

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE MATHS 1 CENTRALE 2004

On aura souvent besoin dans ce problème du critère continu de convergence dominée de Lebesgue :

si $\lim_{x \rightarrow a} f(x, t) = g(t)$, s'il existe φ intégrable sur I telle que $\forall t \in I, |f(x, t)| \leq \varphi(t)$ alors $\lim_{x \rightarrow a} \int_I f(x, t) dt$ existe et vaut $\int_I g(t) dt$ qui se démontre comme le théorème de continuité sous le signe intégral avec le critère séquentiel de limite.

PARTIE I - CALCUL DE LA SOMME D'UNE SÉRIE

I.A.1 Par un calcul immédiat on a $a_n(f) = 0$, $b_{2p}(f) = 0$ et $b_{2p+1}(f) = \frac{4}{\pi(2p+1)}$. On a donc

$$S_n(f)(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{[(n-1)/2]} \frac{1}{2p+1} \sin[(2p+1)x].$$

I.A.2 Grâce au théorème de Dirichlet, comme f est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux sur \mathbb{R} , 2π -périodique alors, si $x \not\equiv 0[\pi]$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f)(x) = f(x)$ (car x n'est pas un point de discontinuité) puis si $x \equiv 0[\pi]$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f)(x) = 0 = f(x)$.

Conclusion : dans tous les cas on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f)(x) = f(x)$.

Enfin, si $x = \frac{\pi}{2}$, $\sin(2p+1)x = \sin(p\pi + \frac{\pi}{2}) = (-1)^p$ donc $S = \frac{\pi}{4} f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{4}$.

I.A.3 On applique l'égalité de Parseval à f :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt &= \frac{16}{\pi^2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(2p+1)x dx \\ &= \frac{16}{\pi^2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \times \frac{1}{2} \end{aligned}$$

d'où $S_1 = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

I.B.1 $L(x)$ est la somme d'une série entière de rayon de convergence 1 donc L est déjà définie pour $x \in]-1, 1[$. Comme $\sum \frac{1}{n+1}$ est une série divergente, L n'est pas définie en ± 1 . Conclusion : L est définie sur $] -1, 1[$ intervalle maximal.

Comme $-\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ on obtient $L(x) = \frac{-\ln(1-x^2)}{x^2}$.

I.B.2 I est bien définie car si on pose $g(x) = \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}$ alors $g(x) \underset{0}{\sim} -1$ et $g(x) \underset{1}{\sim} \ln(1-x)$ qui est intégrable.

Soit $h(x) = \int_0^x \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} dt = \frac{-\ln(1-x^2)}{x} - \ln \frac{1+x}{1-x}$ après une intégration par parties.

Pour avoir la valeur de I , il suffit de prendre la limite de h quand x tend vers 1. Or

$$h(x) = \underbrace{-\frac{1-x}{x} \ln(1-x)}_{\rightarrow 0} - \underbrace{\frac{x+1}{x} \ln(1+x)}_{\rightarrow 2 \ln 2} \text{ donc } I = -2 \ln 2.$$

I.B.3 On écrit que $\frac{\ln(1-x^2)}{x^2} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n+1} = -\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$. Les fonctions f_n sont positives, $\int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{(n+1)(2n+1)}$ donc $\sum \int_0^1 f_n$ converge. On peut appliquer le théorème de Lebesgue d'intégration terme à terme d'une série de fonctions :

$$I = -\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)(n+1)}$$

et en conclusion $S_2 = 2 \ln 2$.

I.B.4 S_3 est définie car $\frac{1}{(n+1)(2n+1)^2} \sim \frac{1}{4n^3}$. On réécrit $S_3 : S_3 = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)^2}$.

Or $2S_1 - S_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2(n+1) - 2n - 1}{(n+1)(2n+1)^2} = \frac{1}{4} S_3$ donc $S_3 = 4 \left(\frac{\pi^2}{4} - 2 \ln 2 \right) = \pi^2 - 8 \ln 2$.

