Centrale, 2011, MP, Mathématiques 1

(9 pages)

I - Étude préliminaire

I.A - *Convergence des séries de Riemann*

I.A.1) Pour tout $x \in [k-1, k] \subset [a, +\infty[$, $f(x+1) \leqslant f(k) \leqslant f(x)$ par décroissance de f donc $\displaystyle\int_{k-1}^{k} f(x+1)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{k-1}^{k} f(k)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x$, soit, en effectuant le changement de variable $t = x+1$ dans la première intégrale, $\underline{\displaystyle\int_{k}^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x}$.

I.A.2) Si $\alpha > 1$, on a donc, en appliquant ce qui précède à $f:\ t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ qui est bien continue et décroissante sur $[1, +\infty[$,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant 1 + \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = 1 + \left[\frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}}\right]_1^n = 1 + \frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha-1}$$

et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ est une série à termes réels positifs dont la suite des sommes partielles est majorée: elle est donc convergente.

Si $\alpha \leqslant 1$, on a donc, en appliquant [**1**] $f:\ t \mapsto \dfrac{1}{t}$ qui est continue et décroissante sur $[1, +\infty[$,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} = [\ln(t)]_1^n = \ln(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ est donc divergente.

Ainsi $\underline{\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1}$.

I.A.3) La majoration a été vue au [**2**], la minoration est immédiate donc $\underline{\forall \alpha > 0,\ 1 \leqslant S(\alpha) \leqslant 1 + \dfrac{1}{\alpha-1}}$.

I.B - *Première étude asymptotique du reste*

I.B.1) Pour $\alpha < 1$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et o déduit de [**A.1**] :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} = \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant R_n(\alpha) \leqslant \int_{n-1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)(n-1)^{\alpha-1}}$$

donc $0 \leqslant R_n(\alpha) - \dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \leqslant \dfrac{1}{(\alpha-1)(n-1)^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

Or $\dfrac{1}{(\alpha-1)(n-1)^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} = \dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}\left(\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{1-\alpha} - 1\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^\alpha}$.

Donc $\underline{R_n(\alpha) = \dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + O\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)}$.

I.B.2) La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2 entre $k \in \mathbb{N}^*$ et $k+1$ s'écrit

$$f(k+1) = f(k) + f'(k) + \frac{1}{2}f''(k) + \frac{1}{2}\int_0^1 f^{(3)}(k+t)(1-t)^2\,\mathrm{d}t.$$

Or $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, f'(t) = \frac{1}{t^\alpha},\ f''(t) = -\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}},\ f''(t) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{t^{\alpha+2}}$. On a donc

$$f(k+1) - f(k) = \frac{1}{k^\alpha} - \frac{\alpha}{2}\frac{1}{k^{\alpha+1}} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}\int_0^1 \frac{(1-t)^2}{(k+t)^{\alpha+2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k^\alpha} - \frac{\alpha}{2}\frac{1}{k^{\alpha+1}} + A_k$$

avec $0 \leqslant A_k \leqslant \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}\int_0^1 \frac{1}{k^{\alpha+2}}\,\mathrm{d}t$.

On a donc $\underline{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ f(k+1) - f(k) = \frac{1}{k^\alpha} - \frac{\alpha}{2}\frac{1}{k^{\alpha+1}} + A_k \text{ avec } 0 \leqslant A_k \leqslant \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}\frac{1}{k^{\alpha+2}}}$.

I.B.3) On peut écrire l'égalité ci-dessus sous la forme $\frac{1}{k^\alpha} = f(k) - f(k+1) + \frac{\alpha}{2}\frac{1}{k^{\alpha+1}} - A_k$ avec $A_k = O\left(\frac{1}{k^{\alpha+2}}\right)$. La série $\sum_{k\geqslant 1}\big(f(k) - f(k+1)\big)$ est une série télescopique qui converge puisque $f(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et les séries $\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^{\alpha+1}}$ et $\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^{\alpha+2}}$ sont des séries de Riemann convergentes. On a donc, par linéarité de la somme, $R_n(\alpha) = f(n) + \frac{\alpha}{2}R_n(\alpha+1) - \sum_{k=n}^{+\infty} A_k$. Or, par sommation de relation de comparaison pour des séries convergentes, on a $\sum_{k=n}^{+\infty} A_k = O\big(R_n(\alpha+2)\big)$. D'autre part, [**1**] donne $R_n(\alpha+1) = \frac{1}{\alpha n^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$ et $R_n(\alpha+2) = \frac{1}{(\alpha+1)n^{\alpha+1}} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+2}}\right) = O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$. Finalement, $\underline{R_n(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + \frac{1}{2n^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)}$.

II - Formule de Taylor et nombres de Bernoulli

II.A - ***Nombres de Bernoulli***

II.A.1) Montrons, par récurrence sur $p \geqslant 1$, qu'il existe $(a_0, \ldots, a_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$ tels que

$$\underline{\exists\,(b_{1,p}, \ldots, b_{p-1,p}) \in \mathbb{R}^{p-1},\quad \forall f \in C^\infty(I, \mathbb{C}),\ g = \sum_{k=0}^{p-1} a_k f^{(k)} \text{ vérifie } \sum_{j=1}^{p}\frac{1}{j!}g^{(j)} = f' + \sum_{l=1}^{p-1} b_{l,p} f^{(l+p)}.}$$

