mai 2014

# Correction CCP maths 1 MP

**Avertissement :** Il subsiste certainement quelques coquilles...

## Exercice 1 : une intégrale double

Pour calculer cette intégrale, on effectue le changement de variable en coordonnées polaires : $\left\{\begin{array}{l} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{array}\right.$
Il est alors connu que $dx\ dy = r\ dr\ d\theta$.
Le nouveau domaine d'intégration est $[0,1] \times [0,2\pi]$.
Ainsi, $I = \int\int_{[0,1]\times[0,2\pi]} \dfrac{r}{1+r^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$.
On applique le théorème de Fubini :
$I = 2\pi \times \displaystyle\int_0^1 \frac{r}{1+r^2}\ \mathrm{d}r = 2\pi\frac{1}{2}[\ln(1+r^2)]_0^1 = \pi\ln(2)$

## Exercice 2 : équation différentielle

1. Sur **l'intervalle** $]0,+\infty[$ l'équation $(E)$ se réécrit sous forme résolue $y'' + \dfrac{a(x)}{x^2}y' + \dfrac{b(x)}{x^2}y = 0$.
   Les fonctions $x \mapsto \dfrac{a(x)}{x^2}$ et $x \mapsto \dfrac{b(x)}{x^2}$ sont continues sur $I$ et l'équation est linéaire homogène d'ordre 2.
   Donc par théorème, $S^+$ est de dimension 2 et de même, $S^-$ est de dimension 2.
2. Soit $f \in$ Ker $(\varphi)$. Alors $f$ est nulle sur les intervalles $I$ et $J$ donc sur $\mathbb{R}^*$.
   Par continuité de $f$ en 0, $f(0) = 0$.
   Donc $f = 0$ ce qui montre que Ker $(\varphi) = \{0\}$.
   $\varphi$ étant une application linéaire injective, elle définit un isomorphisme de $S$ sur Im $(\varphi)$.
   Or Im $(\varphi)$ est un sev de $S_1 \times S_2$ qui est un ev de dimension $2+2=4$.
   Donc Im $(\varphi)$ est un ev de dimension finie et $\dim($Im $(\varphi)) \leq 4$.
   Etant isomorphe à Im $(\varphi)$, $S$ est aussi de même dimension finie ce qui donne $\dim(S) \leq 4$.
3. - Soit $I_0 \in \{I, J\}$ (l'un des deux intervalles...)
     Sur $I_0$, l'équation est équivalente à $y'' + \dfrac{1}{x}y' = 0$ soit au système $\left\{\begin{array}{c} z' + (1/x)\times z = 0 \\ y' = z \end{array}\right.$
   - La première équation, linéaire, homogène, d'ordre 1 a immédiatement pour ensemble solution sur l'intervalle $I_0$ la droite vectorielle $\{x \mapsto \dfrac{K}{x}, K \in \mathbb{R}\}$.
   - Ainsi, $y$ est solution de $(E)$ ssi $\exists K \in \mathbb{R}, y' = \dfrac{K}{x}$ ssi $\exists (K,L) \in \mathbb{R}^2, y = K\ln(|x|) + L$.
   - Conclusion : sur l'intervalle $I$ ou l'intervalle $J$, l'ensemble solution est Vect $(x \mapsto 1, x \mapsto \ln(|x|)\}$
   - Soit $f \in S$. Alors il existe $(k_1,k_2,k_3,k_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\left\{\begin{array}{l} \forall x > 0, f(x) = k_1\ln(x) + k_2 \\ \forall x < 0, f(x) = k_3\ln(|x|) + k_4 \end{array}\right.$
     $f$ étant continue en 0 donc bornée au voisinage de 0, on obtient $k_1 = k_3 = 0$.
     La continuité à gauche et à droite en 0 impose alors $k_2 = f(0) = k_4$.
     Donc $f$ est une fonction constante.
   - Réciproquement, il est immédiat de vérifier que les fonctions constantes sont éléments de $f$.
     Conclusion : $S =$ Vect $(x \mapsto 1)$ et $\dim(S) = 1$.
4. - Notons $f_\alpha$ la fonction définie sur $I$ par $f_\alpha(x) = x^\alpha$.
     Alors $f_\alpha$ est solution de $(E)$ ssi $\forall x > 0, x^2\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} - 6x\alpha x^{\alpha-1} + 12x^\alpha = 0$ ssi $\forall x > 0, x^\alpha \times (\alpha^2 - 7\alpha + 12) = 0$
     4 et 3 sont solutions de l'équation $\alpha^2 - 7\alpha + 12$ donc les fonctions $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto x^4$ sont éléments de $S^+$.
   - La famille $(x \mapsto x^3, x \mapsto x^4)$ est une 2-liste libre (vérification immédiate) d'éléments de $S^+$ et $S^+$ est de dimension 2.
     Donc c'est une base de $S^+$ et $S^+ =$ Vect $(x \mapsto x^3, x \mapsto x^4)$.
   - On vérifie immédiatement par le calcul que $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto x^4$ définissent deux fonctions sur $J$ solutions de $(E)$. Elles forment également une 2-liste libre et $\dim(S^-) = 2$.
     Donc $S^- =$ Vect $(x \mapsto x^3, x \mapsto x^4)$.
   - On vérifie que $S = \left\{x \mapsto \left\{\begin{array}{l} k_1x^3 + k_2x_4 \text{ si } x \geq 0 \\ k_3x^3 + k_4x^4 \text{ si } x < 0 \end{array}\right., (k_1,..,k_4) \in \mathbb{R}^4\right\}$.
     Soit $f \in S$. D'après ce qui précède, pour vérifier que $S$ appartient à l'ensemble proposé, il suffit de vérifier que $f(0) = 0$...

