Proposé par Mrs :
HAMANI Ahmed + NAJMEDDINE Said

I-Produit de convolution

I-A Généralités

I-A-1) :

a) • $\forall x,t\in\mathbb{R}, |f(t)g(x-t)|\leq |f(t)|\|g\|_\infty$, or f est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc par comparaison $\forall x\in\mathbb{R}$, la fonction $t\longmapsto f(t)g(x-t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, ce qui assure la définition de $f*g$ dans $\mathbb{R}$.

• L'inégalité précédente entraine que $\forall x\in\mathbb{R}, |(f*g)(x)|\leq \|g\|_\infty\|f\|_1$, donc $\|f*g\|_\infty\leq\|g\|_\infty\|f\|_1$.

b) • On signale que si $g\in L^1(\mathbb{R})$, alors $\forall x\in\mathbb{R}, \|g\|_1=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|g(t)|dt=\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x-t)|dt$.

On a $\forall x,t\in\mathbb{R}, |f(t)g(x-t)|\leq\dfrac{1}{2}(|f(t)|^2+|g(x-t)|^2)$, donc par comparaison $f*g$ est définie sur $\mathbb{R}$.

• De l'inégalité précédente on aura $\forall x\in\mathbb{R}, |(f*g)(x)|\leq\dfrac{1}{2}(\|f\|_2^2+\|g\|_2^2)$ et par suite $\|f*g\|_\infty\leq\dfrac{1}{2}(\|f\|_2^2+\|g\|_2^2)$.

I-A-2) $\forall x\in\mathbb{R}, (f*g)(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)g(x-t)dt$, et avec le changement $u=x-t$ on obtient $(f*g)(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-u)g(u)du=(g*f)(x)$.

I-A-3) f et g sont à support compact, donc $\exists A,B\geq 0$ tels que $f=0$(respectivement : $g=0$) en dehors de $[-A,A]$(respectivement : $[-B,B]$), alors $\forall |x|>A+B, |t|\leq A$, $|x-t|>|x|-|t|>A+B-A=B$, donc $g(x-t)=0$, et par suite $(f*g)(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)g(x-t)dt=\int_{-A}^{A}f(t)g(x-t)dt=0$, ceci asssure que $f*g$ est à support compact.

I-B :

I-B-1) • $\Longrightarrow$ Supposons que h est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et soit $\varepsilon>0$, alors $\exists\eta>0$ tel que $\forall x,y\in\mathbb{R}$ vérifiant $|x-y|\leq\eta$, on a $|h(x)-h(y)|\leq\varepsilon$, alors
$\forall x\in\mathbb{R},\forall|\alpha|\leq\eta$, $|(x-\alpha)-x|=|\alpha|\leq\eta$, donc $|(T_\alpha(h)-h)(x)|=|h(x-\alpha)-h(x)|\leq\varepsilon$, ce qui entraine que $\forall|\alpha|\leq\eta$, $\|T_\alpha(h)-h\|_\infty\leq\varepsilon$, donc $\lim\limits_{\alpha\longrightarrow 0}\|T_\alpha(h)-h\|_\infty=0$.

• $\Longleftarrow$ Supposons $\lim\limits_{\alpha\longrightarrow 0}\|T_\alpha(h)-h\|_\infty=0$ et soit $\varepsilon>0$, alors $\exists\eta>0$ tel que
$\forall|\alpha|\leq\eta,\forall x\in\mathbb{R}, |h(x-\alpha)-h(x)|\leq\varepsilon$, donc $\forall x,y\in\mathbb{R}$ vérifiant $|x-y|\leq\eta$, on a
$|h(y)-h(x)|=|h(x-(x-y))-h(x)|\leq\varepsilon$, ce qui assure l'uniforme continuité de h sur $\mathbb{R}$.

I-B-2) Soient $\alpha,x\in\mathbb{R}$, on a $T_\alpha(f*g)(x)=(f*g)(x-\alpha)=\displaystyle\int_{\mathbb{R}}f(t)g(x-\alpha-t)dt$ et par le changement de variable $u=t+\alpha$, on obtient $T_\alpha(f*g)(x)=\displaystyle\int_{\mathbb{R}}f(u-\alpha)g(x-u)du=\int_{\mathbb{R}}T_\alpha(f)(u)g(x-u)du=((T_\alpha(f))*g)(x)$, donc $T_\alpha(f*g)=(T_\alpha(f))*g$.

I-B-3) $\forall x\in\mathbb{R}, |(T_\alpha(f*g)-(f*g))(x)|=|((T_\alpha(f))*g)(x)-(f*g)(x)|=|((T_\alpha(f)-f)*g)(x)|=$
$=|\displaystyle\int_{\mathbb{R}}((T_\alpha(f)-f)(t)g(x-t)dt|$ et par l'inégalité de Cauch-Shwarz, on aura
$|(T_\alpha(f*g)-(f*g))(x)|\leq\|T_\alpha(f)-f\|_2\|g\|_2$ et le passage au sup, entraine que
$\|T_\alpha(f*g)-f*g\|_\infty\leq\|T_\alpha(f)-f\|_2\|g\|_2$.

