réalisée par Mr HAMANI AHMED prof de Maths spé TSI Mohammedia

I-Caractérisation des matrices symétriques définies positives

- **I-A.1.2 :** Soit $\lambda \in Sp(A)$, alors $\exists X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $AX = \lambda X$, donc ${}^tXAX = \lambda {}^tXX$ ce qui entraine que $\lambda = \dfrac{{}^tXAX}{{}^tXX}$.
  Si A est positive, alors $\lambda \geq 0$ et si A est définie positive, on aura $\lambda > 0$.
  Réciproquement : A étant symétrique réelle, donc diagonalisable, $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ tel que $A = PD{}^tP$, donc $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX = {}^t({}^tPX)D({}^tPX) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$ où on a posé ${}^tPX = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$
  Donc : si $Sp(A) \subset \mathbb{R}^+$, alors ${}^tXAX \geq 0$ et si $Sp(A) \subset \mathbb{R}^{*+}$, alors vu que X est non nul, ${}^tPX$ est aussi non nul, donc il existe $j \in [[1, n]]$ tel que $y_j \neq 0$, et par suite ${}^tXAX \geq \lambda_j y_j^2 > 0$.
  On a ainsi le résultat demandé.
- **I-B.1 :** Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ que nous supposons définie positive et soit $X_i \in M_{i,1}(\mathbb{R})$ non nul, alors en posant $X = \begin{pmatrix} X_i \\ O \end{pmatrix}$ où $O \in M_{n-i,1}(R)$, on aura ${}^tX_iAX_i = {}^tXAX > 0$, donc $A^{(i)}$ est définie positive pour tout $i \in [[1, n]]$.
- On déduit donc que $det(A^{(i)}) = \prod_{k=1}^{i} \mu_k > 0$ où $\mu_1, ..., \mu_i$ sont les valeurs propres de $A^{(i)}$ qui sont strictement positifs.
- **I-B.2 :**
  - <u>Cas $n = 1$</u>
    Soit $A = (a)$ tel que $a > 0$, donc $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $ax^2 > 0$, donc A est définie positive.
  - <u>Cas $n = 2$</u>
    Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ tel que $a > 0$ et $ac - b^2 > 0$. Les valeurs propres λ, μ de A vérifient $\lambda + \mu = a + c > 0$ et $\lambda\mu = ac - b^2 > 0$ donc $ac > b^2$ et par suite a et c sont de même signe qui est le signe de $a > 0$, donc $\lambda + \mu > 0$ et puisque $\lambda\mu > 0$ elles ont même signe positif celui de leur somme, donc $\lambda > 0$ et $\mu > 0$, ce qui entraine d'après $I - A.2$, A est définie positive.

- **I-B.3 :** Soit $A \in S_{n+1}(\mathbb{R})$ tel que pour tous $i \in [[1, n + 1]]$, $det(A^{(i)}) > 0$. On suppose que A n'est pas définie positive.
  - **(a) :** D'après $I - A.2$, il existe j tel que $\lambda_j \leq 0$, je dis que $\lambda_j < 0$, si $\lambda_j = 0$, $det(A) = det(A^{(n+1)}) = 0$ ce qui contredit l'hypothèse .
    $det(A) > 0$ donc $\prod_{i \neq j} \lambda_i < 0$, donc $\exists k$ tel que $\lambda_k < 0$, ce qui entraine l'existence de deux vecteurs propres linéairement indépendants associés à λ_j et λ_k respectivement.
  - **(b) :** Soient $V_1, V_2 \in M_{n+1,1}(\mathbb{R})$ les vecteurs propres orthonormaux associés aux deux valeurs propres λ_1, λ_2 strictement négatives de la question précédente. Notons a, b les dernières composantes de V_1 et V_2 respectivement.
    Si $ab = 0$, alors l'un des deux vecteurs répond à la question, on obtient ${}^tV_1AV_1 = \lambda_1\|V_1\|^2 = \lambda_1 < 0$ ou ${}^tV_2AV_2 = \lambda_2\|V_2\|^2 = \lambda_2 < 0$.
    Si $ab \neq 0$. La dernière composante du vecteur $V = bV_1 - aV_2$ est nulle et ona alors ${}^tVAV = b^2 \quad {}^tV_1AV_1 + a^2 \quad {}^tV_2AV_2 = b^2\lambda_1 + a^2\lambda_2 < 0$.
    On conclut donc l'existence d'un vecteur $X \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ de dernière composante nulle qui vérifit ${}^tXAX < 0$.
  - **(c) :** Posons $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ O \end{pmatrix} \in M_{n+1,1}(\mathbb{R})$ tel que $X_1 \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. On a ${}^tXAX = {}^tX_1A^{(n)}X_1 < 0$, ce qui contredit le fait que $A^{(n)}$ est définie positive.