On sait qu'il existe $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x > 0, f(x) = k_1 x^3 + k_2 x^4$. La continuité de $f$ en $0$ donc à droite en $0$ donne immédiatement $f(0) = \lim_0 k_1 x^3 + k_2 x^4 = 0$.
Soit $f$ dans l'ensemble proposé.
Alors il existe $k_1, .., k_4 \in \mathbb{R}$ vérifiant ce qu'il faut...
On vérifie que $f$ est de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}$ :
Soit $\alpha > 0$. Au voisinage de $\alpha$, $f$ coïncide avec la fonction $x \mapsto k_1 x^3 + k_2 x^4$. Donc $f$ est deux fois dérivable en $\alpha$, $f'(\alpha) = 3k_1 x^2 + 4k_2 x^3$ et $f''(\alpha) = 6k_1 x + 12 k_2 x^2$.
De même, pour $\alpha < 0$, $f$ coïncide au voisinage de $\alpha$ avec $x \mapsto k_3 x^3 + k_4 x^4$ donc $f$ est deux fois dérivable en $\alpha$ et $f'(\alpha) = 3k_3 x^2 + 4k_4 x^3$, $f''(\alpha) = 6k_3 x + 12k_4 x^2$.
Ainsi, $f$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée seconde $f''$ est clairement continue en tout point de $\mathbb{R}^*$.
Donc $f$ est de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^*$.
De plus, $f$ est clairement continue à droite et à gauche en $0$ donc continue en $0$ ainsi qu'en tout point de $\mathbb{R}^*$.
Donc $f$ est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^*$.
Il ne reste qu'à vérifier que $f'(x)$ et $f''(x)$ admettent une même limite finie en $0$ à droite et à gauche pour assurer, d'après le théorème de prolongement de la classe, que $f$ est de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}$.
D'après les expressions précédemment évoquées pour $f''$ et $f'$, ces limites existent et sont $0$.
Conclusion : $f$ est de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}$.
Les expressions déterminées plus haut pour $f'$ et $f''$ assurent immédiatement que $f$ est solution de $(E)$.
- Conclusion : on a bien l'égalité souhaitée et $S$ est clairement de dimension $4$.

