Centrale 2008. Filière MP. Mathématiques 1.

Corrigé pour serveur UPS par JL. Lamard (jean-louis.lamard@prepas.org)

Partie I. Quelques résultats généraux.

Question I.A.

1. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire (homogène) du second ordre normalisée sur $\mathbb{R}$ dont les coefficients sont continus sur $\mathbb{R}$ donc tout problème de Cauchy admet une unique solution définie sur $\mathbb{R}$.
Soit une solution f s'annulant en 0. Envisageons la fonction g définie par $g(x) = -f(-x)$. Il vient $g'(x) = f'(-x)$ et $g''(x) = -f''(-x)$ donc, puisque q est paire, g est également solution de (E_λ).
Or $\big(f(0), f'(0)\big) = \big(0, f'(0)\big) = \big(0, g'(0)\big) = \big(g(0), g'(0)\big)$
Ainsi f et g sont solution du même problème de Cauchy donc $f = g$ ce qui prouve que f est impaire.
Réciproquement toute fonction impaire est nulle en 0.
En conclusion une solution de (E_λ) est impaire si et seulement si elle s'annule en 0. □

2. Les solutions de (E_λ) forment un espace vectoriel de dimension 2.
Soient f_1 et f_2 deux solutions impaires. Alors $W(f_1, f_2)(0) = 0$ car la première ligne de ce déterminant est nul.
Donc (f_1, f_2) n'est pas une système fondamental de solutions.
De même avec deux solutions paires car alors leur dérivée sont impaires et le wronskien s'annule encore en 0 car sa deuxième ligne est nulle.
Ainsi (E_λ) ne peut admettre une base de solutions de même parité. □

Si λ est valeur propre de Q alors le sous-espace propre associé n'est autre que l'ensemble des solutions 2π-périodiques et impaires de (E_λ). C'est donc un sous-espace des solutions de (E_λ). Il est donc de dimension 1 ou 2 (0 exclu car λ valeur propre). S'il était de dimension 2, il serait égal à l'espace des solutions qui admettrait donc un système fondamental de solutions impaires ce qui est exclu comme on vient de le voir.
Ainsi tout sous-espace propre de Q est de dimension 1. □

Question I.B.

1. λ est valeur propre de A si et seulement si l'équation $y'' + (\lambda - a)y = 0$ admet une solution non nulle, impaire et 2π-périodique. Donc si et seulement si $\lambda = a + p^2$ avec $p \in \mathbb{N}^*$. Le sous-espace propre associé est alors la droite dirigée par $x \longmapsto \sin(px)$. □
Idem pour B avec b en place de a.

2. On a : $a \leqslant q(x) \leqslant b$ pour tout réel x donc $af^2(x) - f(x)f''(x) \leqslant q(x)f^2(x) - f(x)f''(x) \leqslant bf^2(x) - f(x)f''(x)$ donc $\Big(f|A(f)\Big) \leqslant \Big(f|Q(f)\Big) \leqslant \Big(f|B(f)\Big)$ pour tout $f \in E_2$ par positivité de l'intégration. □

Partie II. Problème approché de dimension finie.

Question II.A.

1. Π_n existe bien car V_n est de dimension finie (l'orthogonal d'un sous-espace de dimension finie d'un espace préhilbertien est un supplémentaire de ce sous-espace).
Si f appartient à E (ce que l'on suppose ici car l'énoncé omet de le préciser), $\Pi_n(f)$ est la somme partielle de la série de Fourier de f.
$\lim\limits_{n\to+\infty} \|\Pi_n(f)\|_2 = \|f\|_2$ (Parseval) et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f - \Pi_n(f)\|_2 = 0$ (convergence quadratique).

2. Π_n est autoadjoint en tant que projecteur orthogonal. □

3. Soient désormais f et g dans E_2. Pour prouver que $\Big(f|Q(g)\Big) = \Big(Q(f)|g\Big)$ il suffit de prouver que $\Big(f|g''\Big) = \Big(f''|g\Big)$.
Or $\Big(f|g''\Big) = -\Big(f'|g'\Big)$ par parties (bien licite) car $f(0) = 0$ du fait que f est impaire.
D'où le résultat par symétrie des rôles : $\Big(f|Q(g)\Big) = \Big(Q(f)|g\Big) \quad \forall (f,g) \in E_2^2$ □

On suppose maintenant que f et g sont dans V_n (donc a fortiori dans E). Il vient (question 2.) :
$\Big(f|Q_n(g)\Big) = \Big(f|\Pi_n(Q(g)\Big) = \Big(\Pi_n(f)|Q(g)\Big) = \Big(f|Q(g)\Big)$ car $\Pi_n(f) = f$.
De même $\Big(Q_n(f)|g\Big) = \Big(Q(f)|g\Big)$. Donc d'après le début de la question 3. :
$\Big(f|Q_n(g)\Big) = \Big(Q_n(f)|g\Big) \quad \forall (f,g) \in V_n^2$ donc Q_n est bien un endomorphisme symétrique de V_n. □

Question II.B.