- **I-C :** On a équivalence lorsque $n = 1$.
  Lorsque $n \geq 2$, l'implication directe est toujours vraie, la réciproque est fausse grâce à l'exemple
  $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans lequel on a $det(A^{(i)}) = 0$ pour tous $i \in [[1, n]]$, mais $Sp(A) = \{0, -1, 1\}$, donc A n'est pas définie positive.

- **I-D :** Je laisse cette question aux informaticiens

II-Étude d'une suite de polynômes

- **II-A :** facile à vérifier .
- **II-B :** On a $det(P_n) = 2n$, donc $deg(P_n^{(n)}) = 2n - n = n$.

  Au voisinage de 1 on a $P_n \sim (X-1)^n$, donc $P_n = (X-1)^n + o((X-1)^n)$, ce qui entraine que $\dfrac{P_n^{(n)}(1)}{n!} = 1$, donc $P_n^{(n)}(1) = n!$.
- **II-C :** Des intégrations par parties succéssives entrainent que $(Q, L_n) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 QP_n^{(n)} = \dfrac{1}{n!}\left[\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k Q^k P_n^{(n-k-1)}\right]_0^1 + \dfrac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 Q^{(n)}P_n$, or 0 et 1 sont des racines de P_n de multiplicité n , donc $P_n, P_n', ..., P_n^{(n-1)}$ s'annulent en 0 et 1, ce qui rend le crochet nul, de plus $deg(Q) \leq n-1$, donc $Q^{(n)} = 0$ et par suite $(Q, L_n) = 0$.
- **II-D.1 :** Une succéssion d'intégrations par parties amène à $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n(x-1)^n dx =$
  $$= -\frac{n}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}(x-1)^{n-1}dx = ... = (-1)^k \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{(n+1)(n+2)...(n+k)}\int_0^1 x^{n+k}(x-1)^{n-k}dx = ... = (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!}\int_0^1 x^{2n}dx.$$
  donc $I_n = \dfrac{(-1)^n(n!)^2}{(2n+1)!}$.
- **II-D.2 :** d'intégrations par parties entraine que $(L_n, L_n) = \dfrac{1}{(n!)^2}\displaystyle\int_0^1 P_n^{(n)}P_n^{(n)} = \dfrac{1}{(n!)^2}\left[\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k P_n^{(n+k)}P_n^{n-1-k}\right]_0^1 + \dfrac{(-1)^n}{(n!)^2}\int_0^1 P_n^{(2n)}P_n$, or le crochet est nul par la même justification faite dans la question $II - C$, de plus $P_n^{2n} = (2n)!$, ce qui entraine que $(L_n, L_n) = \dfrac{(-1)^n(2n)!}{(n!)^2}I_n = \dfrac{(-1)^n(2n)!}{(n!)^2}\dfrac{(-1)^n(n!)^2}{(2n+1)!} = \dfrac{1}{2n+1}$.
- **II-E :** On a $\forall n > m$, $L_m \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc d'après la question $II - C$, $(L_n, L_m) = 0$.

  De plus d'après la question précédente $\|L_n\| = \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$. Ce qui entraine que si on pose $K_n = \dfrac{L_n}{\|L_n\|} = \sqrt{2n+1}L_n$, alors la famille (K_n) répond à la question, et le coéfficient dominant de K_n est $\sqrt{2n+1}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$.

  Le procédé de Schmidt assure l'unicité.
- **II-F :** $L_0 = 1$, $L_1 = 2X - 1$, $L_2 = 6X^2 - 6X + 1$ ce qui donne $K_0 = 1$, $K_1 = \sqrt{3}(2X-1)$ et $K_3 = \sqrt{5}(6X^2 - 6X + 1)$.