5. - Considérons l'équation $(E)$ : $x^2 y'' + 4xy' + 2y$.
   Alors $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ sont deux solutions de $(E)$ (vérification immédiate) sur $I$ et sur $J$.
   Cette famille de fonctions est clairement libre. Donc comme précédemment, $S^+$ et $S-$ sont engendrés par ces deux fonctions.
   - Soit $f \in S$ une solution de $(E)$ sur $\mathbb{R}$.
   Alors il existe $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x > 0, f(x) = \dfrac{k_1}{x} + \dfrac{k_2}{x^2}$ et $\forall x < 0, f(x) = \dfrac{k_3}{x} + \dfrac{k_4}{x^2}$.
   Alors $\forall x > 0, x^2 f(x) - k_1 x = k_2$ donc la continuité de $f$ en $0$ à droite donne par passage à la limite en $0^+$ : $0 = k_2$.
   Donc $\forall x > 0, f(x) = \dfrac{k_1}{x}$ d'où $\forall x > 0, x \times f(x) = k_1$ ce qui, par passage à la limite en $0$ donne $0 = k_1$.
   De même, la continuité de $f$ à gauche en $0$ donne $k_3 = k_4 = 0$.
   Donc $f = 0$ ce qui démontre que $S$ est l'espace vectoriel nul.

## Problème

### Partie 1 : convergence de séries par transfo d'Abel

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k (B_k - B_{k-1}) = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k B_k - \sum_{k=1}^{n} a_k B_{k-1}$.
   Dans la dernière somme, on effectue le changement d'indice $j = k - 1$.
   $$S_n = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k B_k - \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1} B_j = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n - a_1 B_0$$
   $$= a_0 b_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k - (a_0 - a_1) B_0 + a_n B_n - a_1 b_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n$$

2. (a) Par théorème, la suite $(a_n)$ étant convergente, la série $\sum_{k \geq 0} a_k - a_{k+1}$ est également convergente (c'est même une CNS).

   (b) Vérifions que la suite $(S_n)$ des sommes partielles est convergente.
   D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n$.
   Le second terme $(a_n B_n)$ tend vers $0$ car produit d'une suite convergente vers $0$ et d'une suite bornée.
   Le premier terme est une somme partielle de la série de TG $(a_k - a_{k+1}) \times B_k$.
   Notons $M > 0$ un majorant de la suite $(|B_n|)$.
   Alors $\forall k \in \mathbb{N}, |(a_k - a_{k+1}) B_k| \leq |a_k - a_{k+1}| \times M = (a_k - a_{k+1}) \times M$ car $(a_k)$ est une suite décroissante.
   Ainsi, $(a_k - a_{k+1}) B_k$ est dominée par une le TG d'une série absolument convergente.
   Donc $(a_k - a_{k+1}) \times B_k$ est lui même le TG d'une série AC ce qui termine la démonstration de cette question.

   (c) - Soit $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de limite nulle. Alors $\sum_{k \geq 0} (-1)^k a_k$ est une série convergente.

- Il suffit d'appliquer le résultat de la question précédente après avoir justifié que la suite $(B_n) = \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\right)$ est une suite bornée.
  On a $\forall n \in \mathbb{N}, B_n \in \{1, 0\}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, |B_n| \leq 1$ ce assure bien le résultat demandé.

3. (a)
   - On demande de calculer la somme des termes d'une suite géométrique de raison $e^{i\theta}$. Notons que, par hypothèse, $e^{i\theta} \neq 1$.
   - Par théorème, $\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta} = e^{i\theta}\frac{1-e^{in\theta}}{1-e^{i\theta}} = e^{i\theta}\frac{e^{in\theta/2}}{e^{i\theta/2}}\frac{(-2i)\sin(n\theta/2)}{(-2i)\sin(\theta/2)} = e^{i(n+1)\theta/2}\frac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$

