Concours Centrale-Supélec 2005

Epreuve : Mathématiques II

Corrigé

Partie I

IA1) $*$ $N_\infty(A)=0 \Longrightarrow \forall i\in[1,n],\ \sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|=0$. D'où $\forall i\in[1,n]$, $\forall j\in[1,n]$: $|a_{i,j}|=0$ et donc $A=0$.

$*$ $\forall\lambda\in\mathbf{C}$ $\forall i\in[1,n]$, $\sum_{j=1}^{n}|\lambda a_{i,j}|\le|\lambda|N_\infty(A)$, donc $N_\infty(\lambda A)\le|\lambda|N_\infty(A)$

Si $\lambda\neq0$, $N_\infty(A)=N_\infty(\frac{1}{\lambda}\lambda A)\le|\frac{1}{\lambda}|N_\infty(\lambda A)$, donc $|\lambda|N_\infty(A)\le N_\infty(\lambda A)$, d'où l'égalité : $|\lambda|N_\infty(A)=N_\infty(\lambda A)$

Si $\lambda=0$, l'égalité est triviale.

$*$ $\forall i\in[1,n]$, $\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}+b_{i,j}|\le\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|+\sum_{j=1}^{n}|b_{i,j}|\le N_\infty(A)+N_\infty(B)$, donc $N_\infty(A+B)\le N_\infty(A)+N_\infty(B)$.

Conclusion: $\boxed{N_\infty \text{ est une norme sur } M_n(\mathbf{C})}$

IA2a) $A(z)=\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{1,j}z_j|,\dots,\sum_{j=1}^{n}|a_{n,j}z_j|\right)$

Donc pour tout $i\in[1,n]$, $\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}z_j|\le\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\|z\|_\infty\le N_\infty(A)\|z\|_\infty$.

D'où $\boxed{\|A(z)\|_\infty\le N_\infty(A)\|z\|_\infty}$.

IA2b) $\forall z\in\mathbf{C}^n-\{0\}$, $\frac{\|A(z)\|_\infty}{\|z\|_\infty}\le N_\infty(A)$ donc $N_\infty(A)$ majore l'ensemble des réels $\frac{\|A(z)\|_\infty}{\|z\|_\infty}$. Soit $i_0\in[1,n]$ tel que $N_\infty(A)=\sum_{j=1}^{n}|a_{i_0,j}|$ et soit $z_0=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ tel que $\varepsilon_j=1$ si $a_{i_0,j}=0$ et $\varepsilon_j=\frac{|a_{i_0,j}|}{a_{i_0,j}}$ sinon. On a alors

$N_\infty(A)=\sum_{j=1}^{n}a_{i_0,j}\varepsilon_j$, $A(z_0)=\left(\sum_{j=1}^{n}a_{1,j}\varepsilon_j,\dots,\sum_{j=1}^{n}a_{n,j}\varepsilon_j\right)$ et donc $\|A(z_0)\|_\infty=\sum_{j=1}^{n}|a_{i_0,j}|$.

Comme $\|z_0\|_\infty=max(1,\dots,1)=1$, on a donc : $\frac{\|A(z_0)\|_\infty}{\|z_0\|_\infty}=N_\infty(A)$

Conclusion: $\boxed{N_\infty(A)=\max\frac{\|A(z)\|_\infty}{\|z\|_\infty}}$

IA2c) Soit $\lambda_0\in\sigma_A$ tel que $\rho(A)=|\lambda_0|$ et z_0 un vecteur propre tel que $A(z_0)=\lambda_0z_0$, on a alors $\frac{\|A(z_0)\|_\infty}{\|z_0\|_\infty}=\frac{\|\lambda_0z_0\|_\infty}{\|z_0\|_\infty}=|\lambda_0|=\rho(A)\le N_\infty(A)$.

Conclusion: $\boxed{\rho(A)\le N_\infty(A)}$.

IA3) N_∞ est une norme subordonnée à la norme $\|_\infty$ sur $\mathbf{C}^n$, c'est donc une norme d'algèbre et vérifie donc : $\boxed{N_\infty(AB)\le N_\infty(A)N_\infty(B)}$.

Remarque : On peut aussi redémontrer ceci : pour tout z non nul, $\frac{\|AB(z)\|_\infty}{\|z\|_\infty}\le\frac{N_\infty(A)\|B(z)\|_\infty}{\|z\|_\infty}\le N_\infty(A)N_\infty(B)$ et on retrouve $N_\infty(AB)\le N_\infty(A)N_\infty(B)$.

IA4a) $*$ $N_Q(A)=0$ implique $Q^{-1}AQ=0$ ce qui implique que $A=Q0Q^{-1}=0$

$*$ $N_Q(\lambda A)=N_\infty(Q^{-1}\lambda AQ)=|\lambda|N_Q(A)$

$*$ $N_Q(A+B)=N_\infty(Q^{-1}(A+B)Q)=N_\infty(Q^{-1}AQ+Q^{-1}BQ)\le N_\infty(Q^{-1}AQ)+N_\infty(Q^{-1}BQ)=N_Q(A)+N_Q(B)$.

