

Concours Centrale - Supélec 2002

Épreuve : MATHÉMATIQUES II

Filière MP

E désigne l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 muni de sa structure euclidienne canonique et orienté de sorte que la base canonique, notée $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, soit orthonormale directe.

On a donc pour tout x, y et z réels : $(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Le produit scalaire sera noté $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

Si \mathbf{u} est un vecteur non nul élément de E , on note $D_{\mathbf{u}}$ la droite vectorielle de base \mathbf{u} , $P_{\mathbf{u}}$ le plan vectoriel orthogonal à $D_{\mathbf{u}}$, et $S_{\mathbf{u}}$ le demi-tour par rapport à $D_{\mathbf{u}}$ c'est-à-dire la symétrie orthogonale par rapport à $D_{\mathbf{u}}$ ou encore la rotation vectorielle d'axe $D_{\mathbf{u}}$ et d'angle de mesure π .

Si θ est un nombre réel, on note R_{θ} la rotation vectorielle d'axe $D_{\mathbf{k}}$ orientée dans le sens du vecteur \mathbf{k} et d'angle de mesure θ .

On rappelle qu'une rotation vectorielle de E ayant -1 comme valeur propre est un demi-tour.

On rappelle également l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}), \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2$$

et l'on admet que dans cette inégalité, l'égalité a lieu si et seulement si les deux vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} sont colinéaires.

Partie I - Étude d'un cas particulier

Pour tout (x, y, z) élément de E , on pose : $q(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ et l'on note Q_0 l'ensemble suivant : $Q_0 = \{(x, y, z) \in E \mid q(x, y, z) = 0\}$.

I.A - Une étude de Q_0 .

I.A.1) Déterminer quelques éléments de symétrie de Q_0 .

I.A.2) Déterminer et dessiner l'intersection de Q_0 avec le plan $P_{\mathbf{j}}$.

I.A.3) a) Démontrer que pour tout θ réel : $R_{\theta}(Q_0) \subset Q_0$.

b) En déduire que, pour tout θ réel, Q_0 est invariant par R_{θ} , c'est-à-dire : $R_{\theta}(Q_0) = Q_0$.

I.A.4) Donner la nature géométrique de Q_0 .

I.B - Automorphismes orthogonaux laissant $D_{\mathbf{u}}$ invariant

On note K l'ensemble des automorphismes orthogonaux de E qui laissent globalement invariant $D_{\mathbf{k}}$, c'est-à-dire : $K = \{q \in O(E) \mid q(D_{\mathbf{k}}) = D_{\mathbf{k}}\}$.

I.B.1) Donner quelques éléments de K .

I.B.2) Soit q un élément quelconque de K .

a) Démontrer que \mathbf{k} est un vecteur propre de q .

b) Démontrer : $q(\mathbf{k}) \in \{-\mathbf{k}, \mathbf{k}\}$.

c) Déterminer l'ensemble K^+ des rotations vectorielles éléments de K .

I.B.3) On pose $K^- = \{-r; r \in K^+\}$. Démontrer que $K = K^+ \cup K^-$.

I.C - Automorphismes orthogonaux laissant Q_0 invariant

On note K_0 l'ensemble des automorphismes orthogonaux de E qui laissent globalement invariant Q_0 , c'est-à-dire : $K_0 = \{q \in O(E) \mid q(Q_0) = Q_0\}$.

I.C.1) Démontrer que K_0 est un sous-groupe de $O(E)$.

- I.C.2) a) Reconnaître, pour tout θ réel, l'endomorphisme $R_\theta \circ S_i$.
 b) Démontrer : $K^+ \subset K_0$.
 c) Démontrer : $K \subset K_0$.
- I.C.3) Soit q un élément quelconque de K_0 .
 a) Démontrer que pour tout vecteur \mathbf{v} élément de Q_0 tel que : $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2}$, l'on a :
 $\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{k} \rangle^2 = 1$.
 b) On note \mathbf{u} un vecteur quelconque unitaire élément de $P_{\mathbf{k}}$.
 i) Observer que $\mathbf{u} + \mathbf{k} \in Q_0$, puis démontrer : $\langle q(\mathbf{u} + \mathbf{k}) \mid \mathbf{k} \rangle^2 = 1$.
 ii) En faisant intervenir le vecteur $\mathbf{u} - \mathbf{k}$, en déduire : $\langle q(\mathbf{u}) \mid \mathbf{k} \rangle \langle q(\mathbf{k}) \mid \mathbf{k} \rangle = 0$.
 iii) On suppose $\langle q(\mathbf{k}) \mid \mathbf{k} \rangle = 0$; démontrer qu'alors $q(\mathbf{u})$ est colinéaire à \mathbf{k} . Est-ce cohérent ?
 iv) En déduire : $q(P_{\mathbf{k}}) = P_{\mathbf{k}}$.
- I.C.4) Démontrer que $K_0 = K$.