PARTIE II - ÉTUDE LOCALE DE F

II.A On a $|t^{-z}| = t^{-x}$.

- En 0 : $|t^{-z}p(t)| \underset{0}{\sim} \frac{|\ln t|}{t^x}$ intégrable ssi $x < 1$ ($t^{\frac{1+x}{2}} |t^{-z}p(t)| \underset{0}{\sim} t^{\frac{1-x}{2}} |\ln t| \rightarrow 0$).
- En 1 : $|t^{-z}p(t)| \underset{1}{\sim} |\ln(1-t)| \times (1-t)$ qui se prolonge par continuité.

Conclusion : $D_F = \Omega$.

II.B $tp(t)$ se prolonge par continuité sur $[0, 1]$ donc il existe $A > 0$ tel que $|tp(t)| \leq A$ d'où

$$|F(z)| \leq \int_0^1 t^{-x-1} \cdot |tp(t)| dt \leq \frac{A}{|x|} \rightarrow 0 \text{ i.e. } \lim_{\operatorname{Re}(z) \rightarrow -\infty} F(z) = 0.$$

II.C.1 On sait que $\ln(1-t) \leq -t$ donc $-\ln(1-t) \geq t$ soit $\left| \frac{\ln(1-t)}{t} \right| \geq 1$ pour $t \in]0, 1[$. On déduit de cette inégalité le résultat suivant :

$$F(x) = \int_0^1 t^{-x} |\ln t| \frac{|\ln(1-t)|}{t} dt \geq -\int_0^1 t^{-x} \ln t dt = \frac{1}{(1-x)^2}$$

après une intégration par parties.

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow 1} F(x) = +\infty$.

II.C.2 On vient de voir que $G(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$.

II.C.3 $F(x) - G(x) = \int_0^1 t^{-x} |\ln t| \left(\frac{|\ln(1-t)|}{t} - 1 \right) dt$. Soit $\varphi(t) = \frac{-\ln(1-t)}{t} - 1$, $\varphi(t) \underset{0}{\sim} \frac{t}{2}$.

$t^{-x} |\ln t| \varphi(t) \leq |\ln t| \frac{\varphi(t)}{t} = \psi(t)$ et $\psi(t) \underset{0}{\sim} \frac{|\ln t|}{2}$ intégrable et ψ se prolonge par continuité en 1.

On peut appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue

$$\lim_{x \rightarrow 1} F(x) - G(x) = \int_0^1 \underbrace{\frac{|\ln t|}{t} \left(\frac{-\ln(1-t)}{t} - 1 \right)}_{=\psi(t)} dt.$$

II.C.4 $\frac{F(x)}{G(x)} = 1 - \frac{F(x) - G(x)}{G(x)} \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow 1$.

II.D Soit $f(x, t) = t^{-x}p(t) \in \mathcal{C}(]-\infty, 1[\times]0, 1[)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -t^{-x} \ln t \cdot p(t) \in \mathcal{C}(]-\infty, 1[\times]0, 1[)$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est intégrable au voisinage de 1 (se prolonge par continuité) et $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \underset{0}{\sim} \frac{\ln^2 t}{t^x}$ est intégrable pour $x < 1$.

$\forall a \in]-\infty, 1[, \forall x \in]-\infty, a[, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \underbrace{|\ln t| t^{-a} p(t)}_{\text{intégrable}}$. Le théorème de dérivation de Lebesgue s'applique sur $] - \infty, a[$ pour tout a donc F est dérivable sur I et

$$F'(x) = \int_0^1 -t^{-x} \ln t \cdot p(t) dt.$$

De même $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) = (-\ln t)^k t^{-x} p(t)$ est majoré par $|\ln t|^k t^{-a} p(t)$ donc, par récurrence

sur k F est de classe \mathcal{C}^∞ sur I et $F^{(k)}(x) = \int_0^1 t^{-x} (-\ln t)^k p(t) dt.$