Pour $p = 1$, il suffit de prendre $a_0 = 1$, alors $g = f$ donc $g' = f'$ et l'égalité est vérifiée.
Pour $p = 2$, prenons $a_1 = -\frac{1}{2}$. On a alors $g = f - \frac{1}{2}f'$ donc $g' + \frac{1}{2}g'' = f' - \frac{1}{2}f'' + \frac{1}{2}f'' - \frac{1}{4}f^{(3)} = f' - \frac{1}{4}f^{(3)}$ ce qui est l'égalité voulue.
Si le résultat est vrai jusqu'à p, prenons $a_p = -b_{1,p}$ et notons $g = \sum_{k=0}^{p} a_k f^{(k)} = h - b_{1,p}f^{(p)}$. L'hypothèse de récurrence donne $\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{j!}h^{(j)} = f' + \sum_{l=1}^{p-1} b_{l,p}f^{(l+p)}$ donc

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{p+1}\frac{1}{j!}g^{(j)} &= \sum_{j=1}^{p}\frac{1}{j!}h^{(j)} + \frac{1}{(p+1)!}h^{(p+1)} - b_{1,p}\sum_{j=1}^{p+1}\frac{1}{j!}f^{(p+j)} \\
&= f' + \sum_{l=1}^{p-1} b_{l,p}f^{(l+p)} + \frac{1}{(p+1)!}\sum_{k=0}^{p} a_k f^{(k+p+1)} - b_{1,p}f^{(p+1)} - \sum_{j=2}^{p+1}\frac{b_{1,p}}{j!}f^{(p+j)} \\
&= f' + \sum_{l=2}^{p-1} b_{l,p}f^{(l+p)} + \frac{1}{(p+1)!}\sum_{k=0}^{p} a_k f^{(k+p+1)} - \sum_{j=2}^{p+1}\frac{b_{1,p}}{j!}f^{(p+j)} \\
&= f' + \sum_{l=1}^{p} b_{l,p+1}f^{(l+p+1)} \qquad \text{CQFD}
\end{aligned}$$

II.A.2) $\diamond$ Appliquons ce qui précède à $f\ :\ t\mapsto \mathrm{e}^{xt}$ qui est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$: on a alors $\forall t\in\mathbb{R},\ g(t)=\sum\limits_{k=0}^{p-1} a_k f^{(k)}(t)=\sum\limits_{k=0}^{p-1} a_k x^k \mathrm{e}^{xt}$ donc, pour $t=0$ et pour tout $x\in\mathbb{C}$,

$$\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{j!}g^{(j)}(0)=\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{j!}\left(\sum_{k=0}^{p-1}a_k x^{k+j}\right)=\sum_{i=1}^{2p-1}\left(\sum_{\substack{j+k=i\\ 1\leqslant j\leqslant p,\ 0\leqslant k\leqslant p}}\frac{a_k}{j!}\right)x^i$$
$$=a_0x+\sum_{i=2}^{p}\left(\sum_{j=1}^{i}\frac{a_{i-j}}{j!}\right)x^i+\sum_{l=1}^{p-1}\left(\sum_{\substack{j+k=l+p\\ 1\leqslant j\leqslant p,\ 0\leqslant k\leqslant p}}\frac{a_k}{j!}\right)x^{l+p}$$

et

$$f'(0)+\sum_{l=1}^{p-1}b_{l,p}f^{(l+p)}(0)=x+\sum_{l=1}^{p-1}b_{l,p}x^{l+p}.$$

Cette égalité étant vraie pour tout $x\in\mathbb{C}$, on obtient $a_0=1$ et $\forall i\in[\![2,p]\!],\ \sum\limits_{j=1}^{i}\frac{a_{i-j}}{j!}=0$ donc $a_{i-1}=-\sum\limits_{j=2}^{i}\frac{a_{i-j}}{j!}$. Ceci étant vrai pour tout p, on a bien obtenu $a_0=1$ et $\forall p\geqslant 1,\ a_p=-\sum\limits_{j=2}^{p+1}\frac{a_{p+1-j}}{j!}$.

Remarque: on peut préférer utiliser $f\ :\ t\mapsto\frac{t^q}{q!}$ qui vérifie $f^{(k)}(0)=\delta_{k,q}$.

$\diamond$ Montrons $|a_p|\leqslant 1$ par récurrence sur p: c'est fait pour $p=0$ et si c'est vrai jusqu'à $p-1$, pour $p\geqslant 1$, on a, selon ci-dessus, $|a_p|=\left|\sum\limits_{j=2}^{p+1}\frac{a_{p+1-j}}{j!}\right|\leqslant\sum\limits_{j=2}^{p+1}\frac{|a_{p+1-j}|}{j!}\leqslant\sum\limits_{j=2}^{p+1}\frac{1}{j!}\leqslant\sum\limits_{j=2}^{+\infty}\frac{1}{j!}=\mathrm{e}-2<1$. Ainsi $\forall p\in\mathbb{N},\ |a_p|\leqslant 1$.

$\diamond$ La formule de récurrence donne facilement $a_1=-\frac{1}{2},\ a_2=\frac{1}{12}$.

II.A.3) *a)* Pour $|z|\leqslant 1$, on a, d'après [**1**], $\forall p\in\mathbb{N},\ |a_pz^p|\leqslant 1$ et donc la suite $(a_pz^p)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée. Le lemme d'Abel donne que le rayon de convergence de $\sum\limits_{p\in\mathbb{N}}a_pz^p$ est $R\geqslant 1$. Notamment, si $|z|<1,\ \sum\limits_{p\in\mathbb{N}}a_pz^p$ converge .

b) $\diamond$ Pour tout $z\in\mathbb{C}$, $\mathrm{e}^z-1=\sum\limits_{q=1}^{+\infty}\frac{z^q}{q!}$ donc, par produit de Cauchy de séries entières sur l'intersection de leur disques ouverts de convergence, pour $|z|<1$,

$$\left(\mathrm{e}^z-1\right)\varphi(z)=\left(\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{z^q}{q!}\right)\times\left(\sum_{p=1}^{+\infty}a_pz^p\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{a_{n-j}}{j!}\right)z^n=z\quad\text{selon }[\mathbf{2}]$$

donc si $|z|<1,\ \left(\mathrm{e}^z-1\right)\varphi(z)=z$.

