CNM Maths 2

Sous espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ formés de matrices diagonalisables

P Q

Corrigé

✍ **Remarques : :**

☞ La réciproque de la question 5 de l'exercice, la matrice A doit être non nulle.
☞ Dans la question 2.5.2 les matrices $A_1, \ldots, A_m$ sont **deux à deux distinctes**.
☞ La question 3.6.2, $A \in \mathcal{F} \setminus \mathbb{R}.I_2$.

Exercice 1.

$\boxed{1.}$ Soit λ une valeur propre de A, et V un vecteur propre associé , $V \neq 0$ et $AV = \lambda V$, on a donc ${}^tVAV = \lambda {}^tVV \geq 0$, donc $\lambda \geq 0$ (${}^tVV > 0$).

$\boxed{2.}$ La matrice A est symétrique, donc elle est orthogonalement diagonalisable, autrement dit ; il existe une matrice orthogonale P tel que $A = {}^tPDP$, où $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A. D'après le résultat de la question précédente, les valeurs propres de A sont toutes positives, notons alors Δ la matrice diagonale $\Delta = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$, et $M = {}^tP\Delta P$, on a donc ${}^tMM = {}^tP\Delta P {}^tP\Delta P = {}^tPDP = A$.

$\boxed{3.}$ $\boxed{3.1}$ Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Si $AX = 0$, alors ${}^tX {}^tMMX = 0$, ainsi ${}^t(MX)(MX) = 0$ ou encore $\langle MX, MX \rangle = 0$, donc $MX = 0$.
Si $MX = 0$, alors ${}^tMMX = 0$, donc $AX = 0$.

$\boxed{3.2}$ Dans la question précédente on a démontrer que $\ker A = \ker M$, par application de la formule du rang , on a $\operatorname{rg} A = n - \dim(\ker A) = n - \dim(\ker M) = \operatorname{rg} M$.

$\boxed{4.}$ $\boxed{4.1}$ ${}^tC_i$ est la i-ième ligne le la matrice M, et C_j la j-ième colonne de M, comme $a_{i,j}$ est le produit de la i-ième ligne de ${}^tM$ par la j-ième colonne de M, alors $a_{i,j} = {}^tC_iC_j = \langle C_i, C_j \rangle$.

$\boxed{4.2}$ D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $\langle C_i, C_j \rangle^2 \leq \langle C_i, C_i \rangle \langle C_j, C_j \rangle$, c'est-à-dire $a_{i,j}^2 \leq a_{i,i}a_{j,j}$.

$\boxed{5.}$ Si $\operatorname{rg} A = 1$, alors $\operatorname{rg}(C_1, \ldots, C_n) = \operatorname{rg} M = \operatorname{rg} A = 1$, ainsi pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ la famille (C_i, C_j) est liée, dans ce cas l'inégalité de Cauchy-Schwarz devienne une égalité c'est-à-dire $a_{i,j}^2 = a_{i,i}a_{j,j}$.
La réciproque n'est vraie, que si la matrice A est supposée non nul : Si de plus la matrice A est non nul : il existe i_0 tel que $C_{i_0} \neq 0$, si $j \in \{1, \ldots, n\}$, par hypothèse $\langle C_{i_0}, C_j \rangle^2 = a_{i_0,j}^2 = a_{i_0,i_0}a_{j,j} = \langle C_{i_0}, C_{i_0} \rangle \langle C_j, C_j \rangle$, c'est la cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, donc la famille (C_{i_0}, C_j) est liée, ainsi $\operatorname{Vect}(C_1, \ldots, C_n) = \operatorname{Vect}(C_{i_0})$, ce qui montre que $\operatorname{rg} M = 1$, et donc $\operatorname{rg} A = 1$.

Exercice 1. suite

6. 6.1 Si la matrice B est positive, et puisqu'elle est symétrique, en appliquant le résultat de la question 4.b, on a $b_{i,j}^2 \leq b_{i,i}b_{j,j}$, c'est-à-dire $a_{i,i}a_{j,j} \leq a_{i,j}^2$, d'autre part la matrice A étant symétrique positive, alors $a_{i,j}^2 \leq a_{i,i}a_{j,j}$, ce qui montre que $a_{i,j}^2 = a_{i,i}a_{j,j}$, d'où le résultat par application du résultat de la question 5 ($A \neq 0$).

