

# MATHÉMATIQUES I

## Avertissement

Les trois parties sont indépendantes. Le résultat final de la Partie I fournit une valeur particulière de la fonction  $F$  étudiée dans les parties II et III.

## Partie I - Calcul de la somme d'une série

### I.A -

I.A.1) Calculer, sous forme trigonométrique réelle, les coefficients de Fourier de la fonction  $2\pi$ -périodique impaire  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , nulle en  $0$  et  $\pi$ , et égale à  $1$  sur  $]0, \pi[$ . Pour tout entier  $n \geq 0$ , expliciter la somme partielle de Fourier  $S_n f$  de  $f$ .

I.A.2) Que peut-on dire de la suite de fonctions  $(S_n f)$  ? En déduire la valeur de

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

I.A.3) Calculer

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

### I.B -

I.B.1) Préciser le domaine d'existence dans  $\mathbb{R}$  de

$$L(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n+1}.$$

Exprimer  $L(x)$  à l'aide de fonctions usuelles.

I.B.2) Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} dx.$$

I.B.3) En déduire la valeur de

$$S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(n+1)}.$$

# Filière MP

I.B.4) Exprimer

$$S_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}$$

en fonction de  $S_1$  et  $S_2$ . En déduire la valeur de  $S_3$ .

\* \* \*

Dans toute la suite, on utilise les notations qui suivent :

- Pour tout réel  $t > 0$ ,  $\ln t$  désigne le logarithme népérien de  $t$ .
- Si  $t$  est un réel strictement positif et si  $z = x + iy$ , où  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , est un complexe, on note  $t^z = \exp(z \ln t)$ .
- On définit la fonction  $p : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$p(t) = \frac{\ln t \cdot \ln(1-t)}{t}.$$

Pour tout  $z$  complexe tel que la fonction  $t \mapsto t^{-z} p(t)$  est intégrable sur  $]0, 1[$ , on pose

$$F(z) = \int_0^1 t^{-z} p(t) dt.$$

On définit ainsi une fonction  $F$  de la variable complexe  $z$  ; on notera encore, par extension,  $F$  la fonction de deux variables réelles associée.

Ainsi, pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $F(x, y) = F(x + iy)$ .

Le but du problème est d'étudier la fonction  $F$ .

## Partie II - Étude locale de $F$

**II.A** - Montrer que le domaine de définition de  $F$  est  $\Omega = \{z/z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) < 1\}$ . On pose  $I = \Omega \cap \mathbb{R} = ]-\infty, 1[$ .

**II.B** - Déterminer la limite de  $F(z)$  quand la partie réelle de  $z$  tend vers  $-\infty$ .

**II.C -**

II.C.1) Déterminer la limite de  $F(x)$  quand le réel  $x \in I$  tend vers 1 .

II.C.2) Pour tout  $x \in I$ , on pose

$$G(x) = \int_0^1 t^{-x} |\ln t| dt . \text{ Calculer } G(x) .$$

II.C.3) Prouver que la limite de  $F(x) - G(x)$ , quand  $x \in I$  tend vers 1 , existe et est finie.

II.C.4) En déduire la limite de  $\frac{F(x)}{G(x)}$  quand  $x \in I$  tend vers 1 .

**II.D -** Montrer que la restriction de  $F$  à  $I$  est  $C^\infty$ . Pour tout  $x \in I$ , donner l'expression de la dérivée  $k$ -ième  $F^{(k)}(x)$  sous forme intégrale.

**II.E -**

II.E.1) Établir que  $F$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\Omega$ . Si  $k$  et  $l$  sont deux entiers  $\geq 0$  et si  $z \in \Omega$ , exprimer la dérivée partielle

$$\frac{\partial^{k+l} F}{\partial x^k \partial y^l}(z) \text{ sous la forme d'une intégrale.}$$

II.E.2) Comparer  $\frac{\partial F}{\partial x}$  et  $\frac{\partial F}{\partial y}$ .

II.E.3) Évaluer  $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ .

**II.F -**

II.F.1) Soient  $z \in \Omega$  et  $(z_n)$  une suite de points de  $\Omega$ , distincts de  $z$ , qui converge vers  $z$ . Prouver l'existence de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(z_n) - F(z)}{z_n - z} .$$

On pourra utiliser la continuité de  $\frac{\partial F}{\partial x}$  et de  $\frac{\partial F}{\partial y}$ , ainsi que le résultat de II.E.2.