   (b)
   - Lorsque $\alpha > 1$, la série de TG $\frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ est absolument convergente donc convergente.
   - Lorsque $\alpha \leq 0$, le module du terme général ne tend pas vers 0 donc la série est grossièrement divergente.
   - Soit $\alpha \in ]0, 1]$.
     On va montrer que la série est convergente par application du résultat de la question **2b2**.
     Notons tout de même que le fait que la série commence à $n = 1$ à la place de $n = 0$ n'a pas d'incidence.
     La suite $(1/n)$ est clairement décroissante et tend vers $0$.
     D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|\sum_{k=1}^{n} e^{i\theta}\right| \leq \frac{1}{|\sin(\theta/2)|}$ donc la suite des sommes partielles qui va bien est bornée.
     Conclusion : la série est convergente.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $z_n = \frac{e^{inx}}{n^{1/2}}$.
   Lorsque $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, la question précédente assure la convergence de la série de TG $z_n$ et le rappel de l'énoncé assure la convergence de la série de TG $\text{Im}\,(z_n) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.
   Lorsque $x \in 2\pi\mathbb{Z}, u_n(x) = 0$ ce qui est bien le TG d'une série convergente.
   Conclusion : cette série de fonction converge simplement sur $\mathbb{R}$.

**Partie 2 : convergence uniforme de séries**

5. (a)
   - On montre que la suite $(a_nF_n)$ cvu vers la fonction nulle sur $A$.
     $\forall z \in A, |a_nF_n(z)| \leq |a_n| \times M$ et cette majoration par une suite (indépendante de $z$) qui tend vers 0 assure que $(a_nF_n)$ cvu vers 0 sur $A$.
   - Notons comme précédemment, que $\forall k \in \mathbb{N}, |a_k - a_{k+1}| = a_k - a_{k+1}$ par décroissance de $(a_n)$.
     Ainsi, $\forall z \in A, |(a_k - a_{k+1})F_n(z)| \leq (a_k - a_{k+1}) \times M$ et cette majoration par le TG d'une série convergente (car la suite $(a_k)$ est convergente) indépendant de $z$ assure que la série de fonction $\sum_{k\geq 0}(a_k - a_{k+1})F_k$ converge normalement sur $A$.

   (b) Il est connu qu'une somme de suites de fonctions qui convergent uniformément définit une suite de fonction qui converge uniformément.
   Ainsi, $(a_nF_n)$ cvu sur $A$ et $\left(\sum_{k=0}^{n-1}(a_k - a_{k+1})F_k\right)$ cvu sur $A$ (d'après ce qui précède).
   Donc la somme converge uniformément sur $A$ et cette somme est la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} a_kf_k\right)$ d'après la tranformation d'Abel.
   Ainsi, la série $\sum a_kf_k$ cvu sur $A$.

6. (a)
   - On factorise $1 - e^{ix}$ par $e^{ix/2}$ pour obtenir le résultat souhaité.
   - La suite $(1/\sqrt{n})$ est décroissante et de limite nulle.
     Soit $a \in ]0, \pi[$.
     Soit $x \in [a, 2\pi - a]$. Notons tout de suite que $e^{ix} \neq 1$ car $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.
     Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|\sum_{k=1}^{n}\sin(kx)\right| = \left|\text{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}\right)\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}\right| = \frac{|\sin(nx/2)|}{|\sin(x/2)|} \leq \frac{1}{|\sin(x/2)|} = \frac{1}{\sin(|x|/2)}$.
     Or $x \in [a, 2\pi - a]$ donc $(x/2) \in [a/2, \pi - a/2]$.
     Par hypothèse sur $a$, $0 < a/2 \leq \pi/2 \leq \pi - a/2 < \pi$ donc les variations de la fonction $\sin$ donnent $0 < \sin(a/2) = \sin(\pi - a/2) \leq \sin(x/2) = |\sin(x/2)|$.
     Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [a, 2\pi - a], \left|\sum_{k=1}^{n}\sin(kx)\right| \leq \frac{1}{\sin(a/2)}$ ce qui assure le caractère uniformément borné de la série

de fonctions qui va bien.

Ainsi, d'après les questions précédentes, la série de fonctions $\sum_{k\geq 1}\dfrac{\sin(kx)}{\sqrt{k}}$ converge uniformément sur le segment $[a, 2\pi - a]$.