  III-Matrices de Hilbert.
- **III-A.Étude de quelques propriétés de H_n.**
- **III-A.1 :** $H_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $H_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$, $H_2^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}$, $H_3^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}$
- **III-A.2 :** Soit la fraction définie par $F(X) = \alpha\dfrac{X(X-1)...(X-n+1)}{(X+1)(X+2)...(X+n+1)} = \dfrac{a_1}{X+1} + \dfrac{a_2}{X+2} + ... + \dfrac{a_{n+1}}{X+n+1}$, avec pour tout $k \in [[1, n+1]]$, a_k le résidu associé au pôle simple $-k$ donné par $a_k = \alpha\dfrac{-k(-k-1)...(-k-n+1)}{\displaystyle\prod_{j\neq k}(-k+j)} = (-1)^{n-k+1}\alpha\dfrac{(n-1+k)!}{((k-1)!)^2(n+1-k)!}$. On choisit α tel que $a_{n+1} = \alpha\dfrac{(2n)!}{(n!)^2} = 1$, c'est à dire $\alpha = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$

  L'opération élémentaire sur les colonnes de Δ_{n+1} donnée par $C_{n+1} \longleftarrow C_{n+1} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k C_k$ amène à
  $$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} & & & F(0) \\ & \triangle_n & & F(1) \\ & & & \vdots \\ * & \dots & * & F(n) \end{vmatrix}$$, or $F(0) = F(1) = ... = F(n-1) = 0$,

  donc $\triangle_{n+1} = F(n)\triangle_n = \alpha\dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}\triangle_n = \dfrac{(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!}\triangle_n$.
- **III-A.3 :** La relation de récurrence précédente conduit à $\triangle_n = \dfrac{((n-1)!(n-2)!...1!)^4}{(2n-1)!(2n-2)!...3!2!}\triangle_1 = \dfrac{c_n^4}{c_{2n}}$.
- **II-A.4 :**

- $det(H_n)=\triangle_n=\dfrac{c_n^4}{c_{2n}}>0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
- La relation de récurrence $det(H_{n+1}^{-1})=\dfrac{(2n)!(2n+1)!}{(n!)^4}det(H_n^{-1})=(2n+1)\begin{pmatrix}2n\\n\end{pmatrix}^2det(H_n^{-1})$ nous invite à utiliser une récurrence simple.
  Pour $n=1$, $det(H_1^{-1})=1\in\mathbb{N}$ et si on suppose que $det(H_n)\in\mathbb{N}$, alors :
  $det(H_{n+1}^{-1})=(2n+1)\begin{pmatrix}2n\\n\end{pmatrix}^2det(H_n^{-1})\in\mathbb{N}$, ce qui établit la récurrence.

