



Ce sujet est divisé en trois parties. La partie III est indépendante des deux premières (même si les parties II et III ont en commun de s'intéresser à des matrices dites de Hankel).

Il est attendu des candidat(e)s qu'ils fassent preuve de qualités de rédaction, de clarté et de présentation.

#### Notations

Dans tout le problème,  $\mathbb{K}$  désigne indifféremment  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

On note  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  l'espace vectoriel des suites à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .

Pour tout espace vectoriel  $E$  sur  $\mathbb{K}$ , on note  $\mathcal{L}(E)$  l'algèbre des endomorphismes de  $E$ .

On note  $\sigma$  l'élément de  $\mathcal{L}(\mathbb{K}^{\mathbb{N}})$  qui à tout  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  associe  $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  de terme général  $y_n = x_{n+1}$ .

On note  $\mathbb{K}[X]$  l'algèbre des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$ , et  $\mathbb{K}_m[X]$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}[X]$  formé des polynômes de degré inférieur ou égal à  $m$ .

On rappelle qu'un polynôme non nul est dit unitaire si le coefficient de son monôme de plus haut degré vaut 1.

On note  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  l'algèbre des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .

Si  $M$  est une matrice carrée, on note  ${}^tM$  sa transposée et  $\text{tr}(M)$  sa trace.

On note  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre  $n$  à coefficients réels.

#### Rappels sur les polynômes d'endomorphisme

On effectue ici quelques rappels utiles sur les polynômes d'endomorphisme d'un espace vectoriel.

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ . On note  $\text{Id}$  l'endomorphisme identité de  $E$ .

Pour tout  $f$  de  $\mathcal{L}(E)$ , et tout  $A = \sum_{k=0}^p a_k X^k$  de  $\mathbb{K}[X]$ , on note  $A(f) = \sum_{k=0}^p a_k f^k$  (avec la convention  $f^0 = \text{Id}$ ).

Pour tout  $f$  de  $\mathcal{L}(E)$ , l'application  $A \mapsto A(f)$  est alors un *morphisme d'algèbres* de  $\mathbb{K}[X]$  dans  $\mathcal{L}(E)$ .

Rappelons que cela signifie que, pour tous  $A, B$  de  $\mathbb{K}[X]$  et pour tous scalaires  $\alpha, \beta$  de  $\mathbb{K}$ , on a :

- $(\alpha A + \beta B)(f) = \alpha A(f) + \beta B(f)$  ;
- si  $A = 1$ , alors  $A(f) = \text{Id}$  ;
- $(AB)(f) = A(f) \circ B(f) = B(f) \circ A(f)$ .

Cas particulier (utile dans la suite du problème) :

- Si  $E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ,  $f = \sigma$  et  $A = \sum_{k=0}^p a_k X^k$ , alors  $A(\sigma) = \sum_{k=0}^p a_k \sigma^k$ .
- Pour tout  $x$  de  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ,  $y = A(\sigma)(x)$  est donc la suite de terme général  $y_n = \sum_{k=0}^p a_k x_{n+k}$ .

## I Suites récurrentes linéaires

Soit  $p$  un entier naturel.

On dit qu'un élément  $x$  de  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  est une *suite récurrente linéaire* (en abrégé une SRL) d'ordre  $p \geq 0$  s'il existe un polynôme  $A = \sum_{k=0}^p a_k X^k$  dans  $\mathbb{K}[X]$  de degré  $p$ , tel que  $A(\sigma)(x)$  soit la suite nulle, c'est-à-dire si :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^p a_k x_{n+k} = a_p x_{n+p} + a_{p-1} x_{n+p-1} + \dots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = 0 \tag{I.1}$$

On dit que la **relation I.1** (dans laquelle, rappelons-le,  $a_p$  est non nul) est une relation de récurrence linéaire d'ordre  $p$ , dont  $A$  est un *polynôme caractéristique*.

L'ensemble des suites  $x$  de  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  qui obéissent à **I.1** est noté  $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ .

On note  $\mathcal{R}(\mathbb{K})$  l'ensemble de toutes les suites récurrentes linéaires, quel que soit leur ordre (autrement dit,  $\mathcal{R}(\mathbb{K})$  est la réunion des  $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$  pour tous les polynômes  $A$  non nuls dans  $\mathbb{K}[X]$ ).

### I.A – Ordre (et polynôme) minimal d'une suite récurrente linéaire

Soit  $x$  une suite récurrente linéaire.