On en déduit que N_Q est une norme.

Enfin $N_Q(AB)=N_\infty(Q^{-1}(AB)Q)=N_\infty(Q^{-1}AQQ^{-1}BQ)\le N_\infty(Q^{-1}AQ)N_\infty(Q^{-1}BQ)=N_Q(A)N_Q(B)$

Conclusion: $\boxed{N_Q \text{ est une norme matricielle}}$.

IA4b) Toutes les normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ sont équivalentes donc il existe $\alpha>0$ et $\beta>0$ tels que $N_\infty\le\alpha N_Q$ et $N_Q\le\beta N_\infty$, donc pour tout A, $\frac{1}{\alpha}N_\infty(A)\le N_Q(A)\le\beta N_\infty(A)$.

Si $\beta \leq \alpha$, on a $\frac{1}{\alpha}N_\infty(A) \leq N_Q(A) \leq \beta N_\infty(A) \leq \alpha N_\infty(A)$ et $C_Q = \alpha$ convient.

Sinon on a $\frac{1}{\beta} \leq \frac{1}{\alpha}$ et donc $\frac{1}{\beta}N_\infty(A) \leq \frac{1}{\alpha}N_\infty(A) \leq N_Q(A) \leq \beta N_\infty(A)$ et $C_Q = \beta$ convient.

IB) On a facilement $D_S^{-1}TD_S = \begin{pmatrix} t_{1,1} & t_{1,2}s & t_{1,3}s^2 & \cdots & t_{1,n}s^{n-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & t_{n-2,n}s^2 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & t_{n-1,n}s \\ 0 & ... & ... & 0 & t_{n,n} \end{pmatrix}$

D'où $N_{D_S}(T) = N_\infty(D_S^{-1}TD_S) = \max_i(|t_{i,i}| + P_i(|s|))$ où $P_i = \sum_{j=i+1}^{n} |t_{i,j}|s^{j-i}$ est un polynôme de degré au plus $n-1$ qui vérifie $P_i(0) = 0$. On en déduit qu'il existe s_0 tel que pour tout $i \in [1,n]$, $|P_i(s_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Donc pout tout $i \in [1,n]$, $|t_{i,i}| + P_i(|s_0|) \leq \rho(T) + \frac{\varepsilon}{2}$, car les valeurs propres de T sont les $t_{i,i}$ d'où on conclut :

Conclusion: $\boxed{N_{D_S}(T) \leq \rho(T) + \frac{\varepsilon}{2} < \rho(T) + \varepsilon}$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ alors A est trigonalisable (car son polynôme caractéristique est scindé) donc il existe une matrice triangulaire supérieure T et une matrice inversible Q tel que $A = QTQ^{-1}$. D'autre part il existe $s \in \mathbf{C}^n$ tel que $N_{D_S}(T) < \rho(T) + \varepsilon$. Or $\rho(T) = \rho(A)$ et $N_{D_S}(T) = N_\infty(D_S^{-1}TD_S) = N_\infty(D_S^{-1}Q^{-1}AQD_S) = N_{QD_S}(A)$. Posons donc $N_\varepsilon = N_{QD_S}$, on a alors $N_\varepsilon(A) = N_{D_S}(T) < \rho(T) + \varepsilon = \rho(A) + \varepsilon$

Conclusion: $\boxed{N_\varepsilon(A) < \rho(A) + \varepsilon}$

IC) $\Longrightarrow$] Soit $\lambda_0 \in \sigma_A$ tel que $\rho(A) = |\lambda_0|$ et z_0 un vecteur propre tel que $A(z_0) = \lambda_0 z_0$, on a alors pour tout entier k : $\|A^k(z_0)\|_\infty \leq N_\infty(A^k)\|z_0\|_\infty$. D'où $\|\lambda_0^k z_0\|_\infty \leq N_\infty(A^k)\|z_0\|_\infty$ et donc $|\lambda_0|^k\|z_0\|_\infty \leq N_\infty(A^k)\|z_0\|_\infty$. On en déduit alors $0 \leq |\lambda_0|^k \leq N_\infty(A^k)$. Comme $\lim_{k\to\infty} A^k = 0$, on a $\lim_{k\to\infty} N_\infty(A^k) = 0$ et par théorème d'encadrement on obtient : $\lim_{k\to\infty} |\lambda_0|^k = 0$ ce qui n'est possible que Si $|\lambda_0| < 1$, donc que $\rho(A) < 1$.