1. Soit $f \in V_n$. Il vient :
$\Big(f|A_n(f)\Big) = \Big(\Pi_n(f)|A(f)\Big)$ (question II.A.2.) donc $\Big(f|A_n(f)\Big) = \big(f|A(f)\big)$ car $\Pi_n(f) = f$.
De même $\Big(f|Q_n(f)\Big) = \big(f|Q(f)\big)$ et $\Big(f|B_n(f)\Big) = \big(f|B(f)\big)$.
Donc $\Big(f|A_n(f)\Big) \leqslant \Big(f|Q_n(f)\Big) \leqslant \Big(f|B_n(f)\Big)$ pour tout $f \in V_n$ $\square$

2. Commençons par remarquer que comme Q_n est symétrique, il est orthodiagonalisable.
Ce qui justifie le préambule de la partie II.B.

a. Un vecteur propre f de A_n associé à la valeur propre λ est une fonction de V_n donc de E_2 vérifiant $A(f) = \lambda f$ donc est aussi vecteur propre de A associé à la valeur propre λ et réciproquement.
La question I.B.1. prouve donc que les réels $a + p^2$ avec $1 \leqslant p \leqslant n$ sont valeurs propres de A_n. Comme V_n est de dimension n, on les a toutes.
Les valeurs propres de A_n (resp. B_n) sont les réels $a + p^2$ (resp $b + p^2$) avec $1 \leqslant p \leqslant n$. $\square$

b. Notons $W_k = \text{vect}\,\big(e_{k,n}, \ldots, e_{n,n}\big)$. La question portant sur l'existence d'un vecteur unitaire revient à prouver que $V_k \cap W_k \neq \big\{0\big\}$. Or dim $V_k = k$ et dim $W_k = n - k + 1$. Par ailleurs V_k et W_k sont deux sous-espaces de V_n. Donc leur somme est de dimension au plus n. La formule de Grassman prouve alors que la dimension de l'intersection est au moins 1. $\square$

- Soit f un tel vecteur unitaire. Il s'écrit $f = \sum\limits_{p=1}^{k} \alpha_p s_p = \sum\limits_{q=k}^{n} \beta_q e_{q,n}$ avec $\sum\limits_{p=1}^{k} \alpha_p^2 = \sum\limits_{q=k}^{n} \beta_q^2 = 1$
Il vient $\big(f|Q(f)\big) = \big(\sum\limits_{q=k}^{n} \beta_q e_{q,n}| \sum\limits_{q=k}^{n} \beta_q \lambda_{q,n} e_{q,n}\big) = \sum\limits_{q=k}^{n} \lambda_{q,n}\beta_q^2 \geqslant \lambda_{k,n} \sum\limits_{q=k}^{n} \beta_q^2 = \lambda_{k,n}$ (1)
Par ailleurs comme déjà noté $\big(f|Q(f)\big) \leqslant \big(f|B(f)\big) = \big(f|B_n(f)\big)$ car $f \in V_n$ (2).
Or $\big(f|B_n(f)\big) = \big(\sum\limits_{p=1}^{k} \alpha_p s_p| \sum\limits_{p=1}^{k} \alpha_p (b + p^2) s_p\big) = \sum\limits_{p=1}^{k} \alpha_p^2 (b + p^2) \leqslant (b + k^2) \sum\limits_{p=1}^{k} \alpha_p^2 = b + k^2$ (3)
De (1), (2) et (3) on tire que $\lambda_{k,n} \leqslant b + k^2$.
- On prouve de même par un argument de dimension que vect $\big(e_{1,n}, \ldots, e_{k,n}\big)$ et vect $\big(s_k, \ldots, s_n\big)$ ont une intersection non réduite à 0. En envisageant un vecteur unitaire g de cette intersection, on prouve de la même manière que $a + k^2 \leqslant \big(g|A_n(g)\big) = \big(g|A(g)\big) \leqslant \big(g|Q(g)\big) \leqslant \lambda_{k,n}$
- Ainsi $a + k^2 \leqslant \lambda_{k,n} \leqslant b + k^2$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$. $\square$

c. Soit $f \in V_{n-1}$. Comme déjà noté on a alors $\big(f|Q_{n-1}(f)\big) = \big(f|Q(f)\big)$.
Mais on a a fortiori $f \in V_n$. Donc de même $\big(f|Q_n(f)\big) = \big(f|Q(f)\big)$.
Ainsi $\big(f|Q_{n-1}(f)\big) = \big(f|Q_n(f)\big) = \big(f|Q(f)\big)$ pour $f \in V_{n-1}$. $\square$