6.2 On suppose que $\operatorname{rg} A = 1$ donc $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg}(C_1, \ldots, C_n) = 1$. Soit $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $\operatorname{Vect}(C_1, \ldots, C_n) = \operatorname{Vect}(V)$ évidemment $V \neq 0$, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$ il existe $\lambda_j \in \mathbb{R}$ tel que $C_j = \lambda_j V$, ainsi, pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $a_{i,j} = \langle C_i, C_j\rangle = \lambda_i\lambda_j\langle V, V\rangle = (\alpha\lambda_i)(\alpha\lambda_j)$ où $\alpha = \sqrt{\langle V, V\rangle}$. Le vecteur $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\lambda_1 \\ \vdots \\ \alpha\lambda_n \end{pmatrix}$ repend à la question.

$b_{i,j} = \dfrac{1}{a_{i,j}} = \dfrac{1}{u_i u_j} = \dfrac{1}{u_i}\dfrac{1}{u_j}$, donc $B = U'\,{}^tU'$ où $U' = \begin{pmatrix} \frac{1}{u_1} \\ \vdots \\ \frac{1}{u_n} \end{pmatrix}$, et si X est un vecteur colonne alors ${}^tXBX = {}^t({}^tU'X)({}^tU'X) \geq 0$.

PROBLÈME

Première partie : Caractérisation des homothétie en dimension 2 Application au commutant

1. 1.1 $f \in \mathcal{L}(E)$.

1.1.1 Soit $x \in E\backslash\{0\}$, la famille $(x, f(x))$ est liée avec x non nul, alors il existe $\lambda_x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$.

1.1.2 On a $f(e_1 + e_2) = \lambda_{e_1+e_2}(e_1 + e_2)$, d'autre part $f(e_1 + e_2) = f(e_1) + f(e_2) = \lambda_{e_1}e_1 + \lambda_{e_2}e_2$, donc $(\lambda_{e_1+e_2} - \lambda_{e_1})e_1 + (\lambda_{e_1+e_2} - \lambda_{e_2})e_2 = 0$, ce qui donne $\lambda_{e_1+e_2} = \lambda_{e_1} = \lambda_{e_2}$.

1.1.3 Soit $x = x_1e_1 + x_2e_2 \in E$, on a $f(x) = \lambda x_1e_1 + \lambda x_2e_2 = \lambda x$.

1.2 f un endomorphisme.

1.2.1 $0, f \in \mathcal{C}(f)$. Soit $g, h \in \mathcal{C}(f)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $(g + \lambda h)f = gf + \lambda hf = fg + \lambda fh = f(g + \lambda h)$, donc $g + \lambda h \in \mathcal{C}$.

1.2.2 Si f est une homothétie, tout endomorphisme de E commute avec f, ainsi $\mathcal{C}(f) = \mathcal{L}(E)$.

1.3 f un endomorphisme de E qui n'est pas une homothétie.

1.3.1 f n'est pas une homothétie, d'après la question 1.1, il existe $e \in E$ non nul tel que $(e, f(e))$ soit libre, comme $\dim E = 2$, cette famille est une base de E.

1.3.2 $g(e) \in E$, $(e, f(e))$ est une base de E, alors il existe un unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ tel que $g(e) = \alpha e + \beta f(e)$.
Supposons $g \in \mathcal{C}(f)$: d'une part $g(e) = \alpha e + \beta f(e) = \alpha\,\mathrm{Id}_E(e) + \beta f(e) = (\alpha\,\mathrm{Id}_E + \beta f)(e)$, d'autre part $g(f(e)) = f(g(e)) = f(\alpha e + \beta f(e)) = \alpha f(e) + \beta f(f(e)) = (\alpha\,\mathrm{Id}_E + \beta f)(f(e))$, donc les deux endomorphismes g et $\alpha\,\mathrm{Id}_E + \beta f$ coïncident sur la base $(e, f(e))$, ainsi

$g = \alpha \operatorname{Id}_E + \beta f$.
Réciproquement, si $g = \alpha \operatorname{Id}_E + \beta f$, et comme $\mathscr{C}(f)$ est un sous espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ et $\operatorname{Id}_E, f \in \mathscr{C}(f)$, alors $g \in \mathscr{C}(f)$.