I-B-4) D'après l'inégalité précédente, il suffit de montrer que $\lim\limits_{\alpha\longrightarrow 0}\|T_\alpha(f)-f\|_2=0$.
f étant continue et à support compact, donc f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, donc d'après **I-B-1**, $\lim\limits_{\alpha\longrightarrow 0}\|T_\alpha(f)-f\|_\infty=0$, si on suppose que f est nulle en dehors de $[-A,A]$, alors
$\forall|\alpha|\leq A$, $\|T_\alpha(f)-f\|_2^2=\displaystyle\int_{-2A}^{2A}|(T_\alpha(f)-f)(t)|^2dt\leq 4A\|T_\alpha(f)-f\|_\infty^2$, donc $\lim\limits_{\alpha\longrightarrow 0}\|T_\alpha(f)-f\|_2=0$.

I-B-5) • On introduit la suite de fonctions continues à supports compacts définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \begin{cases} 1 & \text{sur}[-n+\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}] \\ \text{affine par morceaux} & \text{sur}[-n, -n+\frac{1}{2}] \cup [n-\frac{1}{2}, n] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

• Soit $f_n = fu_n$, alors $\forall \alpha \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$, $\|T_\alpha(f-f_n)\|_2^2 = \|f-f_n\|_2^2 \le \int_{-\infty}^{-n+\frac{1}{2}} |f(t)|^2 dt + \int_{n-\dfrac{1}{2}}^{+\infty} |f(t)|^2 dt \longrightarrow 0$ lorsque n tend vers $+\infty$ (car $f \in L^2(\mathbb{R})$).

• Soit $\varepsilon > 0$, alors :

-$\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\|T_\alpha(f-f_N)\|_2^2 = \|f-f_N\|_2^2 \le \dfrac{\varepsilon^2}{9}$.

- f_N étant continue à support compact, donc d'après la question précédente $\exists \eta > 0$ tel que $\forall |\alpha| < \eta$, $\|T_\alpha(f_N) - f_N\|_2 \le \dfrac{\varepsilon}{3}$.

• En conclusion on a $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que $\forall |\alpha| < \eta$, $\|T_\alpha(f)-f\|_2 = \|T_\alpha(f-f_N)+T_\alpha(f_N)-f_N+f_N-f\|_2 \le \|T_\alpha(f-f_N)\|_2 + \|T_\alpha(f_N)-f_N\|_2 + \|f_N - f\|_2 \le \dfrac{\varepsilon}{3}+\dfrac{\varepsilon}{3}+\dfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$, d'où $\lim\limits_{\alpha \longrightarrow 0} \|T_\alpha(f)-f\|_2 = 0$ et l'inégalité de la question **I-B-3** entraine que $\lim\limits_{\alpha \longrightarrow 0} \|T_\alpha(f)-f\|_\infty = 0$ et la conclusion est assurée par la question **I-B-1**.

I-C :

I-C-1) :

a) • $(x,t) \longmapsto f(t)g(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
• $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2$, $|f(t)g(x-t)| \le \|g\|_\infty |f(t)| = \varphi(t)$, φ étant continue positive intégrable.
• Ainsi les hypothèses du théorème de continuité sous le signe intégrale sont vérifiées, ce qui assure la continuité de $f * g$.

b) • $\forall x, \alpha \in \mathbb{R}$, $|(T_\alpha(f*g))(x) - (f*g)(x)| = |\int_{\mathbb{R}} (T_\alpha(g)-g)(t) f(x-t)dt| \le \|T_\alpha(g) - g\|_\infty \|f\|_1$, donc $\|T_\alpha(f*g) - (f*g)\|_\infty \le \|T_\alpha(g)-g\|_\infty \|f\|_1$, or g est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, donc d'après la question **I-B-1)**, $\lim\limits_{\alpha \longrightarrow 0} \|T_\alpha(g) - g\|_\infty = 0$, et par suite $\lim\limits_{\alpha \longrightarrow 0} \|T_\alpha(f*g) - (f*g)\|_\infty = 0$, ce qui assure l'uniforme continuité de $f*g$ sur $\mathbb{R}$.

I-C-2) • $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \longmapsto f(t)g(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
• $\forall t \in \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(t)g(x-t)$ est de classe C^k sur $\mathbb{R}$.
• $\forall x, t \in \mathbb{R}, \forall p \in [[0,k]]$, $|\dfrac{\partial^p}{\partial x^p}(f(t)g(x-t)| = |f(t)g^{(p)}(x-t)| \le \|g^{(p)}\|_\infty |f(t)| = \varphi_p(t)$, les φ_p sont continues positives et intégrables.
Donc d'après le théorème de Leibniz, $f*g$ est de classe C^k et on a
$\forall x \in \mathbb{R}, \forall p \in [[0,k]]$, $(f*g)^{(p)}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) g^{(p)}(x-t)dt = \left(f * g^{(p)}\right)(x)$.