$\diamond$ Or $\mathrm{e}^z-1=0\Leftrightarrow z\in 2i\pi.\mathbb{Z}$ donc si $0<|z|<1$, $\mathrm{e}^z-1\neq 0$ et donc si $0<|z|<1,\ \varphi(z)=\frac{z}{\mathrm{e}^z-1}$.

c) $\diamond$ On a donc, pour $0<|z|<1$, $\psi(z)=\varphi(z)+\frac{z}{2}=z\,\frac{\mathrm{e}^z+1}{\mathrm{e}^z-1}=z\,\frac{\mathrm{e}^{z/2}+\mathrm{e}^{-z/2}}{\mathrm{e}^{z/2}-\mathrm{e}^{-z/2}}=\psi(-z)$ et, pour $|z|<1$, $\psi(z)=a_0+\sum\limits_{p=2}^{\infty}a_pz^p$. Par unicité du développement en série entière de la restriction de ψ à $]-1,1[$, la parité de ψ donne $\forall k\geqslant 1,\ a_{2k+1}=0$.

$\diamond$ La formule de récurrence du [**2**] ou un développement limité de φ donne $a_4=-\frac{1}{720}$.

II.B - ***Formule de Taylor***

II.B.1) Si $f(x)=\dfrac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$ alors f donc g sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $2p$ entre $k\in\mathbb{N}^*$ et $k+1$ pour g donne

$$\begin{aligned} g(k+1) &= g(k)+\sum_{j=1}^{2p}\frac{1}{j!}g^{(j)}(k)+\frac{1}{(2p)!}\int_0^1 g^{(2p+1)}(k+t)\,(1-t)^2\,\mathrm{d}t \\ &= f'(k)+\sum_{l=1}^{2p} b_{l,2p}f^{(l+2p)}(k)+\frac{1}{(2p)!}\int_0^1\left(\sum_{i=0}^{2p-1}a_i f^{(i+2p+1)}(k+t)\right)(1-t)^2\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Or $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\dfrac{\alpha\cdots(\alpha+n-2)}{x^{\alpha+n-1}}$ donc

$$\begin{aligned} \big|R(k)\big| &= \left|\sum_{n=2p+1}^{4p} b_{n-2p,2p}(-1)^{n-1}\frac{\alpha\cdots(\alpha+n-2)}{k^{\alpha+n-1}}+\int_0^1\left[\sum_{n=2p+1}^{4p} a_{n-2p-1}(-1)^{n-1}\frac{\alpha\cdots(\alpha+n-2)}{(2p)!(k+t)^{\alpha+n-1}}\right](1-t)^2\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \sum_{n=2p+1}^{4p}\big|b_{n-2p,2p}\big|\frac{\alpha\cdots(\alpha+n-2)}{k^{\alpha+n-1}}+\frac{1}{(2p)!}\int_0^1\left(\sum_{n=2p+1}^{4p}\big|a_{n-2p-1}\big|\frac{\alpha\cdots(\alpha+n-2)}{(k+t)^{\alpha+n-1}}\right)(1-t)^2\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \left[\sum_{n=2p+1}^{4p}\left(\big|b_{n-2p,2p}\big|+\frac{\big|a_{n-2p-1}\big|}{(2p)!}\right)\alpha\cdots(\alpha+n-2)\right]k^{-(2p+\alpha)} \end{aligned}$$

donc, p étant fixé, $\underline{\exists A\in\mathbb{R},\ \forall k\in\mathbb{N}^*,\quad \big|R(k)\big|\leqslant A\,k^{-(2p+\alpha)}}$.

II.B.2) ERREUR D'ÉNONCÉ: *la formule donnée n'est pas vraie pour $p=1$ car elle s'écrirait $R_n(\alpha)=\dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}+O\left(\dfrac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$ en désaccord avec le développement trouvé au* [**I.B.3**].

D'après [**1**], on a $R(k)=O\left(\frac{1}{k^{2p+\alpha}}\right)$ et $2p+\alpha>1$ donc la série $\sum\limits_{k\geqslant 1}R(k)$ est convergente et on a, par sommation des relations de comparaison, $\sum\limits_{k=n}^{\infty}R(k)=O\left(R_n(2p+\alpha)\right)=O\left(\frac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\right)$ selon [**I.B.1**]. Or $R(k)=g(k+1)-g(k)-\frac{1}{k^\alpha}$ avec $g(k)=\dfrac{a_0}{(1-\alpha)k^{\alpha-1}}+\sum\limits_{i=1}^{2p-1}a_i(-1)^{i-1}\dfrac{\alpha\cdots(\alpha+i-2)}{k^{\alpha+i-1}}\xrightarrow[k\to+\infty]{}0$ donc la série $\sum\limits_{k\geqslant 1}\big(g(k+1)-g(k)\big)$ converge et on a $\sum\limits_{k=n}^{\infty}R(k)=-g(n)-R_n(\alpha)$ donc $R_n(\alpha)=-g(n)+\sum\limits_{k=n}^{\infty}R(k)=-g(n)+O\left(\frac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\right)$. De plus, pour $p\geqslant 1$, $a_3=\ldots=a_{2p-1}=0$ selon [**A.3**]. Ceci donne $\underline{\forall p\geqslant 2,\ R_n(\alpha)=-\Big(a_0f(n)+a_1f'(n)+a_2f''(n)+\cdots+a_{2p-2}f^{(2p-2)}(n)\Big)+O\left(\frac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\right)}$.