$\boxed{1.3.3}$ D'après ce qui précède, on a $\mathscr{C}(f) = \operatorname{Vect}(\operatorname{Id}_E, f)$, comme f n'est pas une homothétie, ceci signifie que la famille (Id_E, f) est libre donc base de $\mathscr{C}(f)$, en particulier $\dim \mathscr{C}(f) = 2$.

$\boxed{1.4}$

$\boxed{1.4.1}$ Si A est une matrice scalaire, alors toute matrice commute avec A, ainsi $\mathscr{C}(A) = \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.

$\boxed{1.4.2}$ Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A, A n'est pas une matrice scalaire, donc f n'est une homothétie, soit $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ et g l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice B ; B commute avec A si, et seulement si, g commute avec f si, et seulement si, $g = \alpha \operatorname{Id}_E + \beta f$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,si, et seulement si, $B = \alpha I_2 + \beta A$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, d'où $\mathscr{C}(A) = \operatorname{Vect}(I_2, A)$, A n'est pas une matrice scalaire, donc la famille (I_2, A) est libre , donc base de $\mathscr{C}(A)$, en particulier $\dim \mathscr{C}(A) = 2$.

Deuxième partie :
Diagonalisation simultanée dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$

$\boxed{2.}$ $\boxed{2.1}$ Si $a \neq c$: Dans ce cas la matrice A possède deux valeurs propres distincts (a et c), donc diagonalisable.
Si $a = c$ et $b = 0$: Dans ce cas la matrice A est diagonale, donc diagonalisable.
Si $a = c$ et $b \neq 0$: Dans ce cas la seule valeur propre de A est a, son polynôme minimal est $(X-a)^2$ (car $X - a$ n'est pas annulateur), donc n'est pas diagonalisable.
Conclusion : A est diagonalisable si, et seulement si, $a \neq c$ ou $a = c$ et $b = 0$.

$\boxed{2.2}$ La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$. D'après la question précédente.

$\boxed{2.3}$ Si A est diagonalisable, il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D , telles que $A = PDP^{-1}$, donc $A + \lambda I_2 = P(D + \lambda I_2)P^{-1}$, ainsi $A + \lambda I_2$ est diagonalisable.
Si $A + \lambda I_2$ est diagonalisable, il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D, tel que $A + \lambda I_2 = PDP^{-1}$, donc $A = P(D - \lambda I_2)P^{-1}$, ainsi A est diagonalisable.

$\boxed{2.4}$ A et B diagonalisables, avec $AB = BA$.

$\boxed{2.4.1}$ Si A est une matrice scalaire : il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = \lambda I_2$, B étant diagonalisable, soit P une matrice inversible et Δ diagonale, tels que $PBP^{-1} = \Delta$, on a aussi $PAP^{-1} = \lambda I_2$, donc les deux matrices A et B sont simultanément diagonalisables.
Si A n'est pas une matrice scalaire : A commute avec B donc $B \in \mathscr{C}(A) = \operatorname{Vect}(I_2, A)$ (question 1.4.2), il existe alors $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tels que $B = \alpha I_2 + \beta A$, soit maintenant P une matrice inversible , tel que $D = PAP^{-1}$ soit diagonale, alors $PBP^{-1} = \alpha I_2 + \beta D$ est aussi diagonale.

$\boxed{2.4.2}$ Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, d'après le résultat de la question précédente, il existe une matrice P inversible, tel que les matrices $D = PAP^{-1}$ et $\Delta = PBP^{-1}$ soient diagonales, on a donc $P(A + \lambda B)P^{-1} = D + \lambda \Delta$ qui est diagonale, ainsi la matrice $A + \lambda B$ est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.

$\boxed{2.5}$

$\boxed{2.5.1}$ Si toutes les matrices sont scalaires : Le résultat est trivial ; par exemple $P = I_2$ repend à la question.
S'il existe $k \in I$ tel que A_k n'est pas une matrice scalaire : Dans ce cas $\mathscr{C}(A_k) = \operatorname{Vect}(I_2, A_k)$,

et pour tout $i \in I$, $A_i \in \mathscr{C}(A_k) = \text{Vect}(I_2, A_k)$, donc, pour tout $i \in I$, il existe $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{K}$ tels que $A_i = \alpha_i I_2 + \beta_i A_k$. Comme la matrice A_k est diagonalisable, il existe une matrice inversible P tel que $D_k = PA_kP^{-1}$ soit diagonale, on en déduit alors que pour tout $i \in I$, la matrice $PA_iP^{-1} = \alpha_i I_2 + \beta_i D_k$ est diagonale, d'où le résultat.