I-C-3) :

a) Il s'agit du théorème de Dirichlet :
Si g est une fonction continue, $2\pi-$ périodique et de classe C^1 par morceaux, alors g coïncide avec sa série de Fourier.

b) • g est $2\pi-$ péridique, donc aussi pour $f*g$.
• g est continue $2\pi-$ péridique, donc g est bornée sur $\mathbb{R}$, donc d'après **I-C-1**, $f*g$ est continue.
• g' est $2\pi-$ périodique continue par morceaux, donc bornée sur $\mathbb{R}$, donc d'après **I-C-2**, $f*g$ est de classe C^1 par morceaux.
• En définitive, $f*g$ vérifie les hypothèses du théorème de Dirichlet, $f*g$ coincide avec sa série de Fourier.
• $\forall n \in \mathbb{N}, c_n(f*g) = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (f*g)(x) e^{-inx} dx = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)dt\right) e^{-inx}dx$, or $\int_{\mathbb{R}}\int_0^{2\pi} |f(t)g(x-t)e^{-inx}| dx dt \le \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{2\pi} |g(x-t)|dx\right)|f(t)|dt$, et le changement $u = x-t$ avec g $2\pi-$ péridique, on obtient $\int_0^{2\pi} |g(x-t)|dx = \int_0^{2\pi} |g(u)|du$, donc $\int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{2\pi} |g(x-t)|dx\right)|f(t)|dt = \left(\int_0^{2\pi} |g(u)|du\right) \|f\|_1 < +\infty$, donc d'après le théorème de Fubini, on peut permuter les deux intégrales, ce qui donne $c_n(f*g) = \int_{\mathbb{R}} \left(\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x-t)e^{-in(x-t)}dx\right) f(t)e^{-int}dt$,

et la $2\pi-$ périodicité de $x \longmapsto g(x-t)e^{-in(x-t)}$ entraine que
$\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g(x-t)e^{-in(x-t)}dx = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(u)e^{-inu}du = c_n(g)$, et par suite $c_n(f*g) = c_n(g)\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-int}dt$.

I-D :

I-D-1) Soient $x \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$.

- La continuité de f en x entraine qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall |t| \leq \alpha$, $|f(x-t) - f(x)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.
- $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_{|t|\geq\alpha} \delta_n(t)dt = 0$, donc $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$ $\displaystyle\int_{|t|\geq\alpha} \delta_n(t)dt \leq \dfrac{\varepsilon}{4\|f\|_\infty}$.
- Ainsi $\forall n \geq N$, $|(f*\delta_n)(x) - f(x)| = |\displaystyle\int_{\mathbb{R}} (f(x-t) - f(x))\,\delta_n(t)| \leq$

$\leq \displaystyle\int_{|t|\geq\alpha} |f(x-t)-f(x)|\delta_n(t)dt + \int_{|t|\leq\alpha} |f(x-t)-f(x)|\delta_n(t)dt \leq$

$\leq 2\|f\|_\infty \displaystyle\int_{|t|\geq\alpha} \delta_n(t)dt + \frac{\varepsilon}{2}\int_{|t|\leq\alpha} \delta_n(t)dt \leq 2\|f\|_\infty \frac{\varepsilon}{4\|f\|_\infty} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, d'où la convergence simple de $f*\delta_n$ vers f sur $\mathbb{R}$.

I-D-2) Soient $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, $|(f*\delta_n)(x) - f(x)| = |\displaystyle\int_{\mathbb{R}} (T_t(f)(x) - f(x))\,\delta_n(t)dt| \leq \int_{\mathbb{R}} \|T_t(f) - f\|_\infty \delta_n(t)dt$, or f est à support compact, donc uniformément continue sur $\mathbb{R}$, et d'après **I-B-1**
$\displaystyle\lim_{t\longrightarrow 0} \|T_t(f) - f\|_\infty = 0$.

- Soit $\varepsilon > 0$, alors $\exists\alpha > 0$ tel que $\forall |t| \leq \alpha$, $\|T_t(f) - f\|_\infty \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$, de plus $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_{|t|\geq\alpha} \delta_n(t)dt = 0$,

donc $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $\displaystyle\int_{|t|\geq\alpha}\delta_n(t)dt \leq \frac{\varepsilon}{4\|f\|_\infty}$, et par suite $\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$
$|(f*\delta_n)(x) - f(x)| \leq \displaystyle\int_{|t|\geq\alpha} \|T_t(f) - f\|_\infty\delta_n(t)dt + \int_{-\alpha}^{\alpha} \|T_t(f) - f\|_\infty\delta_n(t)dt \leq 2\|f\|_\infty\frac{\varepsilon}{4\|f\|_\infty} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, ceci $\forall x \in \mathbb{R}$, d'où la convergence uniforme de $f*\delta_n$ vers f sur $\mathbb{R}$.

I-D-3) :

a) • Il est clair que $h_n \geq 0$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} h_n = \int_{-1}^{1} h_n = 1$.

• Soit $\varepsilon > 0$, alors :
-si $\varepsilon \geq 1$, $\displaystyle\int_{|t|>\varepsilon} h_n = 0$.
-si $\varepsilon \in]0,1[$, par parité de h_n, on obtient $\displaystyle\int_{|t|\geq\varepsilon} h_n = \frac{2}{\lambda_n}\int_{\varepsilon}^{1}(1-t^2)^n dt \leq \frac{2}{\lambda_n}(1-\varepsilon^2)^n$, or
$\lambda_n = 2\displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n dt \geq 2\int_0^1 (1-t)^n dt = \frac{2}{n+1}$, ce qui entraine que $\displaystyle\int_{|t|\geq\varepsilon} h_n \leq (n+1)(1-\varepsilon^2)^n \longrightarrow 0$ lorsque n tend vers $+\infty$.

b) • D'après la question **I-A-3**, $f*h_n$ est nulle en dehors de $[-A, A]$ où $A = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$.