$\Longleftarrow$] Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\rho(A) + \varepsilon < 1$ (par exemple $\varepsilon = \frac{1-\rho(A)}{2}$). Posons enfin $q = \rho(A) + \varepsilon$, on a donc $0 < q < 1$. D'après le IB), on a $0 \leq N_\varepsilon(A^k) \leq N_\varepsilon(A)^k \leq (\rho(A) + \varepsilon)^k = q^k$. On conclut alors par théorème d'encadrement que $\lim_{k\to\infty} N_\varepsilon(A^k) = 0$

Conclusion: $\boxed{\lim_{k\to\infty} A^k = 0 \Longleftrightarrow \rho(A) < 1}$

Partie II

IIA1) On a $G_L(A) = D(4+3i, 4) \cup D(-1+i, 1) \cup D(5+6i, \sqrt{2}+3) \cup D(-5-5i, 5)$ et

$G_C(A) = D(4+3i, 2+\sqrt{2}) \cup D(-1+i, 4) \cup D(5+6i, 4) \cup D(-5-5i, 3)$

IIA2a) $Z = (z_1, \ldots, z_n)$ et on a les relations pour tout $i \in [1,n]$: $\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}z_j = 0$, donc $m_{i,i}z_i = -\sum_{j=1, j\neq i}^{n} m_{i,j}z_j$, d'où : $|m_{i,i}||z_i| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |m_{i,j}||z_j| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |m_{i,j}|\|Z\|_\infty = L_i\|Z\|_\infty$.

On choisit $i = p$, un indice pour lequel $\|Z\|_\infty = |z_p| \neq 0$, on a donc :

$|m_{p,p}|\|Z\|_\infty \leq L_p\|Z\|_\infty$. D'où : $\boxed{|m_{p,p}| \leq L_p}$

IIA2b) Soit $\lambda \in \sigma_A$, $M = A - \lambda I_n$ n'est pas inversible donc le système $(A - \lambda I_n)Z = 0$ admet une solution non nulle d'où il existe $p \in [1, n]$ tel que $|m_{p,p}| \leq L_p(M)$ (avec $L_p(M)$: la somme définie au début de II avec une matrice M). Comme $m_{p,p} = a_{p,p} - \lambda$ et que $L_p(M) = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |m_{i,j}| = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} (|a_{i,j} - 0|) = L_p(A) = L_p$, on a donc

$|a_{p,p} - \lambda| \leq L_p$ ce qui veut dire $\lambda \in D_p(A) \subset G_L(A)$

Conclusion: $\boxed{\sigma_A \subset G_L(A)}$

IIA2c) λ est valeur propre de A SSI λ est valeur propre de ${}^tA$, donc $\sigma_A = \sigma_{{}^tA}$. D'autre part les sommes L_i de A correspondent exactement aux sommes C_i de ${}^tA$ et les sommes C_i de A correspondent exactement aux sommes L_i de ${}^tA$. On en déduit $\sigma_A = \sigma_{{}^tA} \subset G_L({}^tA) = G_C(A)$, on conclut avec le IIA2b) :

Conclusion: $\boxed{\sigma_A \subset G_L(A) \cap G_C(A)}$

IIA3a) On a montré au IIA2a) et b) que si μ est valeur propre de A, x un vecteur propre associé et si $|x_k| = \|x\|_\infty$ alors $|a_{k,k} - \mu| \leq L_k$, comme μ est sur le bord de $G_L(A)$, on a pour tout i et donc pour k : $|a_{k,k} - \mu| \geq L_k$. On en déduit que $|a_{k,k} - \mu| = L_k$ ce qui veut dire que : $\boxed{\mu \in C_k(A)}$.

IIA3b) De $Ax = \mu x$ on égalise les k-ièmes coordonnées (avec les notations du IIA3a)) : $\sum_{j=1}^{n} a_{k,j}x_j = \mu x_k$, donc

$(\mu - a_{k,k})x_k = \sum_{j=1, j\neq k}^{n} a_{k,j}x_j$, donc $|\mu - a_{k,k}||x_k| = \sum_{j=1, j\neq k}^{n} a_{k,j}x_j$, or $|\mu - a_{k,k}| = L_k$ (d'après le IIA3a)), donc

$L_k|x_k| = \sum_{j=1, j\neq k}^{n} |a_{k,j}||x_k| \leq \left|\sum_{j=1, j\neq k}^{n} a_{k,j}x_j\right| \leq \sum_{j=1, j\neq k}^{n} |a_{k,j}||x_j|$, on en déduit donc que

$\sum_{j=1, j\neq k}^{n} |a_{k,j}|\left(|x_j| - |x_k|\right) \leq 0$. Or pour tout i, j, on a $a_{i,j} \neq 0$, donc $|a_{i,j}| > 0$ et d'autre part, $|x_j| - |x_k| \leq 0$ pour tout j. On doit donc avoir $|x_j| - |x_k| = 0$ pour tout j. Donc $|x_j| = \|x\|_\infty$ et grâce au IIA3a), on obtient $\mu \in C_j(A)$ pour tout j.