II.B.3) Pour $p=3$, il vient $R_n(\alpha)=-\left(\dfrac{1}{(1-\alpha)n^{\alpha-1}}-\dfrac{1}{2n^\alpha}-\dfrac{\alpha}{12n^{\alpha+1}}+\dfrac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{720n^{\alpha+3}}\right)+O\left(\dfrac{1}{n^{\alpha+5}}\right)$ soit, en particulier, $\underline{R_n(3)=\dfrac{1}{2n^2}+\dfrac{1}{2n^3}+\dfrac{1}{4n^4}-\dfrac{1}{12n^6}+O\left(\dfrac{1}{n^8}\right)}$.

III - Polynômes de Bernoulli et formule sommatoire d'Euler-Maclaurin

III.A - ***Polynômes de Bernoulli***

III.A.1) Propriétés élémentaires

a) ⋄ Montrons l'existence et l'unicité de A_n par récurrence sur n.

Pour $n=0$, A_0 est donné directement donc il existe unique et c'est bien un polynôme .Et si A_n existe unique alors soit F la primitive de A_n qui s'annule en 0, F est un polynôme et

$$\left(A'_{n+1}=A_n \text{ et } \int_0^1 A_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t=0\right) \Longleftrightarrow \left(A_n=F+C \ (C \text{ constante}) \text{ et } C=-\int_0^1 F(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

donc la constante C existe unique et donc le polynôme A_n existe unique.
Ainsi les conditions [**III.1**] définissent une unique suite $\left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes sur $\mathbb{R}$.

$\diamond$ Montrons, par récurrence sur n, que $\deg(A_n)=n$: c'est clair pour $n=0$, et si c'est vrai pour n, alors $A'_{n+1}(X)=A_n(X)=\sum\limits_{k=0}^{n} c_{n,k}X^k$ avec $cn,n\neq 0$ donc $A_{n+1}(X)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{c_{n,k}}{k+1}X^{k+1}+c_{n+1,0}$.

$\diamond$ On trouve facilement $A_1=X-\frac{1}{2},\ A_2=\dfrac{X^3}{6}-\dfrac{X}{2}+\dfrac{1}{12},\ A_3=\dfrac{X^2}{2}-\dfrac{X^2}{4}+\dfrac{X}{12}$.

b) Posons $C_n(x)=(-1)^nA_n(1-x)$: C_n est une fonction polynôme et on a $C_0=1$, $\forall n\geqslant 1,\ C'_n(x)=(-1)^{n+1}A'_n(1-x)=(-1)^{n+1}A_{n-1}(1-x)=C_{n-1}(x)$ et $\displaystyle\int_0^1 C_n(t)\,\mathrm{d}t=(-1)^n\int_0^1 A_n(1-t)\,\mathrm{d}t \underset{u=1-t}{=} (-1)^n\int_0^1 A_n(u)\,\mathrm{d}u=0$. Donc la suite $\left(C_n\right)$ vérifie les conditions [**III.1**] et donc, par unicité, $\forall n,\ C_n=A_n$ ce qui donne $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\ A_n(x)=(-1)^nA_n(1-x)$.

c) $\diamond$ Pour $n\geqslant 2$, $A_n(1)-A_n(0)=\int_0^1 A'_n(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 A_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t=0$ donc $\forall n\geqslant 2,\ A_n(1)=A_n(0)$.
$\diamond$ Selon [**b**], $A_{2n-1}(0)=-A_{2n-1}(1-0)=-A_{2n-1}(0)$ d'après ci-dessus donc $\forall n\geqslant 2,\ A_{2n-1}(0)=0$.

d) $\diamond$ Montrons, par récurrence sur n, que $A_n(X)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{c_{n-k}}{k!}X^k$: c'est clair pour $n=0$, et si c'est vrai pour n, alors $A'_{n+1}(X)=A_n(X)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{c_{n-k}}{k!}X^k$ donc $A_{n+1}(X)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{c_{n-k}}{(k+1)!}X^{k+1}+c_{n+1}$ car $c_{n+1}=A_{n+1}(0)$. Ceci donne bien $A_{n+1}(X)=\sum\limits_{k=0}^{n+1}\dfrac{c_{n+1-k}}{k!}X^k$.

$\diamond$ L'égalité $A_{n+1}(1)=A_{n+1}(0)$ donne alors $\sum\limits_{k=1}^{n+1}\dfrac{c_{n+1-k}}{k!}=0$ soit $\forall n\geqslant 1,\ \sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{c_k}{(n+1-k)!}=0$.

e) On $c_0=A_0(0)=1$ et, pour $n\geqslant 1$, $c_n=-\sum\limits_{k=2}^{n+1}\dfrac{c_{n+1-k}}{k!}$ donc, suivant [**II.A.2**], et par récurrence immédiate, $\forall n\in\mathbb{N},\ c_n=a_n$.

III.A.2) Fonction génératrice

a) Pour $t\in[-1,1]$, $\left|A_n(t)\,z^n\right|=\left|\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{a_{n-k}}{k!}t^k\right||z|^n\leqslant\left(\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{\left|a_{n-k}\right|}{k!}\right)|z|^n\leqslant\left(\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}\right)|z|^n\leqslant \mathrm{e}\,|z|^n$ selon [**II.A.2**]. Or $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}|z|^n$ converge si $|z|<1$ donc si $t\in[-1,1]$ et $|z|<1$ alors $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}A_n(t)\,z^n$ converge .

b) $\diamond$ u_n : $t\mapsto A_n(t)\,z^n$ est de classe C^1 sur $[0,1]$ avec $u'_n(t)=\begin{cases}A_{n-1}(t)\,z^n & \text{si } n\geqslant 1\\ 0 & \text{si } n=1\end{cases}$, pour z tel que $|z|<1$ fixé la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}u_n$ converge simplement sur $[0,1]$ selon [**a**] et $\forall n\geqslant 1,\ \left\|u'_n\right\|_\infty^{[0,1]}\leqslant \mathrm{e}\,|z|^n$ donc $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}u'_n$ converge normalement sur $[0,1]$. Le théorème de dérivation terme à terme permet de conclure et comme $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_{n-1}(t)\,z^n=z\sum\limits_{n=0}^{\infty}A_n(t)\,z^n$, $t\mapsto f(t,z)$ est de classe C^1 sur $[0,1]$ et $\forall t\in[0,1],\ \dfrac{\partial f}{\partial t}(t,z)=z\,f(t,z)$.