2.5.2 Les matrices $A_1, \ldots, A_m$ sont **deux à deux distinctes :** D'après le résultat de la question précédente, il existe une matrice inversible P tel que , pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, la matrice $D_i = PA_iP^{-1}$ est diagonale, puisque $A_i^2 = I_2$ pour $1 \leq i \leq m$, alors le polynôme $X^2 - 1$ est annulateur de A_i, ainsi, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, $\text{Sp}(A_i) \subset \{-1, 1\}$. Donc chaque matrice D_i est de la forme $\text{diag}(\pm 1, \pm 1)$, il vient alors que
$D_i \in \left\{\text{diag}(1,1) = I_2, \text{diag}(1,-1), \text{diag}(-1,-1), \text{diag}(-1,1)\right\}$,
par suite , pour tout $1 \leq i \leq m$ on a ;
$A_i \in \{I_2, P^{-1}\text{diag}(1,-1)P, P^{-1}\text{diag}(-1,-1)P, P^{-1}\text{diag}(-1,1)P\}$. Si les matrices $A_1, \ldots, A_m$ sont supposées deux à deux distincts, alors $m \leq 4$, sinon !!!!!!!!!!!!!?

2.6

2.6.1 Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la matrice $J + \lambda K$ est symétrique réelle, donc diagonalisable.

2.6.2 $JK = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & d \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & d \end{pmatrix} = KJ$

2.7

2.7.1 B étant diagonalisable, donc il existe une matrice inversible P et deux complexes α, β tel que $B = P\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}P^{-1}$, et comme B n'est pas une matrice scalaire, alors $\alpha \neq \beta$ (car si $\alpha = \beta$ alors $B = \alpha I_2$ matrice scalaire).

2.7.2 $\delta_\lambda = \gamma^2\lambda^2 + 2\lambda\gamma(d-a) + (a-d)^2 + 4bc$. Puisque $\gamma^2 \neq 0$, alors δ_γ est un polynôme de degré 2 en λ.

2.7.3 δ_λ est un polynôme de degré 2 en λ, alors il existe $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\delta_{\lambda_0} = 0$, ainsi le polynôme caractéristique χ_{λ_0} admet une seule racine r, ceci montre que r est l'unique valeur propre de la matrice $A + \lambda_0(B - \alpha I_2) = A + \lambda_0 B - \alpha I_2$ qui est diagonalisable (par hypothèse $A + \lambda_0 B$ diagonalisable, et à l'aide la question 2.3). Il existe alors une matrice inversible Q tel que $Q(A + \lambda_0(B - \alpha I_2))Q^{-1} = rI_2$, autrement dit $A + \lambda_0(B - \alpha I_2) = rI_2$. D'où le résultat.

2.7.4 $A + \lambda_0(B - \alpha I_2) = rI_2$, donc $A = (r + \alpha\lambda_0)I_2 - \lambda_0 B$, par suite les deux matrices A et B commutent.

Troisième partie :
Étude des sous espaces de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ formés de matrices diagonalisables

3.

3.1

3.1.1 On suppose que $\mathscr{F}$ contient une matrice A qui n'est pas scalaire.
Soit $B \in \mathscr{F}$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $B + \lambda A \in \mathscr{F}$, ainsi pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, la matrice $B + \lambda A$ est diagonalisable, puisque les deux matrices A et B sont diagonalisables avec A n'est pas scalaire, d'après le résultat de la question 2.7, les deux matrices A et B commutent, ce qui montre que $B \in \mathscr{C}(A)$, ainsi $\mathscr{F} \subset \mathscr{C}(A)$.
$\mathscr{F}$ sous espace vectoriel de $\mathscr{C}(A) = \text{Vect}(I_2, A)$ (A n'est pas scalaire), donc $1 \leq \dim(\mathscr{F}) \leq 2 = \dim\mathscr{C}(A)$, ou bien $\mathscr{F}$ est une droite vectorielle dans ce cas $\mathscr{F} = \text{Vect}(A)$ ($0 \neq A \in \mathscr{F}$) et sa dimension est égal à 1, ou bien un plan vectoriel et dans ce cas $\mathscr{F} = \mathscr{C}(A)$ et $\dim\mathscr{F} = 2$.