• $\forall x \in [-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}]$, $(f*h_n)(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)h_n(x-t)dt = \frac{1}{\lambda_n}\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)\left(1-(x-t)^2\right)^n dt$, or
$\forall t \in [-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}], x \longmapsto (1-(x-t)^2)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} a_k(t)x^k$, donc $(f*h_n)(x) == \displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\left(\frac{1}{\lambda_n}\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)a_k(t)\right)x^k$,
donc $f*h_n$ est polynômiale sur $[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}]$.

c) Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et soit $[c,d]$ contenant strictement $[a,b]$.
Prolongeons f en une fonction continue, nulle en dehors de $[c,d]$ et soit $\varphi : t \longmapsto (d-c)t + \dfrac{c+d}{2}$,
alors $g = fo\varphi$ est continue, nulle en dehors de $[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}]$ et d'après **I-D-2)**, g est limite uniforme d'une suite $f*h_n$ qui est d'après **I-D-3-b)**, polynômiale sur $[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}]$, donc aussi pour f sur $[a,b]$.

I-D-4) Supposons que la réponse est affirmative, alors en particulier, on aura
$\forall n \in \mathbb{N}$, $h_n = h_n * g$, donc d'après **I-D-1**, $(h_n)_n$ converge simplement vers g, et par suite $h_n(0) = \dfrac{1}{\lambda_n}$ tend vers $g(0) \in \mathbb{R}$ (g est bornée), or le changement $t = sin(\theta)$, montre que λ_n est une intégrale de Wallis
$\lambda_n = 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{2n+1}(\theta)d\theta \sim 2\sqrt{\frac{\pi}{2n+1}}$, donc $h_n(0)$ tend vers $+\infty$, ce qui contredit $g(0)$ est fini.

II-Transformée de Fourier

II-A $\forall x\in\mathbb{R}, |\widehat{f}(x)|\leq\int_{\mathbb{R}}|f(t)|dt=\|f\|_1$, donc $\widehat{f}$ est bornée et $\|\widehat{f}\|_\infty\leq\|f\|_1$.

II-B :

II-B-1) :

a) • $\forall x,t\in\mathbb{R}$, $|f(t)g(x-t)|\leq\|g\|_\infty|f(t)|\in L^1(\mathbb{R})$, donc $\forall x\in\mathbb{R}$ $t\longmapsto f(t)g(x-t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

• $\int_{\mathbb{R}}(f*g)(x)dx=\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}f(t)g(x-t)dt\right)dx$, or $\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}|f(t)||g(x-t)|dx\right)dt=\int_{\mathbb{R}}|f(t)|\left(\int_{\mathbb{R}}|g(x-t)|dx\right)dt$, et $\int_{\mathbb{R}}|g(x-t)|dx=\int_{\mathbb{R}}|g(u)|du$, donc $\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}|f(t)||g(x-t)|dx\right)dt=\|f\|_1\|g\|_1<+\infty$,
donc le théorème de Fubini nous permet de permuter les deux intégrales, ce qui donne avec $\int_{\mathbb{R}}g(x-t)dx=\int_{\mathbb{R}}g(u)du$, $\int_{\mathbb{R}}(f*g)(x)dx=\int_{\mathbb{R}}f(t)\left(\int_{\mathbb{R}}g(x-t)dx\right)dt=\int_{\mathbb{R}}f(t)\left(\int_{\mathbb{R}}g(u)du\right)dt=\left(\int_{\mathbb{R}}f(t)dt\right)\left(\int_{\mathbb{R}}g(u)du\right)$.

b) $\forall t,u\in\mathbb{R}$, posons $f_1(t)=f(t)e^{-iut}$, $g_1(t)=g(t)e^{-iut}$, alors f_1 et f_2 sont intégrables et ona : $\forall x\in\mathbb{R}$, $(f_1*g_1)(x)=\int_{\mathbb{R}}f_1(x-t)g_1(t)dt=\int_{\mathbb{R}}f(x-t)g(t)e^{-ixu}dt=(f*g)(x)e^{-ixu}$.

En appliquant l'égalité précédente à f_1 et g_1, on aura : $\forall u\in\mathbb{R}$, $\widehat{f*g}(u)=\int_{\mathbb{R}}(f*g)(t)e^{-iut}dt=\int_{\mathbb{R}}(f_1*g_1)(t)dt=\left(\int_{\mathbb{R}}f_1(t)dt\right)\left(\int_{\mathbb{R}}g_1(t)dt\right)=\widehat{f}(u)\times\widehat{g}(u)$, donc $\widehat{f*g}=\widehat{f}\times\widehat{g}$.

II-B-2) • Soit f la fonction affine par morceaux, paire, nulle sur $[0,1]$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$ f nulle en dehors des segments $[n,n+\frac{1}{n^3}]$ et prend la valeur n au milieu.

• Sur chaque intervalle $[n,n+1]$, on a $f(t)=\begin{cases}2n^4(t-n) & si \quad t\in[n,n+\frac{1}{2n^3}]\\ -2n^4(t-n-\frac{1}{n^3}) & si \quad t\in[n+\frac{1}{2n^3},n+\frac{1}{n^3}]\\ 0 & si \quad t\in[n+\frac{1}{n^3},n+1]\end{cases}$

Donc $f^2(t)=\begin{cases}4n^8(t-n)^2 & si \quad t\in[n,n+\frac{1}{2n^3}]\\ 4n^8(t-n-\frac{1}{n^3})^2 & si \quad t\in[n+\frac{1}{2n^3},n+\frac{1}{n^3}]\\ 0 & si \quad t\in[n+\frac{1}{n^3},n+1]\end{cases}$

• $\int_{\mathbb{R}}f=2\int_0^{+\infty}f=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$, donc $f\in L^1(\mathbb{R})$.