$\diamond$ La fonction ci-dessus est donc solution de l'équation différentielle $y'=z\,y$ donc $\forall t\in[0,1],\ f(t,z)=f(0,z)\,\mathrm{e}^{zt}$. Or $f(0,z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\,z^n=\varphi(z)$ donc si $t\in[0,1]$ et $0<|z|<1$ alors $\sum\limits_{n=0}^{\infty}A_n(t)\,z^n=\dfrac{z\,\mathrm{e}^{zt}}{\mathrm{e}^z-1}$.

c) $\diamond$ Erreur d'énoncé: *lire $z\in\mathbb{C}^*$ et $|z|<2\pi$.*

Pour $0 < |z| < 2\pi$, on a $\mathrm{e}^z - 1 \neq 0$ et $\dfrac{z\,\mathrm{e}^{z/2}}{\mathrm{e}^z-1} + \dfrac{z}{\mathrm{e}^z-1} = z\dfrac{\mathrm{e}^{z/2}+1}{\left(\mathrm{e}^{z/2}-1\right)\left(\mathrm{e}^{z/2}+1\right)}$. On a donc bien si $0 < |z| < 2\pi,\ \dfrac{z\,\mathrm{e}^{z/2}}{\mathrm{e}^z-1} + \dfrac{z}{\mathrm{e}^z-1} = 2\dfrac{z/2}{\mathrm{e}^{z/2}-1}$.

◇ Ainsi selon [**b**], pour $0 < |z| < 1$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n\left(\frac{1}{2}\right) z^n = \dfrac{z\,\mathrm{e}^{z/2}}{\mathrm{e}^z-1} = 2\dfrac{z/2}{\mathrm{e}^{z/2}-1} - \dfrac{z}{\mathrm{e}^z-1} = 2\varphi\left(\frac{z}{2}\right) - \varphi(z) = 2\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\left(\frac{z}{2}\right)^n - \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Cette égalité est notamment vraie pour $z \in]0,1[$ et aussi pour $z = 0$. par unicité du développement en série entière en 0, ceci donne $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2^{n-1}} - 1\right) a_n$.

III.A.3) Variations des polynômes de Bernoulli

a) Montrons par récurrence sur p que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a les tableaux de variations suivants:

x	0	α_{2p-1}	$1/2$	β_{2p-1}	1
$A_{4p-2}(x)$	$\searrow$	0	$\searrow$ $\nearrow$	0	$\nearrow$

x	0	α_{2p-1}	$1/2$	β_{2p-1}	1
$A_{4p-1}(x)$	0 $\nearrow$		$\searrow$ 0 $\searrow$		$\nearrow$ 0

x	0	α_{2p}	$1/2$	β_{2p}	1
$A_{4p}(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$ $\searrow$	0	$\searrow$

x	0	α_{2p}	$1/2$	β_{2p}	1
$A_{4p+1}(x)$	0 $\searrow$		$\nearrow$ 0 $\nearrow$		$\searrow$ 0

Pour $p = 1$, le tableau de de variations de A_2 est bien comme indiqué avec $\alpha_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}$ et $\beta_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}$, puis, comme $A_3' = A_2$ et $A_3(1/2) = a_3 = 0$, le tableau de variations de A_3 est celui voulu. On en déduit, puisque $A_4' = A_3$ que A_4 croît sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ donc $A_4\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2^3} - 1\right) > a_4$ ce qui donne $a_4 < 0 < A_4\left(\frac{1}{2}\right)$ et donc, grâce à sa stricte monotonie, A_4 a une unique racine $\alpha_4 \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$. De même, puisque $A_4(1) = a_4$, A_4 décroît sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et a une unique racine $\beta_4 \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$. On a donc le tableau voulu pour A_4 et donc celui de A_5 en sachant que $A_5(0) = A_5(1) = A_5(1/2) = 0$.

Si le résultat est vrai pour p, du tableau de A_{4p+1}, on déduit le signe de A'_{4p+2} qui donne la décroissance stricte de A_{4p+2} sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et sa croissance stricte sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et, comme pour A_4 ceci donne, puisque $\frac{1}{2^{n-1}} - 1 < 0$, $A_{4p+2}\left(\frac{1}{2}\right) < 0 < a_{4p+2}$ donc A_{4p+2} s'annule une fois et une seule dans chaque intervalle $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ et $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$. On en déduit le signe de A_{4p+2} donc les variations de A_{4p+3}, puis son signe sachant que A_{4p+3} s'annule en 0, $\frac{1}{2}$ et 1. Les tableaux de variations de A_{4p+4} et A_{4p+5} s'obtiennent de même et sont bien ceux attendus.

b) ◇ D'après les tablaux ci-dessus $\left\|A_{2n}\right\|_\infty^{[0,1]} = \mathrm{Max}\left(\left|a_{2n}\right|, \left|A_{2n}\left(\frac{1}{2}\right)\right|\right)$ mais, pour $n \geqslant 1$, $\left|A_{2n}\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \left(1 - \frac{1}{2^{2n-1}}\right)\left|a_{2n}\right| < \left|a_{2n}\right|$ donc $\forall n \geqslant 1,\ \forall x \in [0,1],\ \left|A_{2n}(x)\right| \leqslant \left|a_{2n}\right|$.

