

المملكة المغربية

CNC 2013

Mathématiques 2

Un corrigé par : AQALMOUN MOHAMED agrégé de mathématiques MPSI CPGE
Khouribga

Premier exercice
Matrice de Gram et application

- La base canonique étant orthonormale pour le produit scalaire canonique, donc $\langle u_i, u_j \rangle = \sum_{k=1}^n m_{k,i} m_{k,j} = \sum_{k=1}^n ({}^t M)_{i,k} M_{k,j} = ({}^t M M)_{i,j}$, où l'on a noté $A_{i,j}$ le terme d'indice (i, j) de la matrice A .
Il vient que $G(u_1, \dots, u_n) = {}^t M M$.
- G symétrique, immédiat.
Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a ${}^t X G(u_1, \dots, u_n) X = {}^t (M X) M X = \langle {}^t (M X), {}^t (M X) \rangle = \|{}^t (M X)\|_2^2 \geq 0$, de plus si la famille (u_1, \dots, u_n) est libre ; alors ${}^t X G(u_1, \dots, u_n) X = 0$ si, et seulement si, $M X = 0$, et comme M est la matrice de la famille (u_1, \dots, u_n) dans la base canonique, donc inversible ; ainsi $M X = 0$ si, et seulement si, $X = 0$, il vient alors, dans ce cas que la matrice $G(u_1, \dots, u_n)$ est définie positive.
- (3.1) Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, posons $u_i = \sum_{k=1}^i e_k$, pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, \dots, n\}$ on a $\langle u_i, u_j \rangle = \min(i, j) = a_{i,j}$, autrement dit $A = G(u_1, \dots, u_n)$, donc A est symétrique positive, de plus la famille (u_1, \dots, u_n) est libre, alors A est définie positive.
 R_n est la matrice de la famille (u_1, \dots, u_n) dans la base canonique qui est triangulaire supérieure,

$$R_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (3.2) On trouve, $z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = 1$, $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ et $x_4 = 1$.
Notons X une solution du système linéaire, $A_4 X = Y$ qui est équivalent à ${}^t R_4 R_4 X = Y$, si on pose $Z = R_4 X$, alors ${}^t R_4 Z = Y$, et d'après ce qui précède, on obtient $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Deuxième exercice
Résolution de l'équation $X^2 + 3X = A$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

- La matrice A est triangulaire, donc les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 4$ et $\lambda_3 = 0$, trois valeurs propres deux à deux distincts, donc A est diagonalisable.

2. $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 1, -4)$.
3. $\det(e_1, e_2, e_3) = -4$, donc (e_1, e_2, e_3) est une base de \mathbb{R}^3 (dimension 3).

$$\Delta = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. P est la matrice de passage de la base canonique à la base (e_1, e_2, e_3) ,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

5. (5.1) $B^2 + 3B$ est la matrice de l'endomorphisme $v + 3v$ dans la base canonique, donc les deux endomorphisme $v + 3v$ et u ont même matrice dans la base canonique, donc ces deux endomorphisme sont égaux.

- (5.2) u est un polynôme en v , donc commute à v .

Pour $k \in \{1, 2, 3\}$, on a $\ker(u - \lambda_k \text{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \text{Vect}(e_k)$, puisque les endomorphisme u et v commutent, alors $u(v(e_k)) = v(u(e_k)) = \lambda_k v(e_k)$, ainsi $v(e_k) \in \ker(u - \lambda_k \text{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \text{Vect}(e_k)$, il en résulte que $v(e_k)$ est colinéaire à e_k , autrement dit e_k est un vecteur propre de v , or (e_1, e_2, e_3) est une base de \mathbb{R}^3 , formé par des vecteurs propres de v , alors v est diagonalisable, et sa matrice relativement à cette base est diagonale.

- (5.3) On a $B = PVP^{-1}$, donc La relation $B^2 + 3B = A$ est équivalente à $V^2 + 3V = \Delta$. Et cette dernière relation est équivalente à $\alpha_1^2 + 3\alpha_1 = 10, \alpha_2^2 + 3\alpha_2 = 4$ et $\alpha_3^2 + 3\alpha_3 = 0$, après la résolution de ces équations, on obtient $\alpha_1 = -5$ ou $2, \alpha_2 = -4$ ou 1 , et $\alpha_3 = 0$ ou -3 . ainsi les valeurs possibles de B sont les 8 matrices $P \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)P^{-1}$, où α_1, α_2 et α_3 pred les valeurs précédentes.