• $\int_{\mathbb{R}}f^2=2\int_0^{+\infty}f^2=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{3n}$, donc $f\notin L^2(\mathbb{R})$.

• On a donc $f\in L^1(\mathbb{R})$, mais $(f*f)(0)=\int_{\mathbb{R}}f^2=+\infty$.

II-C :

II-C-1) • Si $x\neq 0$, $\widehat{k_n}(x)=\int_{-n}^{n}\left(1-\frac{|t|}{n}\right)e^{-ixt}dt=\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)(e^{-ixt}+e^{ixt})dt=2\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)cos(xt)dt$

$=2\left[\left(1-\frac{t}{n}\right)\frac{sin(xt)}{x}\right]_0^n+\frac{2}{nx}\int_0^n sin(xt)dt=\frac{2}{nx}\left[-\frac{cos(xt)}{x}\right]_0^n=\frac{2}{nx^2}(1-cos(nx))=\frac{4}{nx^2}sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)$
$=n\varphi\left(\frac{nx}{2}\right)$.

• Si $x=0$, $\widehat{k_n}(x)=2\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)dt=n$.

• En conclusion $\forall x\in\mathbb{R},\widehat{k_n}(x)=n\varphi\left(\frac{nx}{2}\right)$.

II-C-2) La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}$ et au voisinage de l'infini $|\varphi(x)|\leq\frac{1}{x^2}$, donc par comparaison φ est intégrable au voisinage de $\pm\infty$.

II-C-3) • C'est clair que $\forall n\in\mathbb{N}$, $K_n\geq 0$ et le changement $u=\frac{nx}{2}$ conduit à $\int_{\mathbb{R}}\widehat{k_n}=2\int_{\mathbb{R}}\varphi=2\pi$, donc $\int_{\mathbb{R}}K_n=1$.

• Soit $\varepsilon > 0$, $\widehat{k_n}$ est paire, donc :
$\displaystyle\int_{-\infty}^{-\varepsilon} K_n = \int_{\varepsilon}^{+\infty} K_n = \frac{n}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{+\infty} \varphi\left(\frac{nx}{2}\right)dx \le \frac{n}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{4}{n^2x^2}dx = \frac{2}{\pi n\varepsilon} \longrightarrow 0$ lorsque n tend vers l'infini.
• En conclusion, $(K_n)_n$ est une approximation de l'unité.

II-D :

II-D-1) $\forall t \in \mathbb{R}$, $\displaystyle (f * K_n)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(u)K_n(t-u)du = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(u)\left(\int_{\mathbb{R}} k_n(x)e^{-i(t-u)x}dx\right)du$, or
$\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} |f(u)e^{-i(t-u)x}|du\right)|k_n(x)|dx = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} |f(u)|du\right)|k_n(x)|dx = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(u)|du\right)\left(\int_{\mathbb{R}} k_n(x)dx\right)$
$= \|f\|_1\widehat{k_n}(0) = n\|f\|_1 < +\infty$,
ce qui permet par le théorème de Fubini de permuter les deux intégrales, donc
$\displaystyle (f * K_n)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(u)e^{iux}du\right)k_n(x)e^{-itx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} k_n(x)\widehat{f}(-x)e^{-itx}dx = I_n(t).$

II-D-2) • Soient $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle (f * K_n)(t) - f(t) = \int_{\mathbb{R}} (f(t-x) - f(t))\,K_n(x)dx =$
$\displaystyle = \frac{n}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} (f(t-x) - f(t))\,\varphi\left(\frac{nx}{2}\right)dx$ et le changement de variables $u = \dfrac{nx}{2}$ donne
$\displaystyle (f * K_n)(t) - f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(f(t - \frac{2u}{n}) - f(t)\right)\varphi(u)du.$
• La continuité de f entraine que $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} f(t - \frac{2u}{n}) - f(t) = 0$, donc $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que
$\forall n \ge N$, $|f(t - \frac{2u}{n}) - f(t)| \le \varepsilon$, donc $\displaystyle |(f * K_n)(t) - f(t)| \le \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \varphi(u)du = \varepsilon$, ce qui entraine que
$\forall t \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} (f * K_n)(t) = f(t)$.
• - $\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$, $t \longmapsto k_n(x)\widehat{f}(-x)e^{-itx}$ est intégrable .
- $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ la suite $n \longmapsto k_n(x)\widehat{f}(-x)e^{-itx}$ converge vers $\widehat{f}(-x)e^{-itx}$.
- $\forall x, t \in \mathbb{R}$, $|k_n(x)\widehat{f}(-x)e^{-itx}| \le |\widehat{f}(-x)| \in L_1(\mathbb{R})$.
Donc d'après le théorème de la convergence dominée, $I_n(t)$ converge vers $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(-x)e^{-itx}dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x)e^{itx}dx.$
• L'unicité de la limite entraine que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\displaystyle f(t) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x)e^{itx}dx.$

III-Convolution et dimension finie

III-A : On note ici que $\varphi_g(f) = (f * g)(0)$.