◇ Puisque $A_{2n+1}(1-x) = -A_{2n+1}(x)$, on a $\left\|A_{2n+1}\right\|_\infty^{[0,1]} = \left\|A_{2n+1}\right\|_\infty^{[0,1/2]}$. Mais si $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $\left|A_{2n+1}(x)\right| = \left|A_{2n+1}(0) + \int_0^x A_{2n}(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^x A_{2n}(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant x\left\|A_{2n}\right\|_\infty^{[0,1]}$ car $a_{2n+1} = 0$ si $n \geqslant 1$. Ainsi $\forall n \geqslant 1,\ \forall x \in [0,1],\ \left|A_{2n+1}(x)\right| \leqslant \dfrac{\left|a_{2n}\right|}{2}$.

III.B - *Formule sommatoire d'Euler-Maclaurin*

III.B.1) *a)* Montrons par récurrence sur $q \in \mathbb{N}$ (il est plus simple de partir de 0) que

$$f(1) - f(0) = \sum_{j=1}^{q} (-1)^{j+1}\left[A_j(t) f^{(j)}(t)\right]_0^1 + (-1)^q \int_0^1 A_q(t) f^{(q+1)}(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Pour $q = 0$, la formule se réduit à $f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t$ qui est vraie et si celle est vraie pour q, comme, par intégration par parties,

$$\int_0^1 A_q(t) f^{(q+1)}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 A'_{q+1}(t) f^{(q+1)}(t)\,\mathrm{d}t = \Big[A_{q+1}(t) f^{(q+1)}(t)\Big]_0^1 - \int_0^1 A_{q+1}(t) f^{(q+2)}(t)\,\mathrm{d}t,$$

on obtient celle pour $q+1$.

b) Puisque $A_1(0) = -A_1(1) = -\frac{1}{2}$ et pour $k \geqslant 1$, $A_{2k}(1) = A_{2k}(0)$ et $A_{2k+1}(1) = A_{2k+1}(0) = 0$, on en déduit, pour tout $p \geqslant 0$,

$$\underline{f(1) - f(0) = \frac{1}{2}\big(f'(1) + f'(0)\big) - \sum_{j=1}^{p} a_{2j}\Big(f^{(2j)}(1) - f^{(2j)}(0)\Big) - \int_0^1 A_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t)\,\mathrm{d}t}\ .$$

III.B.2) ◇ En appliquant à $f_k(t) = f(k+t)$, on obtient

$$\begin{aligned} f(k+1) - f(k) &= \frac{1}{2}\big(f'(k+1) + f'(k)\big) - \sum_{j=1}^{p} a_{2j}\Big(f^{(2j)}(k+1) - f^{(2j)}(k)\Big) - \int_0^1 A_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t+k)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\big(f'(k+1) + f'(k)\big) - \sum_{j=1}^{p} a_{2j}\Big(f^{(2j)}(k+1) - f^{(2j)}(k)\Big) - \int_k^{k+1} A^*_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

donc, en sommant entre n et N, par télescopage,

$$f(N+1) - f(n) = \sum_{k=n}^{N} f'(k) + \frac{1}{2}\big(f'(N+1) - f'(n)\big) - \sum_{j=1}^{p} a_{2j}\Big(f^{(2j)}(N+1) - f^{(2j)}(n)\Big) - \int_n^{N+1} A^*_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t)\,\mathrm{d}t$$

et, selon les hypothèses, d'une part, $\forall j,\ f^{(j)}(N+1) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$ et d'autre part, en notant ϵ est le signe constant de $f^{(2p+2)}$ sur $[n, +\infty[$, $\forall t \in [n, +\infty[$, $\left|A^*_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t)\right| \leqslant \left\|A_{2p+1}\right\|_\infty^{[0,1]} \epsilon\, f^{(2p+2)}(t)$, avec

$$\int_n^x \left|f^{(2p+2)}(t)\right|\,\mathrm{d}t = \epsilon \int_n^x f^{(2p+2)}(t)\,\mathrm{d}t = f^{(2p+1)}(x) - f^{(2p+1)}(n) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -f^{(2p+1)}(n)$$

ce qui montre l'intégrabilité de $f^{(2p+2)}$ donc de $A^*_{2p+1} f^{(2p+2)}$ sur $[n, +\infty[$. En écrivant

$$\sum_{k=n}^{N} f'(k) = f(N+1) - f(n) - \frac{1}{2}\big(f'(N+1) - f'(n)\big) + \sum_{j=1}^{p} a_{2j}\Big(f^{(2j)}(N+1) - f^{(2j)}(n)\Big) + \int_n^{N+1} A^*_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t)\,\mathrm{d}t$$

ceci montre la convergence de $\sum\limits_{k\geqslant n} f'(k)$ et donne, à la limite,

$$\underline{\sum_{k=n}^{+\infty} f'(k) = f - f(n) + \frac{1}{2} f'(n) - \sum_{j=1}^{p} a_{2j} f^{(2j)}(n) + \int_n^{+\infty} A^*_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t)\,\mathrm{d}t}\ .$$

◇ L'inégalité vue plus haut donne $\left|\int_n^{+\infty} A^*_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left\|A_{2p+1}\right\|_\infty^{[0,1]} \epsilon \int_n^{+\infty} f^{(2p+2)}(t)\,\mathrm{d}t = -\epsilon \left\|A_{2p+1}\right\|_\infty^{[0,1]} f^{(2p+1)}(n)$ donc , avec le résultat de [**A.3.b**] , et vu que le signe du majorant est positif, $\underline{\left|\int_n^{+\infty} A^*_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|a_{2p}|}{2}\left|f^{(2p+1)}(n)\right|}$.