- Soit désormais $n \geqslant 2$ fixé et $1 \leqslant k \leqslant n - 1$. Alors comme précédemment par des arguments de dimension dans V_n : vect $\big(e_{1,n-1}, \ldots, e_{k,n-1}\big) \cap$ vect $\big(e_{k,n}, \ldots, e_{n,n}\big)$ n'est pas réduit au vecteur nul donc contient un vecteur unitaire f qui appartient évidemment à V_{n-1}.
En notant $f = \sum\limits_{p=1}^{k} \alpha_p e_{p,n-1}$ et $f = \sum\limits_{q=k}^{n} \beta_q e_{q,n}$ les deux décompositions de f il vient :
$\big(f|Q_{n-1}(f)\big) = \sum\limits_{p=1}^{k} \alpha_p^2 \lambda_{p,n-1} \leqslant \lambda_{k,n-1} \sum\limits_{p=1}^{k} \alpha_p^2 = \lambda_{k,n-1}$
$\big(f|Q_n(f)\big) = \sum\limits_{q=k}^{n} \beta_q^2 \lambda_{q,n} \geqslant \lambda_{k,n} \sum\limits_{q=1}^{n} \beta_q^2 = \lambda_{k,n}$
donc $\lambda_{k,n} \leqslant \big(f|Q_n(f)\big) = \big(f|Q_{n-1}(f)\big) \leqslant \lambda_{k,n-1}$ $\square$

Question II.C.

Compte tenu de la question précédente, pour k fixé, la suite $(\lambda_{k,n})_{n \geqslant k}$ est décroissante. Or $x_{k,n} \in I_k$ pour tout $n \geqslant k$ donc la suite est minorée et donc convergente vers une limite notée λ_k. En outre $\lambda_k \in \overline{I_k} = I_k$.
On a pour tout $n \geqslant k + 1$: $\lambda_{k,n} \leqslant \lambda_{k+1,n}$ d'où par passage à la limite lorsque $n \to +\infty$ (licite vu la convergence) il vient $\lambda_k \leqslant \lambda_{k+1}$ en d'autres termes la suite (λ_k) est croissante. $\square$

Partie III. Une suite de valeurs propres de Q.

Question III.A.

1. Dans la suite on notera le plus souvent y, r et θ en place de y_λ, r_λ et θ_λ pour alléger les notations.
La fonction complexe $z = \dfrac{y'}{\sqrt{\lambda}} + iy$ est définie sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ et ne s'annule jamais. En effet sinon il existerait un réel x_0 en lequel on aurait $y(x_0) = y'(x_0) = 0$ et ainsi (théorème de Cauchy-Lipschitz) y serait identiquement nulle. La fonction $r = |z|$ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule jamais. Le théorème de relèvement $\mathcal{C}^1$ appliqué à la fonction $\dfrac{z}{r}$ fournit alors le résultat demandé (on sait que la fonction θ est définie à 2π près et comme on doit avoir $\cos\big(\theta(0)\big) = 1$ on peut choisir celle telle que $\theta(0) = 0$) $\square$

2. De $y' = \sqrt{\lambda}\, r\cos\theta$ on tire $y'' = \sqrt{\lambda}\big(r'\cos\theta - r\sin\theta.\theta'\big)$.
Or $y'' = (q-\lambda)y = (q-\lambda)r\sin\theta$ donc $(q-\lambda)r\sin\theta = \sqrt{\lambda}\big(r'\cos\theta - r\sin\theta.\theta'\big)$ (1).
Par ailleurs $y = r\sin\theta$ donc $y' = r'\sin\theta + r\cos\theta.\theta'$ donc $\sqrt{\lambda}\, r\cos\theta = r'\sin\theta + r\cos\theta.\theta'$ (2).
En considérant $-\sin(\theta)\times(1) + \sqrt{\lambda}\cos\theta\times(2)$ et en simplifiant par r qui ne s'annule jamais (Cf précédemment), il vient que : $\theta' = \sqrt{\lambda} - \dfrac{q}{\sqrt{\lambda}}\sin^2\theta$. Comme en outre $\theta(0) = 0$:
θ est la solution maximale (car définie sur $\mathbb{R}$) du problème de Cauchy (T_λ). $\square$

3. En envisageant cette fois $\cos\theta\times(1) + \sqrt{\lambda}\sin\theta\times(2)$ il vient : $r' = \dfrac{q\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{\lambda}}\, r$. $\square$

Question III.B.

1. La fonction $t \longmapsto \theta(t)$ étant de classe $\mathcal{C}^1$, le théorème de représentation $\mathcal{C}^1$ fournit :
$\theta(t) - \theta(0) - \sqrt{\lambda}\, t = -\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\displaystyle\int_0^t q(x)\sin^2\big(\theta(x)\big)\,\mathrm{d}\,x$. Or $\theta(0) = 0$.