Montrer que l'ensemble  $J_x$  des polynômes  $A$  tels que  $A(\sigma)(x) = 0$  est un idéal de  $\mathbb{K}[X]$ , non réduit à  $\{0\}$ .

On rappelle qu'il en résulte deux choses :

- d'une part, il existe dans  $J_x$  un unique polynôme unitaire  $B$  de degré minimal ;
- d'autre part, les éléments de  $J_x$  sont les multiples de  $B$ .

Par définition, on dit que  $B$  est le *polynôme minimal* de la suite  $x$ , que le degré de  $B$  est l'*ordre minimal* de  $x$ , et que la relation  $B(\sigma)(x) = 0$  est la *relation de récurrence minimale* de  $x$ .

### I.B – Quelques exemples

**I.B.1)** Dans  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ , quelles sont les suites récurrentes linéaires d'ordre 0 ? d'ordre 1 ?

Quelles sont les suites de  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  dont le polynôme minimal est  $(X - 1)^2$  ?

**I.B.2)** On considère la suite  $x$  définie par  $x_0 = 0, x_1 = -1, x_2 = 2$  et par la relation de récurrence linéaire d'ordre 3 :  $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+3} = -3x_{n+2} - 3x_{n+1} - x_n$ .

Déterminer le polynôme minimal (et donc l'ordre minimal) de la suite  $x$ .

### I.C – L'espace vectoriel $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ et deux cas particuliers

Soit  $A = \sum_{k=0}^p a_k X^k$  un élément de  $\mathbb{K}[X]$ , de degré  $p \geq 0$ , que sans perdre de généralité on suppose unitaire.

**I.C.1)** Prouver que  $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$  est un sous-espace vectoriel de dimension  $p$  de  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  et qu'il est stable par  $\sigma$  (on ne demande pas ici de déterminer une base de  $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ , car c'est l'objet des questions suivantes).

**I.C.2)** Déterminer  $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$  quand  $A = X^p$  (avec  $p \geq 1$ ) et en donner une base.

**I.C.3)** Dans cette question, on suppose  $p \geq 1$  et  $A = (X - \lambda)^p$ , avec  $\lambda$  dans  $\mathbb{K}^*$ .

On note  $E_A(\mathbb{K})$  l'ensemble des  $x$  de  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  de terme général  $x_n = Q(n)\lambda^n$ , où  $Q$  est dans  $\mathbb{K}_{p-1}[X]$ .

a) Montrer que  $E_A(\mathbb{K})$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  dont on précisera la dimension.

b) Montrer l'égalité  $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = E_A(\mathbb{K})$ .

### I.D – Étude de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ quand $A$ est scindé sur $\mathbb{K}$

Dans cette question, on suppose que le polynôme  $A$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ .

Plus précisément, on note  $A = X^{m_0} \prod_{k=1}^d (X - \lambda_k)^{m_k}$ , où :

- les scalaires  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d$  sont les racines *non nulles distinctes éventuelles* de  $A$  dans  $\mathbb{K}$ , et  $m_1, m_2, \dots, m_d$  sont leurs multiplicités respectives (supérieures ou égales à 1). Si  $A$  n'a pas de racine non nulle, on convient

que  $d = 0$  et que  $\prod_{k=1}^d (X - \lambda_k)^{m_k} = 1$  ;

- l'entier  $m_0$  est la multiplicité de 0 comme racine *éventuelle* de  $A$ . Si 0 n'est *pas* racine de  $A$ , on adopte la convention  $m_0 = 0$ .

Avec ces notations, on a  $\sum_{k=0}^d m_k = \deg A = p$ .

En utilisant le théorème de décomposition des noyaux, montrer que  $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$  est l'ensemble des suites  $x = (x_n)_{n \geq 0}$  de  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  telles que :

$$\forall n \geq m_0, x_n = \sum_{k=1}^d Q_k(n) \lambda_k^n$$

où, pour tout  $k$  de  $\{1, \dots, d\}$ ,  $Q_k$  est dans  $\mathbb{K}[X]$  avec  $\deg Q_k < m_k$ .

Remarque : si  $d = 0$ , la somme  $\sum_{k=1}^d Q_k(n) \lambda_k^n$  est par convention égale à 0.