II.E.1 On reprend à peu de chose près la démonstration que l'on vient de faire : on pose

$f(x, y, t) = t^{-x-t-iy} p(t)$, $\frac{\partial^{k+l} f}{\partial x^k \partial y^l}(x, y, t) = (-\ln t)^{k+l} i^l f(x, y, t)$ et on utilise le même argument qu'au **II.D** et on a

$$\frac{\partial^{k+l} F}{\partial x^k \partial y^l}(x, y) = \int_0^1 (-\ln t)^{k+l} i^l t^{-z} p(t) dt \text{ et } F \in \mathcal{C}^\infty.$$

II.E.2 On remarque que $i \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y}.$

II.E.3 Par un calcul simple on arrive à $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0.$

II.F.1 On pose $z_n = x_n + iy_n$ alors

$$F(z_n) - F(z) = (x_n - x) \frac{\partial F}{\partial x}(z) + (y_n - y) \frac{\partial F}{\partial y}(z) + o(z_n - z) = [(x_n - x) + i(y_n - y)] \frac{\partial F}{\partial x}(z) + o(z_n - z)$$

d'où $\frac{F(z_n) - F(z)}{z_n - z} = \frac{\partial F}{\partial x}(z) + o(1) \rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(z)$. On a ainsi $DF(z) = \int_0^1 -\ln t \cdot t^{-z} p(t) dt.$

II.F.2 On prouve de même que $i \frac{\partial DF}{\partial x} = \frac{\partial DF}{\partial y}$ donc $\frac{DF(z_n) - DF(z)}{z_n - z} \rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(z)$ et, par une

récurrence immédiate, $D^k F(z) = \frac{\partial^k F}{\partial x^k}(z).$

II.G.1 $t^{-u} = e^{-u \ln t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\ln t)^n}{n!} u^n$ pour $t > 0$, $R = +\infty$.

II.G.2 En utilisant le développement de la question précédente, on a $F(z) = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t) z^k dt$

où $f_k(t) = \frac{(-\ln t)^k}{k!} p(t)$. Chaque fonction f_k est intégrable sur $I =]0, 1[$ et les fonctions f_k sont positives.

Si on pose $S_K(t, r) = \sum_{k=0}^K f_k(t) r^k$ avec $0 < r < 1$ alors $S_K(t, r)$ est majorée par $t^{-r} p(t)$ qui est intégrable sur I donc le théorème de convergence dominée nous permet de dire que, avec $r = |z|$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k = \lim_{K \rightarrow +\infty} \int_0^1 S_K(t, z) dt = F(z).$$

On déduit de ceci l'égalité demandée.

II.G.3 On vient de voir que le rayon de convergence de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k$ est supérieur ou égal à 1. Comme $F(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow 1$ alors $R \leq 1$.

Conclusion : $R = 1$.

II.H.1 On a prouvé que $\lim_{x \rightarrow 1} (F(x) - G(x)) = l > 0$ au **II.C.3**. On développe G en série entière de la même façon que F , $G(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$ avec $b_k = \frac{1}{k!} \int_0^1 (-\ln t)^{k+1} dt = k + 1$ (en posant $t = e^{-x}$ on reconnaît la fonction Γ). Or

$$c_k - b_k = \frac{1}{k!} \int_0^1 (-\ln t)^{k+1} \left[-1 - \frac{\ln(1-t)}{t} \right] dt \geq 0.$$

Montrons que $\sum_{k=0}^{+\infty} (c_k - b_k) x^k$ converge. En effet pour $x > 0$, $F(x) - G(x)$ qui tend vers l en croissant donc $\sum_{k=0}^{+\infty} (c_k - b_k) x^k \leq l$. Soit $K \in \mathbb{N}$ on a, en passant à la limite quand $x \rightarrow 1$

$$\sum_{k=0}^K (c_k - b_k) x^k \rightarrow \sum_{k=0}^K (c_k - b_k) \leq l$$

donc la série à termes positifs $\sum_{k=0}^{+\infty} (c_k - b_k)$ converge i.e. $c_k - b_k \rightarrow 0$ et en particulier $c_k \sim k$.

