

# MATHÉMATIQUES I

Dans tout le problème  $I$  désigne un intervalle non majoré de  $\mathbb{R}$ .

Le but du problème est l'étude des solutions de l'équation différentielle

$$E_f : y' - y + f(x) = 0$$

où  $f$  est une application continue définie sur  $I$  et à valeurs réelles ou complexes.

On verra que l'espace des solutions contient une solution  $f_1$  ayant un comportement particulier en  $+\infty$ .

Les parties I et II portent sur deux exemples. La partie III met en place l'application  $\Phi : f \mapsto f_1$  dans un cadre général. Les Parties IV à VI envisagent diverses propriétés de la fonction  $f$  et sont largement indépendantes.

Les symboles  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$  désignent respectivement les corps des nombres réels et des nombres complexes.

## *Partie I - Étude d'un premier exemple*

**I.A** - Pour  $x \in \mathbb{R}$ , montrer l'existence et donner la valeur des expressions suivantes :

$$e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} \cos t \, dt, \quad e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} \sin t \, dt$$

**I.B** - On considère l'équation différentielle

$$y' - y + \cos x = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

Déterminer une fonction  $Y_0$  bornée et une fonction  $g$  telles que la solution générale sur  $\mathbb{R}$  de cette équation différentielle puisse se mettre sous la forme

$$Y_\lambda(x) = \lambda g(x) + Y_0(x), \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}$$

Donner sans démonstration le résultat analogue relatif à l'équation différentielle  $y' - y + \sin x = 0$ .

**I.C** - Soit  $\Pi$  le plan vectoriel engendré par les fonctions *cosinus* et *sinus* dans l'espace vectoriel des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , c'est-à-dire l'ensemble des fonctions de la forme

$$x \mapsto \alpha \cos x + \beta \sin x$$

# Filière MP

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des nombres réels. Pour tout  $f \in \Pi$ , on définit  $f_1$  par la formule

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt$$

I.C.1) Montrer que la transformation  $f \mapsto f_1$  définit une application  $\Phi : \Pi \rightarrow \Pi$ . La linéarité de  $\Phi$  étant considérée comme évidente, donner la matrice de  $\Phi$  dans la base de  $\Pi$  constituée des fonctions *cosinus* et *sinus*.

I.C.2) On munit  $\Pi$  de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$$

Déterminer une constante  $k > 0$  telle que, pour tout  $f \in \Pi$ , on ait

$$\|f_1\|_\infty \leq k \|f\|_\infty$$

Pour  $f \in \Pi$ , on définit par récurrence la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  où  $f_1 = \Phi(f)$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_{n+1} = \Phi(f_n)$ .

Étudier l'existence de la limite de cette suite relativement à la norme définie sur  $\Pi$  et déterminer la valeur de cette limite.

## Partie II - Étude d'un deuxième exemple

On donne, pour  $x > 0$ , l'équation différentielle

$$y' - y + \frac{1}{x} = 0.$$

**II.A** - Montrer qu'il existe sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  une unique solution  $Y_0$  bornée quand  $x$  tend vers l'infini et exprimer  $Y_0(x)$  sous forme d'une intégrale.

Quelle expression donner à la solution générale  $Y_\lambda$ , où  $\lambda \in \mathbb{R}$ , l'indexation étant telle que pour  $\lambda = 0$ , on ait la solution bornée  $Y_0$  ? Étudier le comportement de  $Y_\lambda(x)$  lorsque  $x$  tend vers 0 par valeurs positives.

On note  $\mathcal{C}_\lambda$  la courbe représentative de la solution  $Y_\lambda$ .

**II.B** - Pour tout point  $m(x_m, y_m)$  du demi-plan  $x > 0$ , on note  $Y_m$  la solution de l'équation vérifiant  $Y_m(x_m) = y_m$  et  $\mathcal{C}_m$  sa courbe représentative.

II.B.1) Déterminer l'ensemble  $\mathcal{H}$  des points  $m$  tels que  $Y'_m(x_m) = 0$ . Même question pour l'ensemble  $\mathcal{I}$  des  $m$  tels que  $Y''_m(x_m) = 0$ . Donner sans démonstration une interprétation géométrique pour chacun des ensembles  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{I}$ .