## II Matrices de Hankel associées à une suite récurrente linéaire

Soit  $x$  dans  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ . Pour tout entier  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , on note  $H_n(x)$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  définie par

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, [H_n(x)]_{i,j} = x_{i+j-2}$$

$$\text{On a par exemple } H_2(x) = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}, H_3(x) = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \text{ et } H_4(x) = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}.$$

On identifie toute matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  avec l'endomorphisme de  $\mathbb{K}^n$  qui lui est associé dans la base canonique. On identifie de même tout élément de  $\mathbb{K}^n$  avec la matrice-colonne qui lui correspond.

## II.A – Calcul du rang de $H_n(x)$ quand $x$ est une suite récurrente linéaire

Dans cette section,  $x$  est une suite récurrente linéaire d'ordre minimal  $p \geq 1$  et de polynôme minimal  $B$ .

**II.A.1)** Montrer que la famille  $(\sigma^k(x))_{0 \leq k \leq p-1}$  est une base de  $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ .

En déduire, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , le rang de la famille  $(\sigma^k(x))_{0 \leq k \leq n-1}$ .

**II.A.2)** Montrer que si  $n \geq p$ , l'application  $\varphi_n : \begin{cases} \mathcal{R}_B(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^n \\ v \mapsto (v_0, \dots, v_{n-1}) \end{cases}$  est injective.

En déduire que si  $n \geq p$ , alors  $\text{rang}(H_n(x)) = p$ .

Remarque : il est clair que ce résultat reste vrai si  $p = 0$  (car la suite  $x$  et les matrices  $H_n(x)$  sont nulles).

## II.B – Détermination de la récurrence minimale d'une suite récurrente linéaire

Soit  $x$  une suite récurrente linéaire non nulle, d'ordre  $m \geq 1$ . Soit  $p = \text{rang}(H_m(x))$ .

**II.B.1)** Montrer que  $x$  est d'ordre minimal  $p$  et que le noyau de  $H_{p+1}(x)$  est une droite vectorielle dont un vecteur directeur peut s'écrire  $(b_0, \dots, b_{p-1}, 1)$ , où  $b_0, \dots, b_{p-1}$  sont dans  $\mathbb{K}$ .

**II.B.2)** Avec ces notations, montrer que le polynôme minimal de  $x$  est  $B = X^p + b_{p-1}X^{p-1} + \dots + b_1X + b_0$ .

## II.C – Étude d'un exemple

Dans cette question, on considère la suite  $x = (x_n)_{n \geq 0}$  définie par

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 0, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+4} = x_{n+3} - 2x_{n+1}$$

**II.C.1)** Dans le langage informatique de votre choix (que vous préciserez), écrire une procédure (ou fonction) de paramètre un entier naturel  $n$  et renvoyant la liste (ou la séquence, ou le vecteur) des  $x_k$  pour  $0 \leq k \leq n$ .

**II.C.2)** Préciser le rang de  $H_n(x)$  pour tout entier  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  et indiquer l'ordre minimal de la suite  $x$ .

**II.C.3)** Déterminer la relation de récurrence minimale de la suite  $x$ .

**II.C.4)** Donner une formule permettant pour tout  $n \geq 1$  de calculer directement  $x_n$ .

**II.C.5)** On décide de modifier *uniquement* la valeur de  $x_0$ , en posant cette fois  $x_0 = \frac{1}{2}$ .

Avec cette modification, reprendre rapidement l'étude des questions **II.C.2** et **II.C.3**.

## III Valeurs propres des matrices de Hankel réelles

Dans toute cette partie,  $n$  désigne un entier supérieur ou égal à 3.

On note  $p = [(n+1)/2]$  la partie entière de  $(n+1)/2$ .

On a donc  $n = 2p$  si  $n$  est pair, et  $n = 2p - 1$  si  $n$  est impair.

$\mathbb{R}^n$  est muni de sa structure euclidienne canonique dont le produit scalaire est noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et la norme associée est notée  $\|\cdot\|$ .

Un élément de  $x = (x_1, \dots, x_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  est dit *ordonné* s'il vérifie si  $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ .

On dit qu'une matrice  $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est une *matrice de Hankel* s'il existe  $a = (a_0, \dots, a_{2n-2}) \in \mathbb{R}^{2n-1}$  tel que pour tous  $i$  et  $j$  de  $\{1, \dots, n\}$ ,  $m_{i,j} = a_{i+j-2}$ . Une telle matrice est notée  $M = H(a)$ .