II.H.2 Comme $c_n \rightarrow +\infty$ alors la série $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k$ diverge pour $|z| = 1$.

PARTIE III - DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE

III.A.1 On sait que $\frac{\ln(1-t)}{t} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n+1}$ et le rayon de convergence vaut 1.

III.A.2 On fait une intégration par parties $\begin{cases} u = \ln t & du = \frac{dt}{t} \\ dv = t^{n-z} dt & v = \frac{t^{n-z+1}}{n-z+1} \end{cases}$

$$\text{d'où } u_n(z) = \underbrace{\left[\frac{t^{n-z+1}}{n-z+1} \ln t \right]_0^1}_{=0} - \frac{1}{n-z+1} \int_0^1 t^{n-z} dt = \frac{-1}{(n-z+1)^2}.$$

III.A.3 $F(z) = -\int_0^1 t^z \ln t \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n+1} dt$. Soit $g_n(t) = \frac{t^{n-z}}{n+1} (-\ln t)$ alors $|g_n(t)| = \frac{t^{n-x}}{n+1} (-\ln t)$

où $x = \text{Re}(z)$. Or $\int_0^1 |g_n(t)| dt = \frac{1}{(n+1)(n-x+1)^2}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 |g_n(t)| dt$ converge donc, en vertu du théorème d'interversion de \sum et \int on a bien

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 g_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+1-z)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n-z)^2}.$$

III.B.1 Soit $h_n(u) = \frac{1}{n(n-u)^2}$ pour $u < 1$ alors $\int_{-\infty}^x h_n(u) du = \frac{1}{n(n-x)}$.

Pour $x \in I$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-\infty}^x h_n(u) du$ converge et les fonctions h_n sont ≥ 0 , on peut, là

aussi intervertir \sum et \int d'où

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x F(u) du = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-\infty}^x h_n(u) du = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n-x)}$$

$$\text{et } \Phi(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

III.B.2 Pour $0 < x < 1$ on a $0 \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-x)} \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ (série convergente) d'où

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)\Phi(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 1 + (1-x) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-x)} = 1$$

$$\text{d'où } \Phi(x) \underset{1}{\sim} \frac{1}{1-x}.$$

III.C.1 $H(y) = F(iy) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n-iy)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(y).$

$$\text{Or } |f_n(y)| = \frac{1}{n(n^2+y^2)} \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(y)| dy = \frac{1}{n^2} \left[\text{Arctan} \frac{y}{n} \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{n^2}.$$

La série $\sum \int_{\mathbb{R}} |f_n|$ converge donc on peut lui appliquer le théorème de Lebesgue d'interversion intégrale et sommation. $|H|$ est alors intégrable sur \mathbb{R} et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(y) dy = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{(n-iy)^2}}_{=0} = 0.$$

Ensuite $|H(y)|^2 \leq |H(y)| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n^2+y^2)} \leq |H(y)| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ donc $|H|^2$ est intégrable car $|H|$ l'est.

III.C.2 Étudions la convergence de $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^\alpha(m+n)^\beta}.$

Si $\alpha + \beta \leq 1$ alors $\frac{1}{m^\alpha(m+n)^\beta} \sim \frac{1}{m^{\alpha+\beta}}$, cette série diverge donc une condition nécessaire pour que la somme $S(\alpha, \beta)$ soit définie est que $\alpha + \beta > 1$, ce que l'on suppose par la suite.