III.B.3) En appliquant la formule ci-dessus à $f(x) = \dfrac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$ au rang $p-1$, ce qui est légitime car, comme on a vu au [**II.B.1**], f est de classe C^∞ sur tout $[n, +\infty[$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f \leqslant 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in$

$\mathbb{R}_+^*$, $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\dfrac{\alpha\cdots(\alpha+n-2)}{x^{\alpha+n-1}}$ du signe de $(-1)^{n-1}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, on obtient $\displaystyle\int_n^{+\infty} A_{2p-1}^*(t) f^{(2p)}(t)\,\mathrm{d}t = O\left(\frac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\right)$.

IV - Complément sur l'erreur

IV.A - ***Encadrement de l'erreur***

IV.A.1) Si $n \equiv 1 \bmod 4$ alors selon [**III.A.3.a**], $A_n \leqslant 0$ sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et $A_n \geqslant 0$ sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Donc, l'inégalité $\forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $g(t) \leqslant g\left(\frac{1}{2}\right)$ implique $\forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $A_n(t)g(t) \geqslant g\left(\frac{1}{2}\right) A_n(t)$. De même, $\forall t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $g(t) \geqslant g\left(\frac{1}{2}\right)$ implique $\forall t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $A_n(t)g(t) \geqslant g\left(\frac{1}{2}\right) A_n(t)$. On a donc $\forall t \in [0,1]$, $A_n(t)g(t) \geqslant g\left(\frac{1}{2}\right) A_n(t)$ donc $\displaystyle\int_0^1 A_n(t)g(t)\,\mathrm{d}t \geqslant g\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^1 A_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$ car $n \geqslant 1$. Le cas $n \equiv 3 \bmod 4$ se traite de même et on peut résumer en $\displaystyle\forall p \in \mathbb{N},\ (-1)^p \int_0^1 A_{2p+1}(t)g(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

IV.A.2) $\diamond$ Par définition (vue au [**II.B.2**]) et d'après [**III.B.3**], on a pour $p \geqslant 1$,

$$\widetilde{S}_{n,2p} = S(\alpha) - R_n(\alpha) - f(n) + \frac{1}{2}f'(n) - \sum_{j=1}^{p} a_{2j} f^{(2j)}(n) = S(\alpha) - \int_n^{+\infty} A_{2p+1}^*(t) f^{(2p+2)}(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Or $\displaystyle\int_n^{+\infty} A_{2p+1}^*(t) f^{(2p+2)}(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=n}^{+\infty}\int_k^{k+1} A_{2p+1}^*(t) f^{(2p+2)}(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=n}^{+\infty}\int_0^1 A_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t+k)\,\mathrm{d}t$ et, en posant, pour $t \in [0,1]$, $g_k(t) = f^{(2p+2)}(t+k)$, on a $g_k'(t) = f^{(2p+3)}(t+k) \geqslant 0$ (voir [**III.B.3**]) donc on peut appliquer [**1**] et on obtient que $\forall k \geqslant n$, $\int_0^1 A_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t+k)\,\mathrm{d}t$ est du signe de $(-1)^p$ et donc $S(\alpha) - \widetilde{S}_{n,2p}$ est également du signe de $(-1)^p$.

Ceci donne donc $\widetilde{S}_{n,4p} \leqslant S(\alpha) \leqslant \widetilde{S}_{n,4p+2}$ et $\widetilde{S}_{n,4p} \leqslant S(\alpha) \leqslant \widetilde{S}_{n,4p-2}$.

$\diamond$ Donc $0 \leqslant S(\alpha) - \widetilde{S}_{n,4p} \leqslant \widetilde{S}_{n,4p+2} - \widetilde{S}_{n,4p} = -a_{4p+2} f^{(4p+2)}(n)$ d'où $\left|S(\alpha) - \widetilde{S}_{n,4p}\right| \leqslant \left|a_{4p+2} f^{(4p+2)}(n)\right|$ et $-a_{4p} f^{(4p)}(n) = \widetilde{S}_{n,4p} - \widetilde{S}_{n,4p-2} \leqslant S(\alpha) - \widetilde{S}_{n,4p-2} \leqslant 0$ d'où $\left|S(\alpha) - \widetilde{S}_{n,4p-2}\right| \leqslant \left|a_{4p} f^{(4p)}(n)\right|$. On a donc traité le cas $q = 2p$ et $q = 2p-1$, donc $\forall q \geqslant 1,\ \left|S(\alpha) - \widetilde{S}_{n,2q}\right| \leqslant \left|a_{2q+2} f^{(2q+2)}(n)\right|$.

IV.A.3) On a donc $\left|S(\alpha) - \widetilde{S}_{100,4}\right| \leqslant \left|a_6 f^{(6)}(100)\right|$. Or $f^{(6)}(x) = (-1)^5 \dfrac{3\times4\times5\times6\times7}{x^8} = -\dfrac{7\times6!}{2\,x^8}$ (voir [**III.B.3**]) donc $\left|S(\alpha) - \widetilde{S}_{100,4}\right| \leqslant \frac{1}{12}10^{-16} < 10^{-17}$.

IV.B - ***Séries de Fourier***

IV.B.1) $\widetilde{A}_p(x+2\pi) = A_p\left(\frac{x}{2\pi} + 1 - \left[\left(\frac{x}{2\pi} + 1\right]\right) = A_p\left(\frac{x}{2\pi} - \left[\left(\frac{x}{2\pi}\right]\right) = \widetilde{A}_p(x)$ car $\forall t$, $[t+1] = [t]+1$.