$\boxed{3.1.2}$ Dans le cas restant, toutes matrices de $\mathscr{F}$ est scalaires, c'est-à-dire tout élément de $\mathscr{F}$ est de la forme λI_2, et puisque $\mathscr{F}$ est non nul, il contient alors une matrice de la forme λI_2 avec $\lambda \neq 0$, en particulier il contient I_n, il vient alors que $\mathscr{F} = \text{Vect}(I_2)$. Dans ce cas il s'agit d'une droite vectorielle.

$\boxed{3.2}$ $\text{Vect}(I_2)$ sous espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ formé de matrices diagonalisables, et de dimension 1.

On pose $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors $\text{Vect}(I_2, M)$ est sous espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ de dimension 2 formé de matrices diagonalisables.

$\boxed{3.3}$ l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, donc si $\mathscr{M}$ est un sous espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, son image $P\mathscr{M}P^{-1}$ par cet endomorphisme est un sous espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. De plus l'endomorphisme précédent est un automorphisme, donc les deux sous espaces vectoriels $\mathscr{M}$ et $P\mathscr{M}P^{-1}$ ont même dimension.

$\boxed{3.4}$ Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, la matrice A est symétrique si, et seulement si, $a_{1,2} = a_{2,1}$ si, et seulement si, $a_{1,2} - a_{2,1} = 0$. On considère maintenant l'application $\varphi : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, définie pour tout $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, par $\varphi(A) = a_{1,2} - a_{2,1}$, c'est bien que φ est une forme linéaire non nul sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, de noyau $\ker\varphi = \mathscr{S}_2$, qui est alors un hyperplan de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. De plus toute matrice réelle symétrique est diagonalisable.

$\boxed{3.5}$ $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ est un hyperplan de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, il en est de même pour $R\mathscr{S}_2(\mathbb{R})R^{-1}$ (par 3.3), de plus un élément de $R\mathscr{S}_2(\mathbb{R})R^{-1}$ est de la forme RSR^{-1} qui est semblable à S où $S \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ diagonalisable. D'où le résultat.

$\boxed{3.6}$

$\boxed{3.6.1}$ Supposons que $I_2 \notin \mathscr{F}$.
On a donc $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) = \mathscr{F} \oplus \text{Vect}(I_2)$, et si $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, alors $M = A + \lambda I_n$, où A est une matrice appartenant à $\mathscr{F}$ qui est donc diagonalisable et $\lambda \in \mathbb{R}$, ceci montre que M est une matrice diagonalisable (question 2.3), ou encore toute matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est diagonalisable, ce qui n'est pas le cas. par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

$\boxed{3.6.2}$ Soit $A \in \mathscr{F} \backslash \mathbb{R}.I_2$. A diagonalisable et n'est pas scalaire, donc elle possède deux valeurs propres distinctes α et β, il existe aussi une matrice inversible Q tel que $A = Q\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}Q^{-1}$, mais $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = (\alpha - \beta)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta I_2$, ainsi $A = (\alpha-\beta)Q\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q^{-1} + \beta I_2$, on a donc $Q\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q^{-1} = \dfrac{1}{\alpha - \beta}A - \dfrac{\beta}{\alpha-\beta}I_2 \in \mathscr{F}$.

$\boxed{3.6.3}$ $\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = B - (a-b)A_1 - bI_2 \in \mathscr{W}$.

Si $\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \in \text{Vect}(I_2, A_1)$, alors $b = c = 0$ et dans ce cas la matrice $B \in \text{Vect}(I_2, A_1)$, ce qui n'est pas le cas. Donc $\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \notin \text{Vect}(I_2, A_1)$.

La matrice $\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable, et n'est pas scalaire, donc possède deux valeurs propres distinctes λ et γ, d'une part $\lambda + \gamma = \text{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}\right) = 0$, donc $\gamma = -\lambda$, et d'autre part $-\lambda^2 = \det\left(\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}\right) = -bc$, donc $bc > 0$.

$\boxed{3.6.4}$ $\dfrac{1}{c}\begin{pmatrix}0 & b\\ c & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \frac{b}{c}\\ 1 & 0\end{pmatrix} \in \mathscr{W}$, comme $bc > 0$, on a aussi $\dfrac{b}{c} > 0$, il suffit alors de prendre $w = \sqrt{\dfrac{b}{c}} > 0$.