I.D - Composition et invariance

On pose : $C = \{\varphi \in O(E) \mid q \circ \varphi = q\}$.

- I.D.1) Démontrer $C = K$.
- I.D.2) a) Justifier que q est une forme quadratique sur E et donner sa matrice M dans la base $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.
 b) Reconnaître l'endomorphisme σ de matrice M dans la base $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.
- I.D.3) Démontrer que tout élément φ de C commute avec σ , c'est-à-dire vérifie $\varphi \circ \sigma = \sigma \circ \varphi$.
- I.D.4) Soit φ un élément de $O(E)$ qui commute avec σ . Démontrer que \mathbf{k} est un vecteur propre de φ .
- I.D.5) En déduire que $C = \{\varphi \in O(E) \mid \sigma \circ \varphi = \varphi \circ \sigma\}$.

Partie II - Une généralisation

On note U un endomorphisme symétrique de E et l'on pose pour tout vecteur \mathbf{X} de E : $f(\mathbf{X}) = \langle \mathbf{X} \mid U(\mathbf{X}) \rangle$. Pour tout a réel, on pose : $F_a = \{\mathbf{X} \in E \mid f(\mathbf{X}) = a\}$.

On veut déterminer les endomorphismes U tels que toutes les surfaces F_a soient de révolution d'axe $D_{\mathbf{k}}$, c'est-à-dire tels que :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall \theta \in \mathbb{R}, R_\theta(F_a) = F_a \quad (*)$$

- II.A - Démontrer que (*) est équivalente à $\forall \theta \in \mathbb{R}, f \circ R_\theta = f$.
- II.B - On suppose ici : $\forall \theta \in \mathbb{R}, U \circ R_\theta = R_\theta \circ U$. Démontrer qu'alors (*) est vérifiée.
- II.C - On suppose maintenant que (*) est vérifiée et l'on veut démontrer : $\forall \theta \in \mathbb{R}, U \circ R_\theta = R_\theta \circ U$.
- II.C.1) Déterminer les endomorphismes symétriques V de E tels que :

$$\forall \mathbf{X} \in E, \langle \mathbf{X} \mid V(\mathbf{X}) \rangle = 0.$$

- II.C.2) Démontrer que si V et V' sont des endomorphismes symétriques de E , il en est de même de $V - V'$.
- II.C.3) Démontrer que pour tout réel θ l'endomorphisme $R_\theta^{-1} \circ U \circ R_\theta$ est symétrique.
- II.C.4) Conclure.

- II.D - On suppose que U commute avec toutes les rotations R_θ .

II.D.1) Démontrer que \mathbf{k} est un vecteur propre de U . En déduire : $U(P_{\mathbf{k}}) \subset P_{\mathbf{k}}$.

II.D.2) Démontrer que la matrice M de U dans la base $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ est du type :

$$M = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & c & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

II.D.3) En déduire que (*) est vérifiée si et seulement si M s'écrit : $M = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Que

vaut alors $f(x, y, z)$ pour tout (x, y, z) élément de E ?

II.E - Un résultat plus fort

On suppose dans cette section que F_1 est non vide et de révolution d'axe $D_{\mathbf{k}}$ c'est-à-dire que U est tel que :

$$\begin{cases} F_1 \neq \emptyset \\ \forall \theta \in \mathbb{R}, R_{\theta}(F_1) = F_1 \end{cases} \quad (1)$$

et on désigne par \mathbf{X} un vecteur quelconque de E .

II.E.1) On suppose $f(\mathbf{X}) > 0$: démontrer : $\forall \theta \in \mathbb{R}, f \circ R_{\theta}(\mathbf{X}) = f(\mathbf{X})$.

II.E.2) On suppose $f(\mathbf{X}) \leq 0$. On considère alors un vecteur \mathbf{X}_1 élément de F_1 et pour tout réel t , on pose $g(t) = f(\mathbf{X} + t\mathbf{X}_1)$.

a) Démontrer que g est une fonction polynomiale de degré 2 que l'on précisera.

En déduire qu'il existe un réel t_0 tel que :

$$\forall t \in [t_0, +\infty[, g(t) > 0.$$

b) Démontrer pour tout réel θ :

$$\forall t \in [t_0, +\infty[, f(\mathbf{X} + t\mathbf{X}_1) = f \circ R_{\theta}(\mathbf{X} + t\mathbf{X}_1).$$

En déduire que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, f(\mathbf{X}) = f \circ R_{\theta}(\mathbf{X}).$$

II.E.3) En déduire quels sont les endomorphismes symétriques U satisfaisant aux conditions (1) et reconnaître toutes les surfaces F_1 associées.