Donc pour $t \geqslant 0$: $\quad \big|\theta(t) - \sqrt{\lambda}\, t\big| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\displaystyle\int_0^t |q(x)|\,\mathrm{d}\,x \leqslant \dfrac{\|q\|_\infty}{\sqrt{\lambda}}\, t$ $\square$

Par ailleurs l'inégalité des accroissements finis fournit $|\cos(2b) - \cos(2a)| \leqslant 2|b-a|$ pour tout couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$
Donc $\big|\cos\big(2\theta(t)\big) - \cos\big(2\sqrt{\lambda}\, t\big)\big| \leqslant \dfrac{2\|q\|_\infty}{\sqrt{\lambda}}\, t$ pour $t \geqslant 0$. $\square$

2. En utilisant que $\theta' = \sqrt{\lambda} - \dfrac{q}{2\sqrt{\lambda}}\big(1 - \cos(2\theta)\big)$, il vient de même :

$$\theta(2\pi) - 2\pi\sqrt{\lambda} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\int_0^{2\pi} q(t)\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\int_0^{2\pi} q(t)\cos\big(2\theta(t)\big)\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\int_0^{2\pi} q(t)\Big(\cos\big(2\sqrt{\lambda}\, t\big) + \alpha(t)\Big)\,\mathrm{d}\,t \quad (1)$$

avec $|\alpha(t)| \leqslant \dfrac{2\|q\|_\infty}{\sqrt{\lambda}}\, t$ compte tenu de la question précédente.

Ainsi $\dfrac{1}{2\sqrt{\lambda}}\Big|\displaystyle\int_0^{2\pi}\alpha(t)\,\mathrm{d}\,t\Big| \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{\lambda}}\displaystyle\int_0^{2\pi}|\alpha(t)|\,\mathrm{d}\,t \leqslant \dfrac{\|q\|_\infty}{\lambda}\displaystyle\int_0^{2\pi} t\,\mathrm{d}\,t = \dfrac{2\pi^2\|q\|_\infty}{\lambda}$.
L'égalité (1) ci-dessus fournit alors :

$$\Big|\theta(2\pi) - 2\pi\sqrt{\lambda} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\int_0^{2\pi} q(t)\,\mathrm{d}\,t - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\int_0^{2\pi} q(t)\cos\big(2\sqrt{\lambda} t\ t\big)\,\mathrm{d}\,t\Big| \leqslant \frac{2\pi^2\|q\|_\infty}{\lambda} \quad \square$$

3. Ainsi peut-on écrire, pour λ au voisinage de $+\infty$ que :

$$\theta(\lambda, 2\pi) = 2\pi\sqrt{\lambda} - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\int_0^{2\pi} q(t)\,\mathrm{d}\,t + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\int_0^{2\pi} q(t)\cos\big(2\sqrt{\lambda} t\ t\big)\,\mathrm{d}\,t + O\Big(\frac{1}{\lambda}\Big).$$

Or d'après le théorème de Lebesgue (démonstration immédiate par intégration par parties licite car q est $\mathcal{C}^1$) $\displaystyle\int_0^{2\pi} q(t)\cos\big(2\sqrt{\lambda} t\ t\big)\,\mathrm{d}\,t \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0$ donc

$$\theta(\lambda, 2\pi) = 2\pi\sqrt{\lambda} - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\int_0^{2\pi} q(t)\,\mathrm{d}\,t + o\Big(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\Big) + O\Big(\frac{1}{\lambda}\Big) = 2\pi\sqrt{\lambda} - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\int_0^{2\pi} q(t)\,\mathrm{d}\,t + o\Big(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\Big)$$

Ainsi $\theta(\lambda, 2\pi) = 2\pi\sqrt{\lambda}\Big(1 - \dfrac{1}{4\pi\lambda}\displaystyle\int_0^{2\pi} q(t)\,\mathrm{d}\,t + o\big(\dfrac{1}{\lambda}\big)\Big)$ $\square$

4.

a. La question précédente prouve évidemment que $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty}\theta(\lambda, 2\pi) = +\infty$.
En particulier il existe λ_0 tel que $\theta(\lambda_0, 2\pi) = \theta_0 > 0$. Soit alors un entier $k_0 > 0$ tel que $2k_0\pi \geqslant \theta_0$.
Le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction $\lambda \longmapsto \theta(\lambda, 2\pi)$ (supposée continue) entre λ_0 et $+\infty$ montre qu'il existe un réel μ_{k_0} tel que $\theta(\mu_{k_0}, 2\pi) = 2k_0\pi$.

Le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à cette même fonction mais cette fois entre μ_{k_0} et $+\infty$ montre qu'il existe un réel $\mu_{k_0+1} > \mu_{k_0}$ tel que $\theta(\mu_{k_0+1}, 2\pi) = 2(k_0+1)\pi$.
L'itération est claire.
Ainsi il existe un entier $k_0 > 0$ et une suite $(\mu_k)_{k \geqslant k_0}$ strictement croissante de réels strictement positifs telle que $\theta(\mu_k, 2\pi) = 2k\pi$. □