Conclusion: $\boxed{\mu \in \bigcap_{j=1}^{n} C_j(A)}$

IIA4) Comme le précise l'énoncé, on notera $D = D_p$ (la matrice).

$$\text{On trouve alors } D^{-1}AD = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \frac{p_2}{p_1}a_{1,2} & \frac{p_3}{p_1}a_{1,3} & \cdots & \frac{p_n}{p_1}a_{1,n} \\ \frac{p_1}{p_2}a_{2,1} & a_{2,2} & \frac{p_3}{p_2}a_{2,3} & \cdots & \frac{p_n}{p_2}a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \frac{p_1}{p_n}a_{n,1} & \frac{p_2}{p_n}a_{n,2} & \cdots & \frac{p_{n-1}}{p_n}a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

On en déduit que pour tout $i \in [1, n]$, $L_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{i,j}|\frac{p_j}{p_i}$ et donc

$D_i(D^{-1}AD) = \left\{ z \in \mathbf{C}\ ,\ |z - a_{i,i}| \leq L_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{i,j}|\frac{p_j}{p_i} \right\}$ et $G_L(D^{-1}AD) = \bigcup_{i=1}^{n} D_i(D^{-1}AD)$.

IIA5a) Soit $\lambda_0 \in \sigma_A$ tel que $\rho(A) = |\lambda_0|$, λ_0 est valeur propre de A donc λ_0 est aussi valeur propre de $D_p^{-1}AD_p$ (même polynôme caractéristique) et donc d'après IIA2) il existe i tel que $|\lambda_0 - a_{i,i}| \leq L_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{i,j}|\frac{p_j}{p_i}$, donc

$|\lambda_0| \leq |a_{i,i}| + L_i = \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\frac{p_j}{p_i} = \frac{1}{p_i}\sum_{j=1}^{n} p_j|a_{i,j}|$, donc $\rho(A) = |\lambda_0| \leq \frac{1}{p_i}\sum_{j=1}^{n} p_j|a_{i,j}| \leq \max_{i=1,..,n} \frac{1}{p_i}\sum_{j=1}^{n} p_j|a_{i,j}|$ et ceci pour tout $p > 0$, donc $\rho(A)$ est un minorant des $\max_{i=1,..,n} \frac{1}{p_i}\sum_{j=1}^{n} p_j|a_{i,j}|$, $p > 0$. Par définition de la borne inf on conclut :

Conclusion: $\boxed{\rho(A) \leq \inf_{p>0} \max_{i=1,..,n} \frac{1}{p_i}\sum_{j=1}^{n} p_j|a_{i,j}|}$

IIA5bi) Montrer que le majorant de $\rho(A)$ de la question précédente est supérieur ou égal à 83/3 revient à montrer que pour tout $p > 0$, $\max_{i=1,..,3} \frac{1}{p_i} \sum_{j=1}^{3} p_j |a_{i,j}|$ est supérieur ou égal à 83/3.

Supposons le contraire alors pour $i = 1, 2, 3$, on aurait $\frac{1}{p_i} \sum_{j=1}^{3} p_j |a_{i,j}| < \frac{83}{3}$ d'où en sommant les 3 :
$\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{p_i} \sum_{j=1}^{3} p_j |a_{i,j}| < 3\frac{83}{3} = 83$.
Or $\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{p_i} \sum_{j=1}^{3} p_j |a_{i,j}| = 19 + 16\frac{p_1}{p_2} + 16\frac{p_2}{p_1} + 8\frac{p_1}{p_3} + 8\frac{p_3}{p_1} + 8\frac{p_2}{p_3} + 8\frac{p_3}{p_2}$.

D'autre part l'étude des variations de $t \mapsto t + \frac{1}{t}$ donne pour tout $t > 0$, $t + \frac{1}{t} \geq 2$, on en déduit que pour tout $p_1 > 0$ et $p_2 > 0$: $\frac{p_1}{p_2} + \frac{p_2}{p_1} \geq 2$, de même pour les 2 autres. D'où

$19+16\frac{p_1}{p_2} + 16\frac{p_2}{p_1} + 8\frac{p_1}{p_3} + 8\frac{p_3}{p_1} + 8\frac{p_2}{p_3} + 8\frac{p_3}{p_2} \geq 19 + 16 \times 2 + 8 \times 2 + 8 \times 2 = 83$ ce qui donne $\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{p_i} \sum_{j=1}^{3} p_j |a_{i,j}| \geq 83$: Absurde.