On va chercher un équivalent de $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^\alpha(m+n)^\beta}$ et on utilise pour cela le théorème de comparaison série-intégrale avec $f(x) = \frac{1}{x^\alpha(x+n)^\beta}$. $f'(x) = -\frac{(\alpha+\beta)x + \alpha n}{x^{\alpha+1}(x+n)^{\beta+1}}.$

- Si $\alpha \geq 0$ alors f est décroissante donc $I_n \leq \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^\alpha(m+n)^\beta} \leq \frac{1}{(1+n)^\beta} + I_n$ où

$$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(x+n)^\beta}. \text{ On fait le changement de variable } y = nx \text{ dans } I_n \text{ on a}$$

$$I_n = \frac{1}{n^{\alpha+\beta-1}} \int_{1/n}^{+\infty} \frac{dy}{y^\alpha(y+1)^\beta}.$$

$$\text{– Si } \alpha < 1 \text{ alors } I_n \sim \frac{1}{n^{\alpha+\beta-1}} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{dy}{y^\alpha(y+1)^\beta}}_{=I} \text{ donc } \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^\alpha(m+n)^\beta} \sim$$

$$\frac{I}{n^{\alpha+\beta-1}} \text{ i.e. } S(\alpha, \beta) < +\infty \text{ ssi } 2\alpha + \beta - 1 > 1.$$

– Si $\alpha > 1$ alors, avec le théorème d'intégration des relations de comparaison,

$$\begin{aligned} \int_{1/n}^{+\infty} \frac{dy}{y^\alpha(y+1)^\beta} &= \int_{1/n}^1 \frac{dy}{y^\alpha(y+1)^\beta} + \int_1^{+\infty} \frac{dy}{y^\alpha(y+1)^\beta} \\ &\sim \int_{1/n}^1 \frac{dy}{y^\alpha} \sim \frac{n^{\alpha-1}}{\alpha-1}. \end{aligned}$$

d'où $I_n \sim \frac{1}{n^{\alpha+\beta-1}} \frac{n^{\alpha-1}}{\alpha-1} = \frac{1}{(\alpha-1)n^\beta}$ et donc la condition $\alpha + \beta > 1$ suffit à faire converger $S(\alpha, \beta)$.

Remarque : on peut se passer du théorème cité ci-dessus (qui n'est plus au programme) en utilisant l'encadrement $1 \leq y \leq 2$ pour $y \in [0, 1]$ et intégrer les inégalités ainsi obtenues (mais il faut alors distinguer les cas $\beta \geq 0$ et $\beta < 0$).

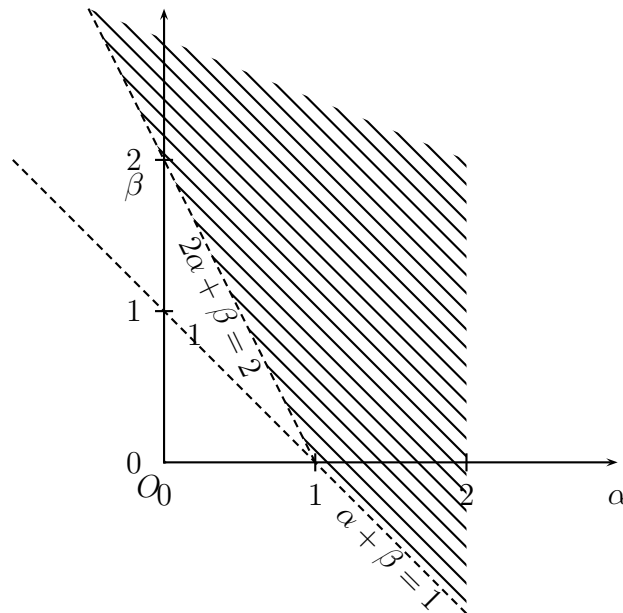
– Si $\alpha = 1$, le raisonnement ci-dessus nous donne $I_n \sim \frac{\ln n}{n^\beta}$ et la comparaison avec les séries de Bertrand nous donne là encore la convergence de $S(\alpha, \beta)$ pour $\alpha + \beta > 1$.