b. Si la suite (μ_k) était majorée (mettons par a) alors on aurait $\theta(\mu_k, 2\pi) \leqslant M$ pour tout $k \geqslant k_0$ avec $M = \sup\limits_{\lambda\in[0,a]} \theta(\lambda, 2\pi)$ (qui existe bien vu la continuité). Impossible puisque $\theta(\mu_k, 2\pi) = 2k\pi$.
Donc $\lim\limits_{k\to+\infty} \mu_k = +\infty$ (suite croissante non majorée).
Ainsi pour k au voisinage de $+\infty$, on peut écrire d'après la question III.B.3., (avec $\lambda = \mu_k$) :
$k = \sqrt{\mu_k}\Big(1 - \dfrac{1}{4\pi\mu_k}\displaystyle\int_0^{2\pi} q(t)\,\mathrm{d}\,t + o(\frac{1}{\mu_k})\Big)$ (1).
Or $\Big(1 - \dfrac{1}{4\pi\mu_k}\displaystyle\int_0^{2\pi} q(t)\,\mathrm{d}\,t + o(\frac{1}{\mu_k})\Big)^2 = 1 - \dfrac{1}{2\pi\mu_k}\displaystyle\int_0^{2\pi} q(t)\,\mathrm{d}\,t + o(\frac{1}{\mu_k})$
En élevant au carré la relation (1) ci-dessus, il vient $k^2 = \mu_k - \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} q(t)\,\mathrm{d}\,t + o(1)$ soit :
$\lim\limits_{k\to+\infty} (\mu_k - k^2) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} q(t)\,\mathrm{d}\,t$ □

Question III.C.

1. On vérifie immédiatement que la fonction $\varphi : x \longmapsto -\theta(-x)$ est solution (maximale car définie sur $\mathbb{R}$) de l'équation différentielle (T_λ) puisque q est paire. En outre elle vérifie la condition initiale $\varphi(0) = 0$. Donc $\varphi = \theta$ d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz. □
Notons que cela est valable pour tout $\lambda > 0$ car on n'a pas utilisé que λ était tel que $\theta_\lambda(2\pi) = 2k\pi$.

Supposons désormais que $\theta(2\pi) = 2k\pi$. Soit la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par $\psi(x) = \theta(x+2\pi) - 2k\pi$.
Comme q et $\sin^2$ sont 2π-périodiques, il vient, en écrivant que θ satisfait l'équation différentielle (T_λ) en $x + 2\pi$, que ψ satisfait l'équation (T_λ). Or $\psi(0) = \theta(2\pi) - 2k\pi = 0$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz prouve alors que $\psi = \theta$.
Ainsi si $\theta(\lambda, 2\pi) = 2k\pi$ alors $\theta(\lambda, x+2\pi) = \theta(\lambda, x) + 2k\pi$ □

2. Si u est 2π-périodique, alors $\displaystyle\int_x^{x+2\pi} u(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_{-\pi}^{\pi} u(t)\,\mathrm{d}\,t = 0$ si en outre u est impaire.
Il en découle immédiatement que $x \longmapsto \exp\Big(\displaystyle\int_0^x u(t)\,\mathrm{d}\,t\Big)$ est 2π-périodique. □
On peut aussi remarquer que cette fonction est paire.
D'après la question III.A.3. on a $r(x) = r(0)\exp\Big(\displaystyle\int_0^x u(t)\,\mathrm{d}\,t\Big)$ avec $u(t) = \dfrac{q(t)\cos\big(\theta(t)\big)\sin\big(\theta(t)\big)}{\sqrt{\lambda}}$ et u est impaire et 2π-périodique d'après la question III.C.1.
Ainsi r est une fonction paire et 2π-périodique. □

3. Il en découle immédiatement que $y(x) = r(x)\sin\big(\theta(x)\big)$ est impaire et 2π-périodique donc est vecteur propre (car non nulle) de Q associé à la valeur propre λ. □

4. Il en résulte que la suite $(\mu_k)_{k\geqslant k_0}$ est une suite (strictement croissante) de valeurs propres de Q. □

Partie IV. Valeurs propres de Q.

Question IV.A.

1

a. Quitte à considérer $\pm\dfrac{y_n}{\|y_n\|_2}$ on peut parfaitement supposer y_n unitaire et tel que $y_n'(0) \geqslant 0$. □

b. On a $Q_n(y_n) = \Pi_n\big(-y_n'' + qy_n\big) = -y_n'' + \Pi_n(qy_n)$ car $y_n \in V_n$ qui est stable par dérivation. □
Donc $\|Q(y_n) - \alpha_n y_n\|_2 = \|Q(y_n) - Q_n(y_n)\|_2 = \|qy_n - \Pi_n(qy_n)\|_2$ □

c. La décomposition de y_n sur la base orthonormée $\big(s_m\big)_{m=1...n}$ de V_n étant $y_n = \sum\limits_{m=1}^{n} b_m(y_n)s_m$, il vient $qy_n = \sum\limits_{m=1}^{n} b_m(y_n)qs_m$ d'où la formule proposée. □

d. Il en découle immédiatement par inégalité tringulaire que $\|Q(y_n) - \alpha_n y_n\|_2 \leqslant \sum\limits_{m=1}^{n} |b_m(y_n)|r_{m,n}$
Par Pythagore on a bien sûr $r_{m,n} \leqslant \|qs_m\|_2$ et $\|qs_m\|_2^2 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} q^2(t)\sin^2(mt)\,\mathrm{d}\,t \leqslant \dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} q^2(t)\,\mathrm{d}\,t = \|q\|_2^2$ □