<u>Conclusion</u>: $\boxed{\text{Le majorant du IIA4a) est supérieur ou égal à } \frac{83}{3}}$

IIA5bii) $P_A(x) = \begin{vmatrix} 7-x & -16 & 8 \\ -16 & 7-x & -8 \\ 8 & -8 & -5-x \end{vmatrix} =_{C_1 \leftarrow C_1 + C_2} \begin{vmatrix} -9-x & -16 & 8 \\ -9-x & 7-x & -8 \\ 0 & -8 & -5-x \end{vmatrix} = (-9-x) \begin{vmatrix} 1 & -16 & 8 \\ 1 & 7-x & -8 \\ 0 & -8 & -5-x \end{vmatrix}$

$=_{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} (-9-x) \begin{vmatrix} 1 & -16 & 8 \\ 0 & 23-x & -16 \\ 0 & -8 & -5-x \end{vmatrix} = (-9-x)(x^2 - 18x - 243) = -(x+9)^2(x-27)$

On en déduit une valeur approchée (sic!) de $\rho(A)$: $\boxed{\rho(A) = 27,000000}$

IIB1a) Si A n'était pas inversible, 0 serait valeur propre de A et donc il existerait un indice i tel que $|a_{i,i} - 0| = |a_{i,i}| \leq L_i$ ce qui est absurde et A est <u>inversible</u>.

IIB1b) Si les $a_{i,i}$ sont strictement négatifs alors les disques $D_i(A)$ ont leurs centres sur la demi-droite ouverte $\mathbf{R}_-^*$ et s'il existe $z = a + ib \in D_i(A)$ avec $a \geq 0$, alors $|z - a_{i,i}| = |a - a_{i,i} + ib| \geq |a - a_{i,i}| = a - a_{i,i} \geq -a_{i,i} = |a_{i,i}| > L_i$: absurde car on a supposé que $z \in D_i(A)$ donc que $|a - a_{i,i}| \leq L_i$. On a donc tous les disques $D_i(A)$ qui sont inclus dans le demi-plan $Re(z) < 0$, comme les valeurs propres sont toutes dans un de ces disques, on conclut :

<u>Conclusion</u>: $\boxed{\text{Pour tout } \lambda \in \sigma_A \text{ , Re}(\lambda) < 0}$

IIB1c) Une matrice A, symétrique est définie positive SSI ses valeurs propres sont toutes strictement positives. En changeant A en $-A$ à la question précédente, ce qui ne change pas les L_i et les conditions $|a_{i,i}| > L_i$, on a : Si A est SDD et si $\forall i$, $a_{i,i} > 0$ alors les valeurs propres ont toutes une partie réelle strictement positive. Comme A est de surcroit symétrique, les valeurs propres sont toutes réelles et donc strictement positives, ce qui prouve que A est définie positive.

<u>Conclusion</u>: $\boxed{\text{Une condition suffisante est } \forall i,\ a_{i,i} > 0}$

IIB2) B étant diagonalisable, il existe une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ et une matrice inversible P tels que $B = PDP^{-1}$. $\forall E \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, posons $E_1 = P^{-1}EP$ de sorte que $E = PE_1P^{-1}$.

$\forall \hat{\lambda} \in \sigma_{B+E} = \sigma_{D+E_1}$, il existe $i \in [1, n]$ tel que $|\hat{\lambda} - (\lambda_i + a'_{i,i})| \leq L_i(D + E_1) = L_i(E_1)$ avec $E_1 = (a'_{i,j})$.

Donc $|\hat{\lambda} - \lambda_i| \leq |a'_{i,i}| + L_i(E_1) = \sum_{j=1}^{n} |a'_{i,j}| \leq N_\infty(E_1)$.

Or $N_\infty(E_1) = N_\infty(P^{-1}EP) = N_P(E)$ et grâce au IA4b), on a $N_P(E) \leq C_P N_\infty(E)$.

Comme $\lambda_i \in \sigma_B$, en posant $K_\infty(B) = C_P$, on conclut :

Conclusion: $\boxed{\forall E \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}),\, \forall \hat{\lambda} \in \sigma_{B+E},\, \exists \lambda_i \in \sigma_B\ |\hat{\lambda} - \lambda_i| \leq K_\infty(B)N_\infty(E)}$

Partie III

III A1) Soit $z \in Z_t$, $z^n = -\sum_{j=1}^{n} c_j(t) z^{n-j}$. Si $z \neq 0$ alors en divisant par z^{n-1}, on obtient : $z = -\sum_{j=1}^{n} \frac{c_j(t)}{z^{j-1}}$ d'où $|z| \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{|c_j(t)|}{|z^{j-1}|}$. Si $|z| > 1$ alors $|z| \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{|c_j(t)|}{1}$. Or l'application $t \mapsto \sum_{j=1}^{n} |c_j(t)|$ étant continue sur $[0,1]$ elle y est bornée : il existe un nombre M tel que pour tout $t \in [0,1]$, $\sum_{j=1}^{n} |c_j(t)| \leq M$. On a donc pour tout $z \in Z_t$, $|z| \leq 1$ ou $|z| > 1$ et alors $|z| \leq M$. En posant $R_0 = \max(1, M)$ on conclut :

Conclusion: $\boxed{\forall t \in [0,1]\ Z_t \subset D(0,R)}$

IIIA2) Raisonons par l'absurde : supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall \eta > 0\ \exists t$ tel que $|t - t_0| < \eta$ et $\forall X_t \in Z_t$: $|X_t - X_0| \geq \varepsilon$.