- Si $\alpha < 0$ on pose $\gamma = \frac{-\alpha}{\alpha + \beta}$ alors, par le même genre d'argument que ci-dessus, on

obtient
$$\sum_{m=[\gamma n]+1}^{+\infty} \frac{1}{m^\alpha(m+n)^\beta} \sim \int_{\gamma n}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(x+n)^\beta} \sim \frac{1}{n^{\alpha+\beta-1}} \int_{\gamma}^{+\infty} \frac{dy}{y^\alpha(y+1)^\beta}.$$

Or $\sum_{m=1}^{[\gamma n]} \frac{1}{m^\alpha(m+n)^\beta} = \frac{1}{n^{\alpha+\beta-1}} S_n$ où $S_n = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{[\gamma n]} h\left(\frac{m}{n}\right)$ avec $h(t) = \frac{1}{t^\alpha(1+t)^\beta}$. On reconnaît à peu de choses près une somme de Riemann qui admet comme limite
$$\int_0^\gamma \frac{y^{-\alpha} dy}{(y+1)^\beta}.$$

Finalement $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^\alpha(m+n)^\beta} \sim \frac{1}{n^{\alpha+\beta-1}} \int_0^{+\infty} \frac{y^{-\alpha} dy}{(y+1)^\beta}$. On se retrouve en fait dans le cas où $\alpha < 1$ traité ci-dessus d'où le domaine de convergence :



III.C.3 On décompose la fraction rationnelle

$$\frac{1}{(y+im)^2(y-in)^2} = \frac{1}{(m+n)^3} \left[-\frac{m+n}{(y+im)^2} - \frac{(m+n)}{(y-in)^2} + \frac{2i}{y+im} - \frac{2i}{y-in} \right].$$

On remarque ensuite que, pour $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{(y+a)^2} = 0$ (cf. **III.C.1**) et, pour $b \in \mathbb{R}^*$,

$$\int_{-X}^X \frac{dy}{y+ib} = \left[\frac{1}{2} \ln(y^2 + b^2) \right]_{-X}^X - i \left[\operatorname{Arctan} \frac{y}{a} \right]_{-X}^X \rightarrow -2\varepsilon i\pi$$

où ε est du signe de b .

Finalement
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{(y+im)^2(y-in)^2} = \frac{4\pi}{(m+n)^3}.$$

$$\begin{aligned} |H(y)|^2 &= \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m(m-iy)^2} \times \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+iy)^2} = \sum_{m,n \geq 1} \frac{1}{mn} \frac{1}{(y+im)^2(y-in)^2} \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \underbrace{\sum_{1 \leq m,n \leq N} \frac{1}{mn} \frac{1}{(y+im)^2(y-in)^2}}_{=H_N(y)}. \end{aligned}$$

Or $\int_{-\infty}^{+\infty} H_N(y) dy = \sum_{1 \leq m,n \leq N} \frac{4\pi}{mn(m+n)^3}$ qui est une somme convergente vers $S(1,3)$.

Ensuite on applique le théorème de convergence dominée car

- $0 \leq H_N(y) \leq |H(y)|^2$ qui est intégrable sur \mathbb{R} ,
- $\lim_{N \rightarrow +\infty} H_N(y) = |H(y)|^2$

d'où, en conclusion :
$$\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(y)|^2 dy = S(1,3).$$

III.D.1 Si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}^*$ alors chaque quantité $\frac{1}{n(n-z)^2}$ est définie et comme $\left| \frac{1}{n(n-z)^2} \right| \sim \frac{1}{n^3}$,

la série définissant F converge absolument. Le domaine $\tilde{\Omega}$ est donc égal à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{N}^*$ (c'est l'ensemble maximal sur lequel F peut être définie).