$\forall x \in [0, 2\pi[$, $\widetilde{A}_p(x) = A_p\left(\frac{x}{2\pi}\right)$ qui se prolonge en une fonction continue sur $[0, 2\pi]$ donc, vue la périodicité, $\widetilde{A}_p \in \mathcal{CM}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

IV.B.2) Erreur d'énoncé: *lire $\widetilde{A}_p(x)$ au lieu de $\widetilde{A}_p(t)$ dans l'intégrande.*

En posant $x = 2\pi\,t$, on a déjà $\displaystyle\widehat{A}_p(n) = \int_0^1 A_p(u)\,\mathrm{e}^{-2i\pi nt}\,\mathrm{d}t$. Si $n = 0$, on a donc $\displaystyle\widehat{A}_p(0) = \int_0^1 A_p(u)\,\mathrm{d}t = 0$ car $p \geqslant 1$. Si $n \neq 0$, on peut écrire $\displaystyle\widehat{A}_p(n) = \int_0^1 A_p(u)\,f^{(p+1)}(t)\,\mathrm{d}t$ en prenant $f(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-2i\pi nt}}{(-2i\pi n)^{p+1}}$ de façon à utiliser la formule du [**III.B.1**]. Comme $A_j(1) = A_j(0)$ pour $j \geqslant 2$ et $f^{(j)}(1) = f^{(j)}(0)$ pour tout j, il vient

$$\widehat{A}_p(n) = (-1)^p \left[0 - (-1)^2 \frac{A_1(1) - A_1(0)}{(-2i\pi n)^p}\right]$$

soit $\underline{\widehat{A}_p(0) = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{Z}^*,\ \widehat{A}_p(n) = -\dfrac{1}{(2i\pi n)^p}}$.

IV.B.3) Comme au [**1**], la restriction de $\widetilde{A}_p$ à $[0, 2\pi[$ se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur $[0, 2\pi]$, donc $\widetilde{A}_p$ est de classe C^∞ par morceaux sur $\mathbb{R}$. De plus, la valeur en 2π de ce prolongement est $A_p(1)$ donc, si $p \geqslant 2$, $\widetilde{A}_p$ est continue sur $\mathbb{R}$ tandis que si $p = 1$, $\widetilde{A}_1(0^+) = -\frac{1}{2}$ et $\widetilde{A}_1(0^-) = \frac{1}{2}$.
Les théorèmes de Dirichlet et de connvergence normale des séries de Fourier donnent donc

$$\left\{\begin{array}{l}\underline{\text{si } p \geqslant 2 \text{, la série de Fourier de } \widetilde{A}_p \text{ converge normalement vers } \widetilde{A}_p \text{ sur } \mathbb{R}}\ ; \\ \underline{\text{si } p = 1 \text{, la série de Fourier de } \widetilde{A}_1 \text{ converge simplement vers } \widetilde{A}_1 \text{ sur } \mathbb{R} \setminus 2\pi.\mathbb{Z} \text{, vers 0 sur } 2\pi.\mathbb{Z}}\ .\end{array}\right.$$

IV.B.4) Pour $p \geqslant 1$, on a donc $\forall x \in \mathbb{R},\ \widetilde{A}_{2p}(x) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(2i\pi n)^{2p}} \left[e^{inx} + e^{-inx}\right]$ et $\widetilde{A}_{2p}(0) = A_{2p}(0) = a_{2p}$ ce qui donne $\underline{a_{2p} = \dfrac{(1)^{p+1}}{2^{2p-1}\pi^{2p}} S(2p)}$.

IV.C - *Comportement de l'erreur*

IV.C.1) Pour $p \geqslant 1$, on a $f^{(2p)}(n) = -\dfrac{\alpha \cdots (\alpha + 2p - 2)}{n^{\alpha+2p-1}}$ et $f^{(2p+2)}(n) = -\dfrac{\alpha \cdots (\alpha + 2p - 2)(\alpha + 2p - 1)(\alpha + 2p)}{n^{\alpha+2p+1}} = \dfrac{(\alpha + 2p - 1)(\alpha + 2p)}{n^2} f^{(2p)}(n)$ et, avec [**B.4**], $\underline{\left|\dfrac{a_{2p+2}f^{(2p+2)}(n)}{a_{2p}f^{(2p)}(n)}\right| = \dfrac{(\alpha + 2p - 1)(\alpha + 2p)\, S(2p + 2)}{4n^2\pi^2\, S(2p)}}$.

IV.C.2) ◇ L'encadrement du [**I.A.3**] montre que $S(\alpha) \xrightarrow[\alpha\to+\infty]{} 1$ donc, à n fixé, $\left|\dfrac{a_{2p+2}f^{(2p+2)}(n)}{a_{2p}f^{(2p)}(n)}\right| \xrightarrow[p\to+\infty]{} +\infty$ et, notamment, il existe p_0 tel que $\forall p \geqslant p_0$, $\left|\dfrac{a_{2p+2}f^{(2p+2)}(n)}{a_{2p}f^{(2p)}(n)}\right| > 1$ et donc dans l'écriture

$$\widetilde{S}_{n,2p} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha} - f(n) + \frac{1}{2} f'(n) - \sum_{j=1}^{p} a_{2j} f^{(2j)}(n)$$

la dernière somme est somme partielle d'une série (alternée) grossièrement divergente.

On en conclut que $\underline{n \text{ étant fixé, la suite } \left(\widetilde{S}_{n,2p}\right)_{p\geqslant 1} \text{ ne converge pas vers } S(\alpha) \text{ quand } p \text{ tend vers } +\infty}$.

◇ Erreur d'énoncé: *《 doit-on》est mal venu qui suggère une condition nécessaire alors qu'il s'agit d'une condition suffisante.*

On choisit p et n pour que la majorant obtenu au [**A.2**] soit le plus petit possible. C'est la méthode de sommation au plus petit terme que Poincaré appelait "méthode des astronomes".

* * *
* *
*