e. On a d'une part $Q_n(y_n) = \alpha_n y_n = \sum\limits_{m=1}^{n} \alpha_n b_m(y_n) s_m$ (1). Par ailleurs :
$Q_n(y_n) = \Pi_n(-y_n'' + q y_n) = -y_n'' + \Pi_n(q y_n) = \sum\limits_{m=1}^{n} m^2 b_m(y_n) s_m + \sum\limits_{m=1}^{n} b_m(q y_n) s_m$ (2)
Par unicité de la décomposition sur la base des (s_m) de V_n il vient :
$m^2 b_m(y_n) + b_m(q y_n) - \alpha_n b_m(y_n) = 0$ □

f. On a, par Cauchy-Schwarz, $|b_m(y_n)| = |(y_n|s_m)| \leqslant \|y_n\|_2.\|s_m\|_2 = 1$ et de l'inégalité ci-dessus on tire :
$m^2 |b_m(y_n)| \leqslant |b_m(q y_n)| + |\alpha_n|$
Or, toujours par Cauchy-Schwarz, $|b_m(q y_n)| \leqslant \|q y_n\|_2$ donc $|b_m(q y_n)| \leqslant \|q\|_2$ d'après la question d. ci-dessus.
Ainsi $m^2 |b_m(y_n)| \leqslant K$ avec $K = \|q\|_2 + C$ □

g. Pour prouver que $\lim\limits_{n \to +\infty} \|Q(y_n) - \alpha_n y_n\|_2 = 0$ il suffit de prouver, d'après la question d. ci-dessus, que :
$\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{m=0}^{n} |b_m(y_n)| r_{m,n} = 0$.
Or, pour $n \geqslant m \geqslant 1$, on a d'après les questions d. et f. : $|b_m(y_n)| r_{m,n} \leqslant \dfrac{K\|q\|_2}{m^2} = \dfrac{C}{m^2}$
D'après le résultat du préliminaire, il suffit donc pour conclure de prouver que $\lim\limits_{n \to +\infty} |b_m(y_n)| r_{m,n} = 0 \quad \forall m \geqslant 1$
Or $|b_m(y_n)| = |\big(s_m|y_n\big) \leqslant 1$ par l'inégalité de Schwarz et $r_{m,n} = \|q s_m - \Pi_n(q s_m)\|_2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ (rappel de cours II.A.1) car la fonction $q s_m$ est bien un élément de E puisque q est paire. Ce qui établit le résultat. □

2.

a. On a $q_n(y_n) - \alpha_n y_n = 0$ de sorte que :
$\|z_n\|_2 = \|Q(y_n) - Q_n(y_n) + (\alpha_n - \alpha) y_n\|_2 \leqslant \|Q(y_n) - \Pi_n(Q(y_n))\|_2 + |\alpha_n - \alpha| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ □

b. W est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $W' = u v'' - u'' v = u \times (q - \alpha) v - (q - \alpha) u \times v = 0$. Or $W(0) = 1$. □

c. On a $y_n'' - q y_n = -Q(y_n) = -\alpha y_n - z_n$ donc $y_n'' + (\alpha - q) y_n = -z_n$ ce qui permet de voir y_n comme solution de l'équation différentielle $y'' + (\alpha - q) y = -z_n$.
La méhode de la variation des constantes nous assure l'existence de deux fonctions a et b de classe $\mathcal{C}^2$ telles que $y_n = a u + b v$ et ces deux fonctions vérifient le système :
$$\begin{cases} u \ a' + v \ b' = 0 \\ u' \ a' + v' \ b' = -z_n \end{cases}$$
Comme le wronskien vaut constamment 1, les formules de Cramer fournissent $a' = v z_n$ et $b' = -u z_n$.
Il en découle l'existence de deux constantes C_1 et C_2 telles que :
$$y_n(x) = C_1 u(x) + C_2 v(x) + u(x) \int_0^x v(t) z_n(t) \, \mathrm{d}\, t - v(x) \int_0^x u(t) z_n(t) \, \mathrm{d}\, t$$
Les conditions initiales ($y_n(0) = 0$ et $y_n'(0)$) fournissent :
$$y_n(x) = y_n'(0) v(x) + u(x) \int_0^x v(t) z_n(t) \, \mathrm{d}\, t - v(x) \int_0^x u(t) z_n(t) \, \mathrm{d}\, t = y_n'(0) v(x) + \int_0^x K(x,t) z_n(t) \, \mathrm{d}\, t$$
avec $K(x,t) = u(x) v(t) - u(t) v(x)$ qui est bien continue (et même $\mathcal{C}^2$) sur $\mathbb{R}^2$. □