Pour tout $k > 1$ en jouant avec $\eta = \frac{1}{2^k}$: $\exists t_k$ tel que $|t_k - t_0| < \frac{1}{2^k}$ et $\forall X_t \in Z_{t_k}$: $|X_t - X_0| \geq \varepsilon$.

Notons $Z_{t_k} = \{X_{i,t_k}\ ,\ i \in [1,n]\}$ (en répétant les racines autant que leur multiplicité) de tel sorte que

$|X_{1,t_k} - X_0| \geq |X_{2,t_k} - X_0| \geq \cdots \geq |X_{n,t_k} - X_0| \geq \varepsilon$.

La suite $(X_{1,t_k}, X_{2,t_k}, \ldots, X_{n,t_k})$ est une suite de $\mathbf{C}^n$ et cette suite est bornée (par R) grâce au IIIA1). Par Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une sous-suite convergente : il existe φ de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ strictement croissante tel que $\lim_{k\to\infty} \left(X_{1,t_{\varphi(k)}}, X_{2,t_{\varphi(k)}}, \ldots, X_{n,t_{\varphi(k)}}\right) = (y_1, \ldots, y_n)$.

D'autre part on a $P_{t_{\varphi(k)}}(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - X_{i,t_{\varphi(k)}})$, de la continuité des c_j, on en déduit que pour tout X fixé dans $\mathbf{C}$: $\lim_{k\to\infty} P_{t_{\varphi(k)}}(X) = P_{t_0}(X)$ et $\lim_{k\to\infty} \prod_{i=1}^{n}(X - X_{i,t_{\varphi(k)}}) = \prod_{i=1}^{n}(X - y_i)$. Donc $P_{t_0}(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - y_i)$ et donc il existe un i tel que $y_i = X_0$ or ceci est absurde car en passant à la limite lorsque k tend vers $+\infty$ pour $|X_{i,t_k} - X_0| \geq \varepsilon$, on obtient $|y_i - X_0| = 0 \geq \varepsilon$.

Conclusion: $\boxed{\forall \varepsilon > 0,\, \exists \eta > 0,\, \forall t |t - t - 0| < \eta,\, \exists X_t \in Z_t,\, |X_t - X_0| < \varepsilon}$

IIIB1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On essaye $a = 0$ et $b = 1$ de sorte que $D_1(A) = D(0,1)$ puis on détermine facilement c et d pour que les valeurs propres soient 2 et 3 : $d = 5$ et $c = -6$. Conclusion: $\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \text{ convient}}$

IIIB2a) $A(t) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & ta_{i,j} \\ & \ddots & \\ ta_{i,j} & & a_{n,n} \end{pmatrix}$ d'où $L_i(A(t)) = tL_i(A) \leq L_i(A)$ (car $t \in [0,1]$) et donc $D_i(A(t)) \subset D_i(A)$

Conclusion: $\boxed{G_L(A(t)) \subset G_L(A)}$

IIIB2bi) $t = 0 \in E$ car $A(0) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{n,n} \end{pmatrix}$ et $a_{1,1} \in \sigma_{A(0)} \cap D_1(A)$ d'où $\boxed{E \neq \emptyset}$

IIIB2bii) Soit $t_0 \in E$, $\exists \lambda_{t_0} \in \sigma_{A(t_0)} \cap D_1(A)$. λ_{t_0} est donc racine de $P_{A(t_0)}(X)$ (polynôme caractéristique). On pose alors pour tout t de $[0,1]$, $P_t(X) = (-1)^n P_{A(t)}(X) = X^n + \sum_{j=1}^{n} c_j(t) z^{n-j}$ avec les c_j qui sont continues sur $[0,1]$ car polynômiales en t et $a_{i,j}$. On a $\sigma_{A(t)} = Z_t$. On va utiliser le IIIA2) :

Pour cela posons $X_0 = \lambda_{t_0} \in D_1(A)$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $j \in [2,n]$, $D(X_0, \varepsilon) \cap D_j(A) = \emptyset$ (un tel ε existe car X_0 appartient à $\mathbf{C} - \bigcup_{j=2}^{n} D_j(A)$ qui est ouvert (comme complémentaire d'un fermé)).

Grâce au IIIA2) il existe $\eta > 0$ tel que $\forall t \in]t_0 - \eta, t_0 + \eta[\cap [0,1]$: il existe $X_t \in Z_t = \sigma_{A(t)}$ tel que $|X_t - X_0| < \varepsilon$. Or $X_t \in Z_t = \sigma_{A(t)} \subset G_L(A(t)) \subset G_L(A)$, comme $X_t \in D(X_0, \varepsilon)$, on a $X_t \in D_1(A)$ (car il ne peut appartenir aux autres $D_j(A)$). On obtient donc $X_t \in \sigma_{A(t)} \cap D_1(A)$ ce qui veut dire que $t \in E$.

