (les hypothèses de la partie III sont vérifiées avec $\alpha = 1$).

2) a) Le système peut s'écrire sous la forme

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad (\Xi \circ F)(x,y) = \left(x - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y), -y + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \kappa(x,y)$$

en notant $\Xi = (\varphi, \psi)$. Il suffit donc de poser $\boxed{\Xi = \kappa \circ F^{-1}}$ (F est bijective d'après la question précédente), et $\boxed{\Xi \text{ est de classe } \mathcal{C}^1}$ comme composée d'applications de classe $\mathcal{C}^1$.

b) La relation précédente peut être traduite en termes de matrices jacobiennes, avec les notations de l'énoncé :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-r & -s \\ s & -1+t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+r & s \\ s & 1+t \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1-r & -s \\ s & -1+t \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{r+t+2} \begin{pmatrix} 1+t & -s \\ -s & 1+r \end{pmatrix}$$

d'où il découle

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{1-r+t-rt+s^2}{r+t+2} = \frac{t-r}{r+t+2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{-2s}{r+t+2} \end{array} \right.} \quad \text{et} \quad \boxed{\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \psi}{\partial u} = \frac{2s}{r+t+2} = -\frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial v} = \frac{rt-s^2-r+t-1}{r+t+2} = \frac{t-r}{r+t+2} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \end{array} \right.}$$

c) On calcule astucieusement :

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2=\frac{t^2+r^2-2rt+4s^2}{(r+t+2)^2}=\frac{t^2+r^2+2rt-4}{(r+t+2)^2}=\frac{(r+t)^2-4}{(r+t)^2+4+4(r+t)}<1$$

en utilisant $(r,t)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ et $rt-s^2=1$. On en déduit que $\boxed{\frac{\partial\varphi}{\partial u} \text{ et } \frac{\partial\varphi}{\partial v} \text{ sont bornées sur } \mathbb{R}^2}$.

d) Les fonctions φ et ψ appartiennent à $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, vérifient les équations de Cauchy-Riemann d'après 2)b), et $\frac{\partial\varphi}{\partial u}$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial v}$ sont bornées sur $\mathbb{R}^2$. Le dernier résultat de la partie I prouve alors que $\boxed{\frac{\partial\varphi}{\partial u} \text{ et } \frac{\partial\varphi}{\partial v} \text{ sont constantes sur } \mathbb{R}^2}$.

e) En notant $K\in[0,1[$ la valeur constante de $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2$ du c), on voit que $r+t$ est solution de l'équation de second degré

$$(1-K)X^2-4KX-4(1+K)=0$$

Cette équation admet une racine positive et une seule et l'on peut ainsi exprimer $r+t$ en fonction de K, donc $r+t$ est constante. L'expression de $\frac{\partial\varphi}{\partial v}$ montre alors que s est constante, et celle de $\frac{\partial\varphi}{\partial u}$ que $t-r$ est constante ; finalement, $\boxed{r, s \text{ et } t \text{ sont constantes}}$.

3) Soit $f\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ vérifiant (1) sur $\mathbb{R}^2$.

– Si $r=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}>0$, on peut appliquer ce qui précède ; en particulier, r, s et t sont constantes. En intégrant :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\quad\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=rx+h_1(y)\quad(3)$$

où h_1 est une fonction d'une variable de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. En dérivant par rapport à la deuxième variable (et en utilisant à nouveau le théorème de Schwarz), on obtient

$$\forall y\in\mathbb{R}\quad s=h_1'(y)$$

donc en reportant dans (3) :

$$\exists K_1\in\mathbb{R},\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\quad\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=rx+sy+K_1$$

On intègre à nouveau par rapport à la première variable :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\quad f(x,y)=\frac{1}{2}rx^2+sxy+K_1x+h_2(y)$$

(h_2 fonction d'une variable de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$). Il reste à dériver deux fois par rapport à la deuxième variable :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\quad\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=t=h_2''(y)$$

d'où finalement

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\quad f(x,y)=\frac{1}{2}rx^2+sxy+\frac{1}{2}ty^2+K_1x+K_2y+K_3$$

où K_1, K_2 et K_3 sont des constantes, donc $f\in\mathcal{P}_2$.

– Si l'on n'est pas dans le cas $r>0$, on a nécessairement $r<0$ car la relation (1) implique que $r\neq0$. Il suffit alors d'appliquer la démarche précédente à la fonction $-f$, qui appartient à $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ et vérifie également (1).

Dans tous les cas : $\boxed{\text{les seules fonctions de } \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}) \text{ vérifiant (1) appartiennent à } \mathcal{P}_2}$.