III-A-1) • $\Longleftarrow$ Supposons que $(\varphi_{g_1}, ..., \varphi_{g_p})$ est libre et soient $\lambda_1, ..., \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \lambda_k g_k = 0$, alors
$\forall f \in L^1(\mathbb{R})$, $\displaystyle\left(f * (\sum_{k=1}^{p} \lambda_k g_k)\right)(0) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k (f * g_k)(0) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \varphi_{g_k}(f) = 0$, donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \varphi_{g_k} = 0$ et par suite
$\lambda_1 = ... = \lambda_p = 0$.
• $\Longrightarrow$ Supposons que $(g_1, ..., g_p)$ est libre et soient $\lambda_1, ..., \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \varphi_{g_k} = 0$, c'est à dire
$\forall f \in L^1(\mathbb{R})$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)\left(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k g_k\right)(-t)dt = 0$, en particulier pour $f : t \longmapsto \overline{\left(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k g_k\right)(-t)}$, on obtient
$\displaystyle\|\sum_{k=1}^{p} \lambda_k g_k\|_2^2 = 0$, ce qui donne $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \lambda_k g_k = 0$ et la liberté de la famille $(g_1, ..., g_n)$ entraine que :
$\lambda_1 = ... = \lambda_p = 0$.

III-A-2) • Supposons que $rg\left((f_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = p$, quitte à réordonner les indices on peut supposer que $(f_1, ..., f_p)$ est libre, donc L'application
$\psi : E \longrightarrow R^p$ qui à x fait correspondre $(f_1(x), ..., f_p(x))$ est surjective, et par suite
$\displaystyle Ker(\psi) = \bigcap_{k=1}^{p} Ker(f_k) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} Ker(f_k) = K$ est de codimension $dim(Im(\psi)) = p = rg((f_n)_n)$.
• Supposons que le rang de $(f_n)_n$ est infini, alors $\forall p \in \mathbb{N}$ on peut extraire une famille libre à p éléments de $(f_n)_n$, quitte à réordonner les éléments de cette famille, on peut la prendre $(f_1, ..., f_p)$, or

$K=\bigcap_{k\in\mathbb{N}} Ker(f_k)\subset\bigcap_{k=1}^{p} Ker(f_k)$, donc $codim(K)\geq codim(\bigcap_{k=1}^{p} Ker(f_k))=rg(f_1,...,f_p)=p$, ceci pour tout $p\in\mathbb{N}$, donc la codimension de K est infinie.

III-A-3) $f\in N_g$ si, et seulement si $f*g=0$ si, et seulement si $\forall\alpha\in\mathbb{R},(f*g)(-\alpha)=0$ si, et seulement si $\forall\alpha\in\mathbb{R},(f*T_\alpha(g))(0)=0$ si, et seulement si $\forall\alpha\in\mathbb{R},\varphi_{T_\alpha(g)}(f)=0$ si, et seulement si $f\in\bigcap_{\alpha\in\mathbb{R}} Ker\left(\varphi_{T_\alpha(g)}\right)$

Donc $N_g=\bigcap_{\alpha\in\mathbb{R}} Ker\left(\varphi_{T_\alpha(g)}\right)$, et d'après la question précédente, sa codimension est égale au rang de $\left(\varphi_{T_\alpha(g)}\right)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ qui d'après la question **III-A-1** égale à $rg\left((T_\alpha(g))_{\alpha\in\mathbb{R}}\right)=dim(V_g)$.

III-A-4) :

a) $V_g=Vect\{T_\alpha(g)/\alpha\in\mathbb{R}\}$. $\forall\alpha,t\in\mathbb{R}$, $T_\alpha(g)(t)=g(t-\alpha)=e^{i\beta(t-\alpha)}=e^{-i\beta\alpha}g(t)=e^{-i\beta\alpha}T_0(g)(t)$, donc $dim(V_g)=1$.

b) • Si $n=0$, la fonction nulle répond à la question.

• Si $n\neq 0$, soit la fonction $g(t)=\sum_{k=0}^{n-1}e^{i\frac{2\pi}{n}kt}$, alors $\forall\alpha,t\in\mathbb{R}$, $g(t-\alpha)=\sum_{k=0}^{n-1}e^{i\frac{2\pi}{n}k(t-\alpha)}=\sum_{k=0}^{n-1}e^{-i\frac{2\pi}{n}k\alpha}e^{i\frac{2\pi}{n}kt}$, donc $V_g\subset Vect\left(1,e^{i\frac{2\pi}{n}t},...,e^{i\frac{2\pi(n-1)}{n}t}\right)$.

• La famille $(T_0(g),...,T_{n-1}(g))$ est libre, en effet soient $\lambda_0,...,\lambda_{n-1}\in\mathbb{C}$, tels que $\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_kT_k(g)=0$, donc $\forall t\in\mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k\left(\sum_{p=0}^{n-1}e^{i\frac{2\pi}{n}p(t-k)}\right)=\sum_{p=0}^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_ke^{-i\frac{2\pi}{n}pk}\right)e^{i\frac{2\pi}{n}pt}=0$, or la famille $\left(1,e^{i\frac{2\pi}{n}t},...,e^{i\frac{2\pi(n-1)}{n}t}\right)$ est libre, donc $\forall p\in[[0,n-1]]$, $\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_ke^{-i\frac{2\pi}{n}pk}=0$, on a obtenu un système de Cramer de discriminant Vandermonde$(1,e^{-i\frac{2\pi}{n}},...,e^{-i\frac{2\pi(n-1)}{n}})\neq 0$, donc $\lambda_0,...,\lambda_{n-1}=0$, d'où la liberté de $(T_0(g),...,T_{n-1}(g))$.