On observera que cette limite ne dépend que de  $z$ , et non de la suite  $(z_n)$ .

Par la suite, on note  $DF(z)$  cette limite.

On définit ainsi une application  $DF : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ .

II.F.2) Pour tout entier  $k \geq 2$ , démontrer l'existence de l'application  $D^k F = D(D^{k-1} F) : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ . On convient que  $D^1 F = DF$ .

**II.G -**

II.G.1) Pour tout réel  $t > 0$ , développer en série entière de  $u$  la fonction  $u \in \mathbb{C} \rightarrow t^{-u}$ . Préciser le rayon de convergence.

II.G.2) Établir qu'au voisinage de 0,

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \text{ où } c_k = \frac{1}{k!} \int_0^1 (-\ln t)^k p(t) dt. \quad (1)$$

II.G.3) Quel est le rayon de convergence  $R$  de la série entière (1) ?

**II.H -**

II.H.1) Déterminer un équivalent de  $c_k$  quand  $k \rightarrow \infty$ .

II.H.2) Quelle est la nature de la série (1) quand  $|z| = R$  ?

**Partie III - Développement en série****III.A -**

III.A.1) Développer en série entière de  $t \in \mathbb{R}$  la fonction

$$t \rightarrow \frac{\ln(1-t)}{t}. \text{ Préciser le rayon de convergence.}$$

III.A.2) Pour tout entier  $n \geq 0$  et tout  $z \in \Omega$ , calculer

$$u_n(z) = \int_0^1 t^{n-z} \ln t dt.$$

III.A.3) Démontrer que  $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n-z)^2}$ .

**III.B -**

III.B.1) Pour tout  $x \in I$ , exprimer

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^x F(u) du$$

sous forme d'une série ne faisant plus intervenir d'intégrale. Préciser  $\phi(0)$ .

III.B.2) Déterminer un équivalent de  $\phi(x)$  quand  $x \in I$  tend vers 1.

**III.C -**

III.C.1) Si  $y \in \mathbb{R}$ , on pose  $H(y) = F(iy)$ . Les fonctions  $|H|$  et  $|H|^2$  sont-elles intégrables sur  $\mathbb{R}$  ? Préciser la valeur de

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(y) dy.$$

III.C.2) Pour quelles valeurs des réels  $\alpha$  et  $\beta$ , la somme

$$S(\alpha, \beta) = \sum_{m, n \geq 1} (mn)^{-\alpha} (m+n)^{-\beta} \text{ est-elle finie ?}$$

III.C.3) Si

$$K_{m, n} = \int_{-\infty}^{\infty} (y + im)^{-2} (y - in)^{-2} dy,$$

où  $m$  et  $n$  sont des entiers  $\geq 1$ , calculer  $K_{m, n}$ . En déduire la valeur de

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(y)|^2 dy \text{ sous la forme } S(\alpha, \beta).$$

### III.D -

III.D.1) Démontrer que la série de fonctions obtenue en III.A.3 converge sur un domaine  $\tilde{\Omega}$  de  $\mathbb{C}$  que l'on précisera. On note encore  $F$  le prolongement de  $F$  à  $\tilde{\Omega}$ . Prouver que  $F$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\tilde{\Omega}$ .

III.D.2) Soient  $p$  un réel,  $n_0$  un entier  $> 0$ ,  $z$  et  $z'$  deux complexes dont les parties réelles sont majorées par  $n_0$ . Pour tout entier  $n > n_0$ , majorer  $|(z' - n)^{-p} - (z - n)^{-p}|$  en fonction de  $n$ ,  $n_0$ ,  $p$  et  $|z' - z|$ .

III.D.3) Avec les notations de II.F.1 et II.F.2, pour tout entier  $k \geq 1$  et tout  $z \in \tilde{\Omega}$ , établir l'existence de  $D^k F(z)$  qu'on exprimera sous forme de somme d'une série.

### III.E -

III.E.1) Pour tout entier  $k \geq 0$ , évaluer  $c_k$ , défini en II.G.2, sous forme de somme d'une série numérique.

III.E.2) Retrouver, à l'aide du III.E.1, le résultat obtenu en II.H.1.

---

••• FIN •••

---