II.B.2) Quelle est la place de la courbe  $\mathcal{C}_0$  représentative de la solution  $Y_0$  par rapport aux courbes  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{I}$  ?

(on pourra faire des intégrations par parties sur  $Y_0(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ ).

II.B.3) Tracer sans explication sur un même dessin des ébauches des courbes  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{I}$ ,  $\mathcal{C}_0$ ,  $\mathcal{C}_{\lambda_1}$ ,  $\mathcal{C}_{\lambda_2}$ , où  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont des réels respectivement négatif et positif.

### Partie III - La transformation $\Phi$

On suppose maintenant que  $I$  est un intervalle ouvert de la forme  $]a, +\infty[$ ,  $a$  pouvant être égal à  $-\infty$ .

Dans le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathcal{E}^0(I, \mathbb{C})$  des fonctions continues sur  $I$  à valeurs complexes, on considère le sous-ensemble

$$\mathcal{E} = \left\{ f \mid \exists \alpha \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha} = 0 \right\}$$

Autrement dit,  $\mathcal{E}$  est l'ensemble des fonctions  $f$  négligeables en  $+\infty$  devant une certaine fonction puissance  $x \mapsto x^\alpha$  ( $\alpha$  dépendant de  $f$ ).

III.A - Montrer que  $\mathcal{E}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{E}^0(I, \mathbb{C})$

Étant donné  $f \in \mathcal{E}$  et  $x \in I$ , on considère l'équation différentielle

$$E_f: y' - y + f(x) = 0$$

III.B - Montrer que  $E_f$  admet une unique solution  $f_1 \in \mathcal{E}$  définie par la formule

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt.$$

On définit l'application  $\Phi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  par  $\Phi(f) = f_1$ ; elle est évidemment linéaire.

III.C - Soit  $\Phi^n$  la composée  $n$  fois de  $\Phi$  avec elle-même. Pour  $f \in \mathcal{E}$ , on pose  $f_n = \Phi^n(f)$  (avec  $f_0 = f = \Phi^0(f)$ ). Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) la suite  $(f_n)$  converge uniformément sur tout compact de  $I$ ,
- (ii) la suite  $(f_n)$  converge uniformément vers une constante sur tout compact de  $I$ ,
- (iii) la série  $\sum f_n$  converge uniformément sur tout compact de  $I$ .

**III.D** - Montrer que

$$\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}^*, f_{n+1}(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} f(t) e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{n!} f(x+u) e^{-u} du$$

(on pourra raisonner par récurrence en écrivant  $f_{n+1} = \Phi^n(f_1)$  et intégrer par parties).

**III.E** - L'application linéaire

$$\Phi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}, f \mapsto f_1$$

est-elle injective ? Montrer que l'image de  $\Phi$  est l'ensemble des applications  $g \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{C})$  telles que  $g \in \mathcal{E}$  et  $g' \in \mathcal{E}$ .

**Partie IV - Fonctions bornées**

Soit  $\mathcal{B}$  l'espace des fonctions continues bornées sur  $\mathbb{R}$  à valeurs complexes.  $\mathcal{B}$  étant un sous espace vectoriel de  $\mathcal{E}$  (défini au III), l'application  $\Phi$  est définie sur  $\mathcal{B}$ .

**IV.A** - Montrer que pour tout  $f \in \mathcal{B}$ , l'équation différentielle  $E_f$  a une unique solution bornée  $f_1$ .

**IV.B** - On munit  $\mathcal{B}$  de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)|, t \in \mathbb{R}\}$$

L'application  $\Phi$  est-elle continue pour cette norme ?

**IV.C** - Soit  $\mathcal{L}$  (resp.  $\mathcal{L}_0$ ) le sous-espace de  $\mathcal{B}$  des fonctions ayant une limite (resp. une limite nulle) en  $+\infty$ ,  $\mathcal{K}$  le sous-espace des fonctions constantes. Montrer que  $\mathcal{L}_0$  et  $\mathcal{K}$  sont des sous-espaces supplémentaires de  $\mathcal{L}$ .

Montrer que ces sous-espaces sont stables par  $\Phi$ .

**IV.D** - Montrer, à l'aide du III.D, que pour tout  $f \in \mathcal{L}$ , la suite  $(f_n)$  converge uniformément sur tout intervalle  $[\alpha, +\infty[$  vers une constante que l'on précisera (couper l'intervalle d'intégration en exprimant que  $f$  a une limite en  $+\infty$ ).