• En définitive $V_g=Vect\left(1,e^{i\frac{2\pi}{n}t},...,e^{i\frac{2\pi(n-1)}{n}t}\right)$.

III-B :

III-B-1) Supposons que $dim(V_g)=p$ et soit $(T_{\alpha_1}(g),...,T_{\alpha_p}(g))$ une base de V_g.

• g vérifie l'hypothèse A, donc d'après la question **I-C-2**, $f*g$ est de classe C^∞ avec $\forall k\in\mathbb{N}$ $(f*g)^{(k)}=f*g^{(k)}$, ce qui entraine l'inclusion $N_g\subset N_{g^{(k)}}$ pour tout $k\in\mathbb{N}$, donc $\bigcap_{j=1}^{p}\left(Ker\left(\varphi_{T_{\alpha_j}(g)}\right)\right)\subset Ker\left(\varphi_{T_0(g^{(k)})}\right)$ pour tous $k\in\mathbb{N}$, et puisque $T_0(g^{(k)})=g^{(k)}$, on aura $\{g,g',...,g^{(p+1)}\}\subset V_g$, donc la famille $(g,g',...,g^{(p+1)})$ est liée, ce qui signifit que g vérifie une équation d'ordre $p+1$ à coéfficients constants.

III-B-2) $\Longrightarrow$ Supposons que N_g est de codimension finie, alors d'après la question précédente g est solution d'une équation différentielle à coefficients constants.

$\Longleftarrow$ Supposons que g vérifie une équation différentielle d'ordre $p+1$ à coefficients constants $(E)\,:\,g^{(p+1)}=\sum_{k=1}^{p}a_kg^{(k)}$, alors $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $(T_\alpha(g))^{(p+1)}=\sum_{k=1}^{p}a_k(T_\alpha(g))^{(k)}$, c'est à dire $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $T_\alpha(g)$ est solution de (E), donc $Vect(T_\alpha(g))\subset\mathcal{S}$ où $\mathcal{S}$ est l'ensemble de solution de (E) qui est de dimension finie, donc $dim(V_g)$ est finie.

III-C :

III-C-1) $dim(V_g)=n$, donc $\exists\alpha_1,...,\alpha_n\in\mathbb{R}$ tels que $(T_{\alpha_1},...,T_{\alpha_n})$ est une base de V_g, donc $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $\exists!(m_1(\alpha),...,m_n(\alpha))\in\mathbb{R}^n$ tel que $T_\alpha(g)=\sum_{i=1}^{n}m_i(\alpha)T_{\alpha_i}(g)$, et l'unicité montre bien qu'on défini des fonctions $m_1,...,m_n$ d'une variable réelle.

III-C-2) :

a) • Soit $K=\bigcap_{a\in\mathbb{R}}(Ker(e_a))$, alors $codim(K)=rg\{e_a/a\in\mathbb{R}\}$ dans F^*.

• Soit $f\in K$, alors $\forall a\in\mathbb{R},e_a(f)=f(a)=0$, donc $f=0$ et par suite $codim(K)=dim(F)=p$, et par suite $rg\{e_a/a\in\mathbb{R}\}=p=dim(F^*)$, d'où l'existence de $a_1,...,a_p\in\mathbb{R}$ tels que $(e_{a_1},...,e_{a_p})$ est une base de F^*.

b) Soit $(g_1,...,g_p)$ la base de F préduale de $(e_{a_1},...,e_{a_p})$, alors pour tout $j\in[[1,p]]$, $f_j=\sum_{i=1}^{p}e_{a_i}(f_j)g_i=\sum_{i=1}^{p}f_j(a_i)g_i$, donc la matrice de $(f_1,...,f_p)$ dans la base $(g_1,...,g_p)$ est $M=(f_j(a_i))_{1\leq i,j\leq p}$, donc :

$(f_1,...,f_p)$ est une base de F si, et seulement si $Det(M)=Det({}^tM)=Det\left((f_i(a_j))_{1\leq i,j\leq p}\right)\neq 0$.

III-C-3) • Le sous espace de $C(\mathbb{R})$, $F = V_g$ est de dimension finie égale à n, soit $(T_{\alpha_1}(g), ..., T_{\alpha_n}(g))$ une base de F, alors d'après la question précédente, $\Delta = Det\left((T_{\alpha_i}(g)(a_j))\right) \neq 0$.

• En appliquant l'égalité de **III-C-1** à a_j pour tout $j = 1, ..., n$, on obtient $T_\alpha(g)(a_j) = \sum_{i=1}^{n} m_i(\alpha) T_{\alpha_i}(g)(a_j)$, ce qui s'écrit : $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall j \in [[1,n]]$, $g(a_j - \alpha) = \sum_{i=1}^{n} g(a_j - \alpha_i) m_i(\alpha)$, on obtient ainsi un système de Cramer de discriminant $\Delta \neq 0$, donc $\forall j \in [[1,n]], \forall \alpha \in \mathbb{R}$, $m_j(\alpha) = \dfrac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^{n} \Delta_{ij} g(a_i - \alpha)$ où Δ_{ij} est obtenu de Δ en remplaçant la $j^{\text{ième}}$ colonne par le second membre du système.

• En définitive m_j est de classe C^k comme combinaison linéaire de fonctions de classe C^k, à savoir les fonctions
$g_i : \alpha \longmapsto g(a_i - \alpha)$.