### III.A – Préliminaires

**III.A.1)** Montrer que si  $M$  est une matrice de Hankel de taille  $n$  alors elle admet  $n$  valeurs propres réelles  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  (chacune étant répétée autant de fois que sa multiplicité) que l'on peut classer dans l'ordre décroissant  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ .

On note alors  $\text{Spo}(M) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  le *spectre ordonné* de la matrice  $M$ , c'est-à-dire le  $n$ -uplet ordonné des valeurs propres de  $M$ .

On s'intéresse au problème suivant : à quelles conditions un  $n$ -uplet ordonné de réels peut-il être le  $n$ -uplet ordonné des valeurs propres d'une matrice de Hankel de taille  $n$  ?

**III.A.2)** Montrer que si  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  alors le  $n$ -uplet  $(\lambda, \dots, \lambda)$  n'est pas le  $n$ -uplet ordonné des valeurs propres d'une matrice de Hankel de taille  $n$ .

### III.B – Une première condition nécessaire

Soit  $a = (a_0, \dots, a_{2n-2})$  un élément de  $\mathbb{R}^{2n-1}$  et  $M = H(a)$ . On note  $\text{Spo}(M) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ .

On définit deux vecteurs  $v = (v_1, \dots, v_n)$  et  $w = (w_1, \dots, w_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  par

$$\begin{cases} v_i = \sqrt{2i-1} a_{2(i-1)} \text{ et } w_i = \frac{1}{\sqrt{2i-1}} & \text{si } i \in \{1, \dots, p\} \\ v_i = \sqrt{2n-2i+1} a_{2(i-1)} \text{ et } w_i = \frac{1}{\sqrt{2n-2i+1}} & \text{si } i \in \{p+1, \dots, n\} \end{cases}$$

On pose enfin  $K_n = n - \|w\|^2$ .

**III.B.1)** Montrer que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{k=0}^{n-1} a_{2k} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_k^2 + \sum_{k=n}^{2n-2} (2n-k-1) a_k^2$$

**III.B.2)** Montrer que  $\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i$  et  $\|v\|^2 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$ .

**III.B.3)** Montrer que  $\sum_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i - \lambda_j)^2 = n \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 - \langle v, w \rangle^2$  et en déduire l'inégalité :

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \geq K_n \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \tag{III.1}$$

**III.B.4)** Vérifier que si  $n = 3$ , la **condition III.1** équivaut à :  $2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) \geq 3(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)$ .

### III.C – D'autres conditions nécessaires

Dans cette partie, on *admet* le résultat suivant : si  $A$  et  $B$  sont deux matrices de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  dont les valeurs propres respectives (avec répétitions éventuelles) sont  $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_n$  et  $\beta_1 \geq \dots \geq \beta_n$  alors

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_{n+1-i} \leq \text{tr}(AB) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \tag{III.2}$$

Soit  $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  définie par

$$b_{1,2p-1} = 1 \quad b_{2p-1,1} = 1 \quad b_{p,p} = -2$$

tous les autres coefficients de  $B$  étant nuls (on rappelle que  $p$  désigne la partie entière de  $(n+1)/2$ ).

**III.C.1)** Déterminer le spectre ordonné de la matrice  $B$ .

**III.C.2)** Soit  $a = (a_0, \dots, a_{2n-2})$  un élément de  $\mathbb{R}^{2n-1}$  et  $M = H(a)$ .

On note  $\text{Spo}(M) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ .

Établir que

$$\lambda_1 - \lambda_{n-1} - 2\lambda_n \geq 0 \quad \text{et} \quad 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_n \geq 0 \tag{III.3}$$

### III.D – Cas $n = 3$

Soient  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  trois réels vérifiant

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \quad \lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3 \geq 0 \quad 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 \geq 0$$

On définit la matrice de Hankel  $M = H(a, b, c, b, a) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$ , où  $a, b, c$  sont réels.

**III.D.1)** Calculer les valeurs propres de  $M$  (sans chercher à les ordonner).

**III.D.2)** Expliciter  $a, b, c$  (avec  $b \geq 0$ ) en fonction de  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , de telle sorte que  $\text{Spo}(M) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ .

**III.D.3)** Que peut-on déduire du résultat précédent, quant à la **condition III.3** dans le cas  $n = 3$  ?

En utilisant un triplet ordonné  $(\lambda, 1, 1)$ , montrer que pour  $n = 3$ , la **condition III.1** n'est pas suffisante.

---

• • • FIN • • •

---