d. Pour prouver que la suite (f_n) converge localement uniformément vers 0, il suffit de prouver qu'elle converge uniformément vers 0 sur tout segment de la forme $[-2p\pi, 2p\pi]$ avec $p \in \mathbb{N}^*$.
Soient J un tel segment et $M = \operatorname{Sup}\limits_{(x,t) \in J^2} |K(x,t)|$ qui existe bien vu la continuité de K.
L'inégalité de Cauchy-Schwarz fournit pour $x \in J$:
$$|f_n(x)| \leqslant \sqrt{\left| \int_0^x K^2(x,t) \, \mathrm{d}\, t \right|} \times \sqrt{\left| \int_0^x z_n^2(t) \, \mathrm{d}\, t \right|} \leqslant \sqrt{2p\pi} M \times \sqrt{p \int_0^{2\pi} z_n^2(t) \, \mathrm{d}\, t} \text{ car } z_n^2 \text{ est } 2\pi\text{-périodique.}$$
D'où $|f_n(x)| \leqslant \sqrt{2p\pi} M \times \sqrt{p\pi} \|z_n\|_2 = C^{\text{ste}} \|z_n\|_2$ et le résultat puisque $\|z_n\|_2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. □

e. Il vient $\displaystyle\int_0^{2\pi} \big(y_n(x) - y_n'(0) v(x)\big)^2 \, \mathrm{d}\, x = \int_0^{2\pi} f_n^2(x) \, \mathrm{d}\, x \leqslant 2\pi \Big(\operatorname{Sup}_{[0,2\pi]} |f_n(x)| \Big)^2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ d'après ci-dessus.
Ainsi $\|y_n - y_n'(0) v\|_2$ tend vers 0 donc a fortiori (inégalité triangulaire "de gauche") $\Big| \|y_n\|_2 - \|y_n'(0) v\|_2 \Big|$.
Or $\|y_n\| = 1$ d'où $|y_n'(0)|.\|v\|_2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ donc $y_n'(0) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \dfrac{1}{\|v\|_2}$ puisque $y_n'(0) \geqslant 0$. □

f. Puisque la suite numérique $\big(y_n(0)\big)$ converge vers $\dfrac{1}{\|v\|_2}$, il est immédiat que la suite de fonctions $\big(y_n'(0) v\big)$ converge localement uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $\dfrac{v}{\|v\|_2}$. Or $y_n = y_n'(0) v + f_n$ et la suite (f_n) converge localement uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle. Donc la suite $\big(y_n\big)$ converge localement uniformément vers $\dfrac{v}{\|v\|_2}$ □

On en déduit évidemment (mais la seule convergence simple eût suffit pour cela) que v est impaire et 2π-périodique donc est élément de E. Ce qui revient à dire que c'est un vecteur propre de Q et donc que α est valeur propre de Q (car $v \neq 0$). $\square$

Question IV.B.

1. Soient $p \neq q$. Les suites $\big(e_{p,n}\big)_{n \geqslant p}$ et $\big(e_{q,n}\big)_{n \geqslant q}$ convergent uniformément sur $[0, 2\pi]$ vers e_p et e_q c'est à dire pour la norme uniforme sur $[0, 2\pi]$ qui est plus fine que la norme quadratique. Donc a fortiori on a la même convergence pour la norme quadratique. Comme le produit scalaire est continu (Schwarz) pour cette norme, il vient $\big(e_p|e_q\big) = \lim\limits_{n\to+\infty} \big(e_{p,n}|e_{q,n}\big) = \lim\limits_{n\to 0} 0 = 0$. Ainsi la famille $\big(e_k\big)_{k\geqslant 1}$ est-elle orthonormale. $\square$

Supposons $\lambda_p = \lambda_{p+1}$. Alors e_p et e_{p+1} sont deux vecteurs propres attachés à la même valeur propre. Or les sous-espaces propres de Q sont de dimension 1 (question I.A.2.). Il en résulte que e_p et e_{p+1} sont deux vecteurs unitaires colinéaires. Contradiction avec le fait qu'ils sont orthogonaux. Ainsi la suite $\big(\lambda_p\big)$ que l'on savait déjà croissante est-elle strictement croissante. $\square$

2.

a. Écrivons la relation (1) avec $y_n = e_{k,n}$ et $\alpha_n = \lambda_{k,n}$ ce qui est bien licite car $e_{k,n}$ est bien un vecteur propre unitaire de Q_n attaché à la valeur propre $\lambda_{k,n}$. Cela fournit $(\lambda_{k,n} - m^2)b_m(e_{k,n}) = b_m(qe_{k,n})$.
Or $\lambda_{k,n} \geqslant k^2 + a$. Donc pour $k^2 + a > m^2$ il vient :
$|\big(s_m|e_{k,n}\big)| = |b_m(e_{k,n})| = \dfrac{|b_m(qe_{k,n})|}{\lambda_{k,n} - m^2} \leqslant \dfrac{|b_m(qe_{k,n})|}{k^2 + a - m^2}$
Or $|b_m(qe_{k,n})| = \dfrac{1}{\pi}\left|\displaystyle\int_0^{2\pi} s_m(t)q(t)e_{k,n}(t)\,\mathrm{d}\,t\right| = |\big(s_mq|e_{k,n}\big)| \leqslant \|s_mq\|_2 \times \|e_{k,n}\|_2 = \|s_mq\|_2 \leqslant \|q\|_2$ (Cf IV.A.1.d.)
Donc $|\big(s_m|e_{k,n}\big)| \leqslant \dfrac{\|q\|_2}{k^2 + a - m^2}$ pour $k \leqslant n$ et $k^2 + a > m^2$ $\square$