- Les fonctions étant continues sur $\mathbb{R}$ par les théorèmes généraux, la convergence uniforme assure la continuité de la limite sur le domaine de convergence. Ainsi, $U$ est continue sur tous les segments $[a, 2\pi - a]$ pour $a \in ]0, \pi[$.
  Donc $U$ est continue sur la réunion de ces segments qui forme l'intervalle $]0, 2\pi[$ tout entier.

(b) D'après les énoncés précédents, il suffit de démontrer que la suite des sommes partielles $\sum_{k=1}^{n}\sin(kx)\sin(px)$ est uniformément bornée sur $[0, \pi]$.

D'après les calculs précédents, $\forall x \in ]0, \pi]\,, A_n(x) = \left|\sum_{k=1}^{n}\sin(kx)\sin(px)\right| = \left|\dfrac{\sin(nx/2)\sin(px)}{\sin(x/2)}\right|$.

Pour $x \in ]0, \pi]$, on a d'après l'énoncé, $0 < \dfrac{x}{\pi} \leq \sin(x/2)$ ce qui, par décroissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$ donne $0 < \dfrac{1}{\sin(x/2)} \leq \dfrac{\pi}{x}$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in ]0, \pi]\,, A_n(x) \leq \dfrac{|\sin(px)|\pi}{x}$.

Or, il est bien connu que $|\sin(t)| \leq |t|$ pour tout $t$ réel.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in ]0, \pi]\,, A_n(x) \leq \dfrac{p|x|\pi}{x} = p\pi$.

Cette inégalité est encore valable pour $x = 0$ car la somme est nulle.

Ainsi, la somme partielle qui va bien est uniformément bornée. De plus, $(1/\sqrt{n})$ est décroissante de limite nulle donc $\sum_{n\geq 0} v_n(x)$ cvu sur $[0, \pi]$.

(c) i. • Notons que la fonction $U$ est clairement $2\pi$ périodique. Admettons les identités proposées (elles se démontrent par linéarisation des expressions trigo).

- La fonction $U$ est clairement impaire donc $\forall p \in \mathbb{N}, a_p(U) = 0$.
- Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

  Par imparité, $b_p(U) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\sin(px)U(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(px)\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}\,\mathrm{d}x$

  $= \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\sum_{n\geq 0}\dfrac{\sin(px)\sin(nx)}{\sqrt{n}}\,\mathrm{d}x$.

  La convergence uniforme de la série $\sum_{n\geq 0}\dfrac{\sin(px)\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ sur le **segment** $[0, \pi]$ permet une interversion série - intégrale.

  Ainsi, $b_p(U) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n\geq 0}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\pi}\sin(px)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\sqrt{p}}$ d'après le résultat donné par l'énoncé.

ii. $U$ étant $2\pi$ périodique, à valeurs réelles et supposée continue par morceaux sur $[0, \pi]$ donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ par imparité et $2\pi$ périodicité, le théorème de Parseval donne l'égalité $a_0(U)^2 + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty}a_p(U)^2 + b_p(U)^2 = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}U(t)^2\,\mathrm{d}t$.

L'égalité ci-dessus se réécrit alors $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty}\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}U(t)^2\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R}$ ce qui est absurde car la série de TG $\dfrac{1}{p}$ est divergente.

D'où la contradiction qui montre que $U$ n'est pas continue par morceaux sur $[0, \pi]$.

**Partie 3 : convergence uniforme d'une série entière**

7. La série entière converge uniformément sur tout disque fermé de centre 0 inclus dans le disque ouvert $D(0, R)$ ie de la forme $\{z \in \mathbb{C}||z| \leq r\}$ avec $r \in ]0, R[$.

8. (a) Supposons que la série entière $\sum\dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$ cvu sur $]-1, 1[$. Alors on a convergence uniforme sur $[0, 1[$.

   D'après le critère de Cauchy uniforme, $\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall(p, q) \in \mathbb{N}^2, n_0 \leq p \leq q \Rightarrow \forall x \in [0, 1[\,, \left|\sum_{n=p}^{q}\dfrac{x^n}{\sqrt{n}}\right| \leq \varepsilon$.

   Soit $\varepsilon > 0$, un tel $n_0, p, q$ vérifiant $n_0 \leq p \leq q$.