- **III-A.5 :** Pour tout $k\in[[1,n]]$, $det(H_n^{(k)})=det(H_k)=\triangle_k>0$, donc d'après la question $I-B$, la matrice H_n est définie positive, de plus elle est symétrique, donc ses valeurs propres sont en nombre de n et $Sp(H_n)\subset\mathbb{R}^{*+}$.
- **III-B : Approximations au sens des moindres carrés.**
- **III-B.1 :** $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous espace vectoriel de $C^0([0,1],\mathbb{R})$ de dimension finie, donc le théorème de la projection orthogonale assure que pour tout $f\in C^0([0,1],\mathbb{R})$, il existe $p(f)=\Pi_n\in\mathbb{R}_n[X]$ la projection orthogonale de f sur $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\min\limits_{Q\in\mathbb{R}[X]}(\|Q-f\|)=d(f,\mathbb{R}[X])=\|\Pi_n-f\|$.
- **III-B.2 :**
  - $\mathbb{R}_{n-1}[X]\subset\mathbb{R}_n[X]$, donc $\min\limits_{Q\in\mathbb{R}_{n-1}[X]}(\|Q-f\|)\geq\min\limits_{Q\in\mathbb{R}_n[X]}(\|Q-f\|)$, c'est à dire $\|\Pi_{n-1}-f\|\geq\|\Pi_n-f\|$ ce qui traduit la décroissance de la suite $(\|\Pi_n-f\|)_n$.
  - On a $f\in C^0([0,1],\mathbb{R})$, le théorème de Weistrass assure l'existence d'une suite $(P_n)_n\subset\mathbb{R}[X]$ tel que $\|f-P_n\|_\infty\longrightarrow O$.
    Soit $\varepsilon>0$, la convergence uniforme précédente entraine qu'il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $\|f-P_{n_0}\|_\infty<\dfrac{\varepsilon}{2}$ et par l'inégalité, $\|f-P_{n_0}\|=(\displaystyle\int_0^1(f-P_{n_0})^2)^{1/2}\leq\|f-P_{n_0}\|_\infty$, on obtient $\|f-P_{n_0}\|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Si on pose $d_0=deg(P_{n_0})$, alors pour tout $n\geq max(d_0,n_0)$, $\|f-\Pi_n\|\leq\|f-P_{n_0}\|+\|P_{n_0}-p(P_{n_0})\|+\|p(P_{n_0})-p(f)\|$, or $P_{n_0}\in\mathbb{R}_n[X]$, donc $p(P_{n_0})=P_{n_0}$, de plus $\|p(P_{n_0})-p(f)\|=\|p(P_{n_0}-f)\|\leq\|P_{n_0}-f\|$, ce qui entraine que $\forall n\geq max(n_0,d_0)$ $\|f-\Pi_n\|\leq 2\|P_{n_0}-f\|\leq\varepsilon$.
- **III-B.3 :** Posons $e_k(X)=X^{k-1}$, alors $(e_1,...,e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et ona
  $(e_i,e_j)=\displaystyle\int_0^1e_ie_j=\int_0^1t^{i+j-2}dt=\frac{1}{i+j-1}=(H_n)_{i,j}$, donc la matrice H_n est la matrice du produit scalaire $(.,.)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
- **III-B.4** Posons $\Pi_n=\displaystyle\sum_{j=0}^{n}a_jX^j=\sum_{j=1}^{n+1}a_{j-1}X^{j-1}$.
  On sait que $f-\Pi_n\in(\mathbb{R}_n[X])^\perp$, donc $\forall k\in[[1,n+1]]$ $(f-\Pi_n,X^{k-1})=0$, ce qui donne
  $(f,X^{k-1})=\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1}a_{j-1}(X^{j-1},X^{k-1})=\sum_{j=1}^{n+1}a_{j-1}(H_{n+1})_{k,j}$, ce qui s'écrit $H_{n+1}\begin{pmatrix}a_0\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(f,1)\\\vdots\\(f,X^n)\end{pmatrix}$ et par suite $\begin{pmatrix}a_0\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=H_{n+1}^{-1}\begin{pmatrix}(f,1)\\\vdots\\(f,X^n)\end{pmatrix}$.
- **III-B.5 :**

IV Propriétés des coefficients de H_n^{-1}
- **IV-A : Somme des coefficients de H_n^{-1}**
- **IV-A.1 :** $s_1=1$, $s_2=4$, $s_3=9$, on conjecture que $s_n=n^2$.
- Le système en question est un système à n équations, n inconnus de matrice H_n qui est inversible, donc c'est un système de Cramer qui admet une solution unique.
- **IV-A.2** La solution unique du système est donnée par $\begin{pmatrix}a_0^{(n)}\\\vdots\\a_{n-1}^{(n)}\end{pmatrix}=H_n^{(-1)}\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$, donc $\forall i\in[[0,n-1]]$
  $a_i^{(n)}=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}h_{i+1,j}^{(-1,n)}$, ce qui donne en sommant sur les i, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}a_i^{(n)}=\sum_{i=1}^{n}a_{i-1}^{(n)}=\sum_{1\leq i,j\leq n}h_{i,j}^{(-1,n)}=s_n$.
- **IV-A.3** puisque $Q=\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1}\alpha_pX^p$, on aura $(S_n,Q)=\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1}\alpha_p(S_n,X^p)$, or en exploitant pour tout $p\in[[0,n-1]]$, la $(p+1)^{\text{ème}}$ ligne du système de la question $IV-A.2:(a)$, on obtient
  $(S_n,X^p)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}a_k^{(n)}(X^p,X^k)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_k^{(n)}}{p+k+1}=1$, ce qui entraine que $(S_n,Q)=\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1}\alpha_p=Q(1)$.

- **IV-A.4** En prenant $Q = S_n$ dans la relation précédente, on obtient $(S_n, S_n) = \sum_{p=0}^{n-1} a_p^{(n)} = s_n$,or puisque $(K_p)_{0\leq p\leq n-1}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ on a $(S_n, S_n) = \|S_n\|^2 = \sum_{p=0}^{n-1}(S_n, K_p)^2)$, et toujours d'après la relation précédente avec $Q = K_p$, on aura $(S_n, K_p) = K_p(1)$, ce qui donne finalement
  $s_n = \sum_{p=0}^{n-1}(K_p(1))^2$.
- **IV-A.5 :** On a $K_p = \sqrt{2p+1}L_p$ avec $L_p(1) = 1$ on obtient $K_p(1) = \sqrt{2p+1}$.
- **IV-A.6 :** $s_n = \sum_{p=0}^{n-1}(K_p(1))^2 = \sum_{p=0}^{n-1}(2p+1) = 2\sum_{p=1}^{n-1} + n = (n-1)n + n = n^2$.