b. Envisageons pour $1 \leqslant k \leqslant n$ la famille $\big(x_{k,n}\big)$ avec $x_{k,n} = \big(e_{k,n}|s_m\big)$.
On a $\lim\limits_{n\to+\infty} e_{k,n} = e_k$ pour la norma quadratique (Cf précédemment) donc par continuité du produit scalaire $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{k,n} = x_k$ avec $x_k = \big(e_k|s_m\big)$.
En outre $x_{k,n} = O(\dfrac{1}{k^2})$ par la question précédente.

Le préliminaire permet alors d'affirmer que la série $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} x_k$ converge et a pour somme $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} x_{k,n}$.
Or $\sum\limits_{k=1}^{n} x_{k,n} = \|s_m\|_2^2 = 1$ car $\big(e_{k,n}\big)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est une base orthonormée de V_n qui contient s_m.
Ainsi $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \big(e_k|s_m\big)^2 = 1.$ $\square$

Il en résulte que :
$\|s_m - \sum\limits_{k=1}^{n} \big(e_k|s_m\big)e_k\|^2 = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \big(e_k|s_m\big)^2 - 2\sum\limits_{k=1}^{n} \big(e_k|s_m\big)^2 = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \big(e_k|s_m\big)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \|s_m - \sum\limits_{k=1}^{n} \big(e_k|s_m\big)e_k\|_2 = 0$ $\square$

3. Soit f orthogonale à tous les e_k et soit m fixé quelconque. Notons $g_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \big(e_k|s_m\big)e_k$. D'après la question précédente la suite (g_n) converge vers s_m pour la norme quadratique. Donc $\big(g_n|f\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \big(s_m|f\big)$. Or $\big(g_n|f\big) = 0$.
Donc $\big(s_m|f\big) = 0$. Ainsi tous les coefficients de Fourier sont nuls ce qui prouve par Parseval que $f = 0$.
Ainsi la famille $\big(e_k\big)$ est totale dans E. $\square$

4. Supposons l'existence d'une valeur propre λ différente des λ_k. Soit e un vecteur propre unitaire associé. En raison de la symétrie de Q établie en II.A.3., il vient pour tout k :
$0 = \big(Q(e)|e_k\big) - \big(e|Q(e_k)\big) = (\lambda - \lambda_k).\big(e|e_k\big)$ donc $\big(e|e_k\big) = 0$ donc $e = 0$ par la question précédente ce qui est absurde.
Ainsi les valeurs propres de Q sont exactement les éléments de la suite strictement croissante $\big(\lambda_k\big)$. Chaque sous-espace propre est de dimension 1 et on dispose d'une famille $\big(e_k\big)$ orthonormale et totale de vecteurs propres.

Partie V. Comportement asymptotique.

1. $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} q(t)\,\mathrm{d}\,t - a = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \big(q(t)-a\big)\,\mathrm{d}\,t > 0$ car $q(t)-a$ est positive, continue et strictement positive en au moins un point puisque q n'est pas constante. Idem pour l'autre inégalité. $\square$

2.

a. $\lim\limits_{k\to+\infty} \big((k+1)^2+a\big)-\big(k^2+b\big) = +\infty$ donc est strictement positif à partir d'un certain rang.
Ainsi $I_k \cap I_{k+1} = \varnothing$ pour $k \geqslant k_1$. $\square$

b. D'après III.B.4.b. et la question 1. ci-dessus on a $\lim\limits_{k\to+\infty}(\mu_k - k^2) \in]a,b[$.
Donc pour k assez grand on a $\mu_k \in]k^2+a, k^2+b[$ et en particulier $\mu_k \in I_k$
Ainsi μ_k est une valeur propre de Q qui appartient à I_k.
Or pour k assez grand I_k ne contient qu'une valeur propre qui est λ_k. En effet les valeurs propres sont exactement les éléments de la suite $\big(\lambda_k\big)$, λ_k appartient à I_k et $I_k \cap I_{k+1}$ est vide pour k assez grand.
Donc $\mu_k = \lambda_k$ pour k assez grand. $\square$

Comme (question III.B.4.b.) $\lim\limits_{k\to+\infty}(\mu_k - k^2) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} q(t)\,\mathrm{d}\,t$ on a immédiatement :

$\lambda_k = k^2 + \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} q(t)\,\mathrm{d}\,t + o(1)$. $\square$

FIN