Conclusion: $\boxed{E \text{ est un ouvert relatif de } [0,1]}$

IIIB2biii) Pour tout $k \geq 1$, il existe $\lambda_{t_k} \in \sigma_{A(t_k)} \cap D_1(A)$. Comme $D_1(A)$ est compact, il existe une suite extraite de $(\lambda_{t_k})_k$ qui converge vers un élément μ de $D_1(A)$: $\lim\limits_{k \to \infty} \lambda_{t_{\varphi(k)}} = \mu$.

D'autre part pour tout k (avec les polynômes $P_t(X)$ définis au ii)) : $P_{t_{\varphi(k)}}(\lambda_{t_{\varphi(k)}}) = 0$ d'où lorsque k tend vers l'infini : on a, par théorèmes généraux : $P_a(\mu) = 0$ ce qui donne $\mu \in \sigma_{A(a)} \cap D_1(A)$

Conclusion: $\boxed{a \in E \text{ et } E \text{ est un fermé relatif de } [0,1]}$

IIIB2biv) Avec leur admission, le ii) et le iii) on obtient immédiatement $E = [0,1]$. On en déduit que $1 \in E$, comme $A(1) = A$, on a donc

Conclusion: $\boxed{\sigma_A \cap D_1(A) \neq \emptyset}$

Remarque : On pouvait le démontrer directement sans leur admission en considérant la borne supérieure de E (comme pour les accroissements finis vectorielles).

IIIB3) Propriétés du spectre ? $D_1(A)$ rencontre $D_3(A)$. Maple donne les 4 valeurs propres :

$-4.749157034-5.250443310i, -.7893550582+.7832578378i, 2.851938082+3.581681160i, 5.686574010+5.885504312i$

Partie IV

IVA1) N_2 est la norme hermitienne canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ identifié à $\mathbf{C}^{n^2}$. Montrons qu'elle est une matricielle : Soit $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$, posons $AB = (a_{i,j})$, on a alors $N_2(AB)^2 = \displaystyle\sum_{i=1,j=1}^{n,n} |c_{i,j}|^2 = \sum_{i=1,j=1}^{n,n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \right|^2$. Or l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur $\mathbf{C}^n$ donne $\displaystyle\left| \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \right|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} |b_{k,j}|^2 \right)$.

Donc $N_2(AB)^2 \leq \displaystyle\sum_{i=1,j=1}^{n,n} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} |b_{k,j}|^2 \right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}|^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |b_{k,j}|^2 \right) = N_2(A)^2 N_2(B)^2$. D'où l'inégalité demandée.

Conclusion: $\boxed{N_2 \text{ est une norme matricielle}}$

IVA2a) Si on pose $D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$, $\Delta = \begin{pmatrix} \delta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \delta_n \end{pmatrix}$ et $A = (a_{i,j})$, alors

$DA = (d_i a_{i,j})$ et $A\Delta = (\delta_j a_{i,j})$. On en déduit que $D(A \times_H B)\Delta = (d_i \delta_j a_{i,j} b_{i,j}) = (DA) \times_H (B\Delta)$ et

$D(A \times_H B)\Delta = (d_i \delta_j a_{i,j} b_{i,j}) = ((d_i \delta_j a_{i,j}) b_{i,j}) = (DA\Delta) \times_H B$.

On a de même $\boxed{D(A \times_H B)\Delta = A \times_H (DB\Delta) \text{ et } D(A \times_H B)\Delta = (A\Delta) \times_H (DB)}$.

IVA2b) $[(A \times_H B)x]_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{i,j} x_j$ et $AD_x^t B = (x_j a_{i,j})(b_{i,j}) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k a_{i,k} b_{j,k} \right)$, donc

$(AD_x^t B)_{i,i} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k a_{i,k} b_{i,k} = [(A \times_H B)x]_i$

IVA2c) $y^*(A \times_H B)x = e^* D_y^*(A \times_H B)x =^t e D_y^* A \times_H Bx$ grâce à la définition de e, puis

$y^*(A \times_H B)x =^t e D_y^*(A \times_H B)x =^t e D_y^*(A \times_H B) I_n x =^t e \left((D_y^* A) \times_H (B) \right) x$ grâce au a), puis avec la définition de e, on a : $y^*(A \times_H B)x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} [(D^* A) \times_H B)x]_i$ et grâce au b), on obtient

$y^*(A \times_H B)x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (D_y^* A D_x^t B)_{i,i} = Tr((D_y^* A D_x^t B)$

IVA2d) On présume que l'on prend a et B carrés. On utilise le c) avec $y = x$ et la définition de la norme avec la trace.

IVB1) Si S est symétrique positive alors elle est diagonalisable dans une base orthonormée et toutes ses valeurs propres sont positives : c'est-à-dire que $S = PD_\lambda\ {}^tP$ avec $x = (\lambda_1, \dots \lambda_n)$ et pour tout i, $\lambda_i \geq 0$, donc il existe μ_i réel tel que $\lambda_i = \mu_i^2$. On a alors $D_\lambda = D_\mu^2$ et donc $S = PD_u^2\ {}^tP = {}^tTT$ avec $T = D_u\ {}^tP$

Si $S \in S_n^{++}(\mathbf{R})$, on peut dire que T est inversible (car $detS = det(T)^2$).