Sur $\tilde{\Omega}$ on a $F(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n-x-iy)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} F_n(x,y)$ et, par une récurrence immédiate,

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} F_n(x,y) = \frac{i^l (k+l+1)!}{n(n-x-iy)^{k+l+2}}.$$

Soit $\Omega_p = \{z \in \mathbb{C} \mid d(z, \mathbb{N}) > \frac{1}{p}, x < p\}$ pour $p \in \mathbb{N}^*$. On a alors $\left| \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} F_n(x,y) \right| \leq \frac{1}{n} \frac{(k+l+1)!}{(n-p)^{k+l+2}}$ donc la série $\sum \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} F_n$ converge normalement sur Ω_p , F est donc de

classe \mathcal{C}^∞ sur Ω_p pour tout p et par conséquent F est de classe \mathcal{C}^∞ sur $\tilde{\Omega} = \bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} \Omega_p$.

III.D.2 $|z-n|^2 = (x-n)^2 + y^2 \geq (n-n_0)^2$ d'où, en posant $a = z' - n$ et $b = z - n$ alors

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{a^p} - \frac{1}{b^p} \right| &= |b-a| \times \left| \frac{1}{a^p b} + \frac{1}{a^{p-1} b^2} + \dots + \frac{1}{ab^p} \right| \\ &\leq |b-a| \left(\frac{1}{|a|^p |b|} + \frac{1}{|a|^{p-1} |b|^2} + \dots + \frac{1}{|a| |b|^p} \right) \leq \frac{p|z-z'|}{(n-n_0)^{p+1}}. \end{aligned}$$

III.D.3 Soit (z_q) une suite de complexes de $\tilde{\Omega}$ qui tend vers z et n_0 un entier $\geq \operatorname{Re}(z_q)$ pour tout q alors, en posant $f_n(z_q) = \frac{1}{n(z-z_q)} \left[\frac{1}{(z_q-n)^2} - \frac{1}{(z-n)^2} \right]$, on a

$$\frac{F(z_q) - F(z)}{z_q - z} = \sum_{n=1}^{n_0} f_n(z_q) + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} f_n(z_q).$$

- $\lim_{z_q \rightarrow z} f_n(z_q) = \frac{-2}{(z-n)^3}$,
- $|f_n(z_q)| \leq \frac{2|z-z_q|}{(n-n_0)^3} \leq \frac{2M}{(n-n_0)^3}$ où M est un majorant des $|z-z_q|$.

La série $\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} f_n(z_q)$ converge normalement donc on peut intervertir la limite sur q et la sommation d'où

$$\lim_{z_q \rightarrow z} \frac{F(z_q) - F(z)}{z_q - z} = -2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(z-n)^3} = DF(z).$$

La récurrence est alors immédiate vu la majoration du **III.D.2** qui assure la convergence normale.

Finalement : $D^k F(z) = (k+1)! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n-z)^{k+2}}$.

III.E.1 On utilise la formule du **III.A.3**. Pour $|z| < 1$ on a

$$\frac{1}{(n-z)^2} = \frac{1}{n^2} \frac{1}{(1-\frac{z}{n})^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) \frac{z^k}{n^k}.$$

- La série des modules converge vers $\frac{1}{(n-|z|)^2}$,
- la série $\sum \frac{1}{n(n-|z|)^2}$ converge

on peut donc utiliser le théorème d'interversion des séries qui dit que

$$F(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) \frac{z^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) z^k \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{k+3}}.$$

On a ainsi $c_k = (k+1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{k+3}}$.

III.E.2 Pour $k \in \mathbb{N}$ on a $\frac{1}{n^{k+3}} \leq \frac{1}{n^3}$ donc la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{k+3}}$ converge normalement et par conséquent

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{k+3}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{k+3}} = 1$$

et en conclusion : $c_k \sim k$.

Remarque : on pouvait aussi utiliser le théorème de comparaison série-intégrale.