Il est clair que la matrice $B_1 \notin \text{Vect}(I_2, A_1)$ (car n'est pas diagonale), donc la famille (I_2, A_1, B_1) est libre, ainsi base de $\mathscr{W}$ ($\dim \mathscr{W} = 3$), c'est bien que $\mathscr{W} = \text{Vect}(I_2, A_1, B_1)$.

$\boxed{3.6.5}$ $\chi_{B_1} = (X+w)(X-w)$, donc les valeurs propres de B_1 sont $-w$ et w.

$\begin{pmatrix}-w\\ 1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $-w$, et $\begin{pmatrix}w\\ 1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre w, on a donc :

$$B_1 = P_1 \,\text{diag}(-w, w) P_1^{-1}$$

où $P_1 = \begin{pmatrix}-w & w\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

On considère maintenant la matrice symétrique $S = \begin{pmatrix}0 & w\\ w & 0\end{pmatrix}$, dont les valeurs propres sont $-w$ et w, donc semblable à la matrice $\text{diag}(-w, w)$. Plus précisément $S = P_2 \,\text{diag}(-w, w) P_2^{-1}$ où $P_2 = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, on a donc $P_1^{-1} B P_1 = P_2^{-1} S P_2$ ou encore $S = P B_1 P^{-1}$ où $P = P_2 P_1^{-1}$, en fait $P = \dfrac{-1}{2w}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -w\\ -1 & -w\end{pmatrix} = \text{diag}(\frac{1}{w}, 1)$, d'autre part on a $P I_2 P^{-1} = I_2$ et $P A_1 P^{-1} = A_1$ (deux matrices diagonales commutent).

<u>En résume :</u> $P I_2 P^{-1} = I_2 \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R})$, $P A_1 P^{-1} = A_1 \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ et $P B_1 P^{-1} = S \in \mathscr{S}_2(\mathbb{R})$,donc $\mathscr{W}$ est conjugué à un sous espace vectoriel de $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ ($M \mapsto PMP^{-1}$).

<u>Conclusion :</u> $\mathscr{F}$ est conjugué à $\mathscr{W}$ et ce dernier est conjugué à un sous espace vectoriel de $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$, alors $\mathscr{F}$ est conjugué à un sous espace vectoriel de $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$.

$\boxed{3.7}$ <u>Le résulta est clair si $\dim \mathscr{V}$=0</u>.

<u>Si $\dim \mathscr{V} = 1$:</u> Dans ce cas , $\mathscr{V} = \text{Vect}(A)$ où A une matrice diagonalisable, il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P tel que $A = PDP^{-1}$, donc le sous espace vectoriel $\text{Vect}(A)$ est conjugué à $\text{Vect}(D)$ qui est un sous espace vectoriel de $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$.

<u>Si $\dim \mathscr{V} = 2$:</u> on va distinguer les deux cas suivants :

- Si $I_2 \in \mathscr{V}$: dans ce cas $\mathscr{V} = \text{Vect}(I_2, A)$, où A est une matrice diagonalisable, n'est pas scalaire ; il existe une matrice D diagonale et une matrice inversible P tels que $A = PDP^{-1}$, dans ce cas $\mathscr{V}$ est conjugué à $\text{Vect}(I_2, D)$ qui est un sous espace vectoriel de $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$.
- Si $I_2 \notin \mathscr{V}$: alors $\mathbb{R}.I_2 \oplus \mathscr{V}$ est un hyperplan de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, donc conjugué à $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ (question 3.6.5), ainsi $\mathscr{V}$ est conjugué à son image (sous espace vectoriel de $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$) par cette conjugaison.

<u>Si $\dim \mathscr{V} = 3$:</u> Déjà fait 3.6.5.

$\boxed{3.8}$ Remarque : Si A est une matrice orthogonalement diagonalisable, alors elle est symétrique ; en effet, il existe P orthogonale et D diagonale telles que $A = {}^tPDP$, on a donc ${}^tA = {}^tP\,{}^tD\,{}^t{}^tP = {}^tPDP = A$.

Ainsi les sous espaces vectoriels de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ formés de matrices orthogonalement diagonalisables, sont les sous espaces vectoriels de $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$.

FIN