**IV.E** - Montrer que l'application linéaire  $\Phi: f \mapsto f_1$  est une injection de  $\mathcal{B}$  dans le sous-espace des fonctions bornées de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

L'application  $x \mapsto \sin(x^2)$  est-elle dans l'image de  $\Phi$  ? Préciser l'image de  $\Phi$ .

## Partie V - Fonctions périodiques

Soit  $\mathcal{P}$  l'espace des fonctions continues  $2\pi$ -périodiques.

**V.A** - Montrer que pour tout  $f \in \mathcal{P}$ , l'équation différentielle  $E_f$  a une unique solution périodique  $f_1$ .

Cette fonction  $f_1$  est-elle somme de sa série de Fourier ?

**V.B** - Quel lien a-t-on entre les coefficients de Fourier complexes  $c_k(f)$  et  $c_k(f_1)$  ?

**V.C** - Soit  $\mathcal{P}_0$  le sous-espace des  $f \in \mathcal{P}$  dont la valeur moyenne

$$c_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt$$

est nulle et  $\mathcal{K}$  le sous-espace des fonctions constantes. Montrer que  $\mathcal{P}_0$  et  $\mathcal{K}$  sont des sous-espaces supplémentaires de  $\mathcal{P}$ .

Montrer que pour tout  $f \in \mathcal{P}$ , la suite  $(f_n)$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}$  vers une constante que l'on précisera.

**V.D** - Montrer que l'application linéaire  $\Phi : f \mapsto f_1$  est une bijection de  $\mathcal{P}$  sur le sous-espace  $\mathcal{P}_1$  des fonctions  $2\pi$ -périodiques de classe  $C^1$ .

**V.E** - On considère sur  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}_1$  les normes  $N_1$  et  $N_2$  suivantes :

$$N_1(f) = \int_0^{2\pi} |f(t)| dt, \quad N_2(f) = \sqrt{\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt}$$

Les applications  $\Phi$  et  $\Phi^{-1}$  sont-elles continues pour la norme  $N_1$  ? Même question pour la norme  $N_2$ .

## Partie VI - Fonctions polynomiales

Soit  $d$  un entier naturel et  $\mathcal{FP}_d$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension  $d+1$  des fonctions polynomiales de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à  $d$ .

**VI.A** - Soit une famille  $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_d)$  de  $d+1$  nombres réels distincts. Pour tout  $f \in \mathcal{FP}_d$ , on pose

$$N_\xi(f) = \sup_{0 \leq i \leq d} |f(\xi_i)|$$

Montrer que c'est une norme sur  $\mathcal{FP}_d$ .

**VI.B** - Soit une suite de fonctions polynomiales de  $\mathcal{FP}_d$

$$x \mapsto f_n(x) = a_{d,n}x^d + a_{d-1,n}x^{d-1} + \dots + a_{0,n}$$

Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) la suite  $(f_n)$  converge simplement sur  $\mathbb{C}$ ,
- (ii) la suite  $(f_n)$  converge uniformément sur tout compact de  $\mathbb{C}$ ,
- (iii) il existe  $d+1$  nombres réels distincts  $\xi_0, \dots, \xi_d$  tels que, pour tout indice  $0 \leq i \leq d$ , la suite  $(f_n(\xi_i))$  converge.
- (iv) chacune des  $d+1$  suites numériques  $(a_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$ , pour  $0 \leq i \leq d$ , converge.

**VI.C** - Pour tout  $f \in \mathcal{FP}_d$ , montrer que l'équation différentielle  $E_f$  a une unique solution  $f_1 = \Phi(f)$  dans  $\mathcal{FP}_d$ .

On note encore  $\Phi: f \mapsto f_1$  ;  $\Phi$  est considéré ici comme un endomorphisme de  $\mathcal{FP}_d$ .

**VI.D** - Pour  $f$  fonction polynomiale de degré  $d$ , on forme la suite de fonctions polynomiales  $(f_n)$  où  $f_n = \Phi^n(f)$ . Cette suite vérifie-t-elle les conditions équivalentes de VI.B ?

---

••• FIN •••

---