IVB2) Si a et B sont symétriques alors il est clair que $A \times_H B = (a_{i,j}b_{i,j})$ l'est aussi. Montrons qu'elle est positive. D'après la question précédente il existe 2 matrices T et U telles que $A = {}^tTT$ et $B = {}^tUU$

$x^*(A \times_H B)x = < D_x^* A D_x, B >$ (d'après IVA2)), de plus $D_x^* = D_x$ car on est dans $\mathbf{R}$, donc

$x^*(A \times_H B)x = Tr(D_x A D_x\ {}^tB)$ (définition de la norme), donc $x^*(A \times_H B)x = Tr(D_x A D_x B) = Tr(D_x\ {}^tTTD_x^tUU) = Tr(UD_x\ {}^tTTD_x^tU)$ (car $Tr(XY = Tr(YX))$, donc $x^*(A \times_H B)x = Tr((UD_x\ {}^tT)(TD_x^tU)) = Tr((UD_x\ {}^tT)^t(UD_x\ {}^tT)) = \|UD_x\ {}^tT\|_2^2 \geq 0$ et donc $A \times_H B$ est positive.

Si A et B sont définies positives alors $x^*(A \times_H B)x = \|UD_x\ {}^tT\|_2^2 = 0$ implique que $UD_x\ {}^tT = 0$, comme d'après la question précédente, U et T sont inversibles, on doit avoir $D_x = 0$ d'où $x = 0$ et $A \times_H B$ est définie positive.

Conclusion: $\boxed{(A, B) \in (S_n^+(\mathbf{R}))^2 \Longrightarrow A \times_H B \in S_n^+(\mathbf{R}) \text{ et } (A, B) \in (S_n^{++}(\mathbf{R}))^2 \Longrightarrow A \times_H B \in S_n^{++}(\mathbf{R})}$

IVB3a) $B - \lambda_{min}(B)I_n$ est symétrique et ses valeurs propres sont $\lambda - \lambda_{min}(B)$, avec λ valeur propre de B, donc elles sont toutes positives et $B - \lambda_{min}(B)I_n \in S_n^+(\mathbf{R})$ et grâce à la question précédente $A \times_H (B - \lambda_{min}(B)I_n)$ est positive.

IVB3b) ${}^tx(A \times_H B - \lambda(A \times_H B)I_n)x = \lambda(A \times_H B)^txx - \lambda(A \times_H B)^txx = 0.$

Comme $A \times_H (B - \lambda_{min}(B)I_n)$ est positive, ${}^tx(A \times_H (B - \lambda_{min}(B)I_n))x \geq 0$, or il est facile de vérifier que $A \times_H (B - \lambda_{min}(B)I_n) = A \times_H B - \lambda_{min}(B) A \times_H I_n$, donc de ${}^tx(A \times_H (B - \lambda_{min}(B)I_n))x \geq 0$, on en déduit : ${}^tx(A \times_H B)x - \lambda_{min(B)}\ {}^tx(A \times_H I_n))x \geq 0$, donc

${}^tx(A \times_H B)x = \lambda(A \times_H B) \geq \lambda_{min}(B) \displaystyle\sum_{i=1}^n a_{i,i}x_i^2 \geq \lambda_{min}(B)(\min_i a_{i,i}) \times 1$

$\boxed{\lambda(A \times_H B) \geq \lambda_{min}(B)(\min_i a_{i,i})}$

IVB3c) La matrice $A - \lambda_{min}(A)I_n$ est symétrique et positive (c'est le IVB3a)) d'où il existe une matrice T tel que $A - \lambda_{min}(A)I_n = {}^t\ TT$ (c'est le IVB1)). Le coefficient (i, i) donne : $a_{i,i} - \lambda_{min}(A) = \displaystyle\sum_{k=1}^n t_{k,i}^2 \geq 0$ et on conclut : $\boxed{a_{i,i} \geq \lambda_{min}(A)}$.

Puis comme tout est positif, il vient tout de suite : $\boxed{\lambda(A \times_H B) \geq \lambda_{min}(B)(\min_i a_{i,i}) \geq \lambda_{min}(B)\lambda_{min}(A)}$

IVB3d) On fait la même chose avec $\lambda_{max}(B)I_n - B$ qui est symétrique et positive et on obtient

$\boxed{\lambda(A \times_H B) \leq \lambda_{max}(B)(\max_i a_{i,i}) \leq \lambda_{max}(B)\lambda_{max}(A)}$

Conclusion: $\boxed{\lambda_{min}(B)\lambda_{min}(A) \leq \lambda(A \times_H B) \leq \lambda_{max}(B)\lambda_{max}(A)}$