   Alors $\forall x \in [0, 1[\,, \left|\sum_{n=p}^{q}\dfrac{x^n}{\sqrt{n}}\right| \leq \varepsilon$ ce qui, par passage à la limite quand $x$ tend vers $1^-$ donne $\left|\sum_{n=p}^{q}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right| \leq \varepsilon$.

On a donc $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, n_0 \leq p \leq q \Rightarrow \left| \displaystyle\sum_{n=p}^{q} \frac{1}{\sqrt{n}} \right| \leq \varepsilon$.

Donc la suite $\left( \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ est une suite réelle qui vérifie le critère de Cauchy. Donc elle converge ce qui est absurde car la série de TG $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente.

Conclusion : la série entière $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ ne converge pas uniformément sur $[0, 1[$ donc sur $]-1, 1[$.

(b) $D_\alpha$ est le disque fermé de centre 0 de rayon 1 privé d'une "calotte"...

(c)
- L'écriture proposée de $D_\alpha$ ne pose pas de problème. Notons également que dans $\mathbb{R}^2$ (en dimension finie, donc), toutes normes sont équivalentes...
- Posons $\varphi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x^2 + y^2 \end{array} \right.$ et $\varphi_2 : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x \end{array} \right.$ .

  Par les théorèmes généraux, $\varphi_1$ et $\varphi_2$ sont clairement continue sur $\mathbb{R}^2$.
  De plus, les ensembles $]-\infty, 1]$ et $]-\infty, \cos(\alpha)]$ sont deux fermés de $\mathbb{R}$.
  Donc les images réciproques par $\varphi_1$ et $\varphi_2$ sont des fermés de $\mathbb{R}^2$ par théorèmes (image réciproque d'un fermé par une application continue...)
  Une intersection (quelconque) de fermés est fermée donc $D_\alpha = \varphi_1^{-1}(]-\infty, 1]) \cap \varphi_2^{-1}(]-\infty, \cos(\alpha)])$ est fermé.
- $D_\alpha$ est un fermé d'après ce qui précède et borné (par 1 en norme euclidienne...). En dimension finie, un fermé borné est un compact.
  Donc $D_\alpha$ est un compact.

(d)
- $1 \notin D_\alpha$ car $\cos(\alpha) < 1$ (par hypothèse sur $\alpha$...)
- Soit $z \in D_\alpha$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors $z \neq 1$ ce qui permet d'écrire que $|F_n(z)| = \left| 1 \times \dfrac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \right| = \dfrac{|1 - z^{n+1}|}{|1 - z|} \leq \dfrac{1 + |z|^{n+1}}{|1 - z|}$
  $\leq \dfrac{2}{|1 - z|}$
  Il reste à minorer le dénominateur par $1 - x$.
  On a $|1 - z|^2 = (1 - x)^2 + y^2 \geq (1 - x)^2 > 0$ car $x \leq \cos(\alpha) < 1$.
  Donc $|1 - z| \geq |1 - x| = 1 - x \geq 1 - \cos(\alpha) > 0$ (toujours car $x \leq \cos(\alpha) < 1$...)
  Par passage à l'inverse, $\dfrac{1}{|1 - z|} \leq \dfrac{1}{1 - x} \leq \dfrac{1}{1 - \cos(\alpha)}$.
  Ainsi, par multiplication par le réel positif 2 : $|F_n(z)| \leq \dfrac{2}{1 - x} \leq \dfrac{2}{1 - \cos(\alpha)}$

(e) Soit $\alpha \in ]0, \pi/2[$.
La suite $(1/\sqrt{n})$ est décroissante et tend vers 0 donc pour appliquer le résultat de la question **3.5.b.**, il suffit de montrer que la suite des sommes partielles $\left( \displaystyle\sum_{k=1}^{n} z^k \right)$ est uniformément bornée sur $D_\alpha$.
Ceci est assuré par la majoration précédente car $\dfrac{2}{1 - \cos(\alpha)}$ est indépendant de $z$ et de $n$.
Conclusion : la série entière $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$ converge uniformément sur $D_\alpha$.