- **IV-B :Les coefficients de H_n^{-1} sont des entiers.**
- **IV-B.1 :** Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\begin{pmatrix} 2p \\ p \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2p-1 \\ p \end{pmatrix} \in 2\mathbb{N}$.

  Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [[1, n]]$, un calcul simple conduit à $\begin{pmatrix} n+p \\ p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2p \\ p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n+p \\ 2p \end{pmatrix} \in 2\mathbb{N}$.
- **IV-B.2 :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $K_n = \sqrt{2n+1}L_n$ avec $L_n = \dfrac{1}{n!}(P_n^{(n)})$, or $(P_n)^{(n)} = (X^n(X-1)^n)^{(n)} = \left(\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}(-1)^{n-k}X^{n+k}\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}(-1)^{n-k}\dfrac{(n+k)!}{k!}X^k$, ce qui donne $L_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\begin{pmatrix} n+k \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}X^k$, donc le coefficient constant de L_n est égale à $(-1)^n$ et tous les autres sont pairs grâce à la question précédente.
- **IV-B.3 :**
  - Soit $P = (p_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, ..., X^{n-1})$ à la base orthonormée pour le produit scalaire $(.,.)$, $\mathcal{B}' = (K_0, K_1, ..., K_{n-1})$. La matrice du produit scalaire $(.,.)$ est H_n dans la base $\mathcal{B}$, respectivement I_n dans la base $\mathcal{B}'$ et la formule de changement de bases s'écrit $I_n = {}^tPH_nP$, ce qui entraine en inversant que $H_n^{-1} = P\ {}^tP$, or pour tout $j \in [[0, n-1]]$
    $K_j = \sqrt{2j+1}\sum_{k=0}^{j}(-1)^{j-k}\begin{pmatrix} j+k \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j \\ k \end{pmatrix}X^k$.

    D'où pour tous $i, j \in [[1, n]]$ $p_{i,j} = \sqrt{2j-1}(-1)^{j-i}\begin{pmatrix} j+i-2 \\ i-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j-1 \\ i-1 \end{pmatrix}$ si $i \leq j$ et $p_{i,j} = 0$ si $i > j$.

    Donc pour tout $i \in [[1, n]]$ $\quad h_{i,i}^{(-1,n)} = \sum_{j=i}^{n} p_{i,j}^2 = \sum_{j=i}^{n}(2j-1)\begin{pmatrix} j+i-2 \\ i-1 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} j-1 \\ i-1 \end{pmatrix}^2$.

    En particulier pour $i = 1$ et $i = n$, on obtient $\quad h_{1,1}^{(-1,n)} = \sum_{j=1}^{n}(2j-1) = n^2$ et $h_{n,n}^{(-1,n)} = (2n-1)\begin{pmatrix} 2n-2 \\ n-1 \end{pmatrix}^2$.
  - Pour tous $i, j \in [[1, n]]$ $h_{i,j}^{(-1,n)} = \sum_{k=max(i,j)}^{n} p_{i,k}p_{j,k} =$

    $= (-1)^{i+j}\sum_{k=max(i,j)}^{n}(2k-1)\begin{pmatrix} k+i-2 \\ i-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k-1 \\ i-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k+j-2 \\ j-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k-1 \\ j-1 \end{pmatrix}$

    Ce qui montre que les $h_{i,j}^{(-1,n)}$ sont des entiers comme produit d'entiers.
  - Soient $i, j \in [[2, n]]$, donc pour tout $k \geq max(i, j) \geq 2$, $i-1, j-1, k-1 \in \mathbb{N}^*$, et par suite d'après $(IV-B.1)$, $\begin{pmatrix} k+i-2 \\ i-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k-1 \\ i-1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} k+j-2 \\ j-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k-1 \\ j-1 \end{pmatrix}$ sont pairs, donc leur produit est un multiple de 4, ce qui entraine que $h_{i,j}^{(-1,n)}$ qui est somme de ces produits est aussi un multiple de 4.

* *