III-C-4) • Soit $(T_{\alpha_1}(g), ..., T_{\alpha_n}(g))$ une base de V_g, alors $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \exists m_1(\alpha), ..., m_n(\alpha) \in \mathbb{R}$ tels que $T_\alpha(g) = \sum_{i=1}^{n} m_i(\alpha) T_{\alpha_i}(g)$, donc $\forall r \in \mathbb{N}, T_\alpha(h_r * g) = \sum_{i=1}^{n} m_i(\alpha) T_{\alpha_i}(h_r * g)$, ce qui entraine que $(T_{\alpha_1}(h_r * g), ..., T_{\alpha_n}(h_r * g))$ est une famille génératrice de $V_{h_r * g}$, donc $dim(V_{h_r * g}) \leq n < +\infty$.

III-C-5) • Soit $(T_{\alpha_1}(g), ..., T_{\alpha_n}(g))$ une base de V_g, alors $\Delta = Det\left((T_{\alpha_i}(g)(a_j))\right) \neq 0$.

• Considérons la suite $\Delta_r = Det\left((T_{\alpha_i}(h_r * g)(a_j))\right)$, la continuité de la fonction Det entraine que Δ_r converge vers $\Delta \neq 0$, donc à partir d'un certain rang, Δ_r est non nul, ce qui entraine que $(T_{\alpha_1}(h_r * g), ..., T_{\alpha_n}(h_r * g))$ est libre, donc $dim(V_{h_r * g}) \geq n = dim(V_n)$, d'où l'égalité $dim(V_{h_r * g}) = dim(V_n)$.

III-C-6) • Soit r assez grand, et $(T_{\alpha_1}(g), ..., T_{\alpha_n}(g))$ une base de V_g, donc d'après la question précédente $(T_{\alpha_1}(h_r * g), ..., T_{\alpha_n}(h_r * g))$ est une base de $V_{h_r * g}$ et on a l'égalité
$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall j \in [[1,n]]$ $T_\alpha(h_r * g)(a_j) = \sum_{i=1}^{n} m_i(\alpha) T_{\alpha_i}(h_r * g)(a_j)$, or $\Delta = \left| (T_{\alpha_i}(h_r * g)(a_j))_{i,j} \right| \neq 0$, donc
$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall r \in [[1,n]]$, $m_k(\alpha) = \dfrac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^{n} \Delta_{ik} (h_r * g)(a_i - \alpha)$.

• -1 et 1 sont des zéros de h_r d'ordre r, donc par le théorème de prolongement, h_r est de classe $C^{(r-1)}$, et par suite $x \longmapsto (h_r * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} h_r(x-t) g(t) dt = \int_{x-1}^{x+1} h_r(x-t) g(t) dt$ est de classe $C^{(r-1)}$.

• On en déduit que les m_i sont de classe $C^{(r-1)}$ comme combinaison linéaire de fonctions de classe $C^{(r-1)}$ et ceci pour tout r assez grand, donc les m_i sont de classe C^∞.

III-C-7) Montrons que l'ensemble des fonctions $g \in C_b(\mathbb{R})$ telles que N_g soit de codimension finie dans $L^1(\mathbb{R})$ est celui des fonctions vérifiants la condition A.

• $\Longrightarrow$: Soit $g \in C_b(\mathbb{R})$ tel que $codim(N_g) = n < +\infty$ et soit $(T_{\alpha_1}(g), ..., T_{\alpha_n}(g))$ une base de V_g, donc $\forall \alpha \in \mathbb{R}, T_{-\alpha}(g)(0) = \sum_{i=1}^{n} m_i(-\alpha) T_{\alpha_i}(g)(0)$, c'est à dire $g(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} m_i(-\alpha) g(-\alpha_i)$, or les m_i sont de classe C^∞, donc g est C^∞ comme combinaison linéaire de fonctions de classe C^∞.

• Montrons que les $m_i^{(k)}$ sont bornées, pour cela soit r assez grand tel que $dim(V_{h_r * g}) = dim(V_g) = n$ et $(T_{\alpha_1}(g), ..., T_{\alpha_n}(g))$ une base de V_g, alors
$\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $T_\alpha(g) = \sum_{i=1}^{n} m_i(\alpha) T_{\alpha_i}(g)$, donc $T_\alpha(h_r * g) = \sum_{i=1}^{n} m_i(\alpha) T_{\alpha_i}(h_r * g)$, ce qui donne en dérivant par rapport à α
$\forall k \in \mathbb{R}$ $\left(T_\alpha(h_r * g)\right)^{(k)}(0) = (-1)^k T_\alpha(h_r * g^{(k)})(0) = \sum_{i=1}^{n} m_i^{(k)}(\alpha) T_{\alpha_i}(h_r * g)(0)$, or $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $|\left(T_\alpha(h_r * g)\right)^{(k)}(0)| = |(h_r * g^{(k)})(-\alpha)| = |\int_{-1}^{1} h_r(t+\alpha) g^{(k)}(t) dt| \leq \sup_{t \in [-1,1]} |g^{(k)}(t)|$, donc les $\left(T_\alpha(h_r * g)\right)^{(k)}(0)$ sont bornées, donc aussi pour les $m_i^{(k)}$, c'est à dire les m_i vérifient l'hypothèse A, ce qui entraine que g l'est aussi comme combinaison linéaire des m_i.

• $\Longleftarrow$ Réciproquement si g vérifie l'hypothèse A, alors d'après **III-B-2**, N_g est de codimension finie .