- (5.4) Le nombre de solutions de l'équation $X^2 + X = \Delta$ est égal à $2^3 = 8$. et comme l'application $V \mapsto PVP^{-1}$ est une bijection entre l'ensemble des solution de $X^2 + 3X = \Delta$ et l'ensemble des solutions de l'équation $X^2 + 3X = B$, donc il y'a 8 solutions.

Problème

Première partie Résultats préliminaires

1. (1.1) Pour $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on a $\deg D(P) = \deg P' \leq \deg P - 1 \leq n - 1$, donc $D(P) \in \mathbb{C}_n[X]$, autrement dit $\mathbb{C}_n[X]$ est stable par D .
- (1.2) Pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$, $D_n^{n+1}(P) = P^{(n+1)} = 0$, d'où $D_n^{n+1} = 0$, il vient que D_n est nilpotent.
- (1.3) Soit α un nombre complexe non nul, on a $D_n^{n+1} = 0$, alors

$$\alpha^{n+1}I_n = (\alpha I_n)^{n+1} - (-D_n)^{n+1} = (\alpha I_n + D_n) \left(\sum_{k=0}^n \alpha^{n-k} (-1)^k D_n^k \right), \text{ donc } D_n + \alpha I_n \text{ est}$$

inversible et

$$(D_n + \alpha I_n)^{-1} = \frac{1}{\alpha^{n+1}} \sum_{k=0}^n \alpha^{n-k} (-1)^k D_n^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k \alpha^{-k-1} D_n^k.$$

- (1.4) Soit α un complexe non nul, d'après ce qui précède, $D_n + \alpha I_n$ est un automorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$, et si R est polynôme de degré n , c'est-à-dire élément de $\mathbb{C}_n[X]$, alors il existe un unique polynôme $R_1 \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que $(D_n + \alpha I_n)(R_1) = R$, ou encore $R'_1 + \alpha R_1 = R$, de plus on a $\deg R = \deg(R'_1 + \alpha R_1) = \deg R_1$ (car si R_1 n'est pas constant, $\deg R'_1 < \deg R_1$ sinon l'égalité est triviale).

Expression de R_1 ;

$$R_1 = (D_n + \alpha I_n)^{-1}(R) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \alpha^{-k-1} D_n^k(R) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \alpha^{-k-1} R^{(k)}, \text{ où } R^{(k)} \text{ désigne la } k \text{ ième dérivée du polynôme } R.$$

2. (2.1) Soit f une solution de l'équation différentielle $y' - \lambda y = g$, et pour $x \in \mathbb{R}$ posons $G(x) = f(x)e^{-\lambda x}$, G est une fonction dérivable, montrons que c'est une primitive de la fonction $x \mapsto g(x)e^{-\lambda x}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a ; $G'(x) = f'(x)e^{-\lambda x} - \lambda f(x)e^{-\lambda x} = (f'(x) - \lambda f(x))e^{-\lambda x} = g(x)e^{-\lambda x}$.

Réciproquement, il est facile de vérifier, que toute fonction de la forme $x \mapsto G(x)e^{-\lambda x}$ où G est une primitive de la fonction $x \mapsto g(x)e^{-\lambda x}$, est une solution de l'équation différentielle en question.

- (2.2) D'après la question précédente, les solutions de l'équation différentielle $y' - \lambda y = g$, sont les fonctions de la forme $x \mapsto S(x)e^{\lambda x}$, où S est une primitive de la fonction $x \mapsto g(x)e^{-\lambda x} = R(x)$, c'est-à-dire S est un polynôme dont le polynôme dérivé est égal à R .

- (2.3) Notons R_1 , l'unique polynôme tel que $R = R'_1 + (\mu - \lambda)R_1$, d'après la première question, les solutions de l'équation différentielle $y' - \lambda y = g$, sont de la forme $x \mapsto G(x)e^{\lambda x}$ où G est une primitive de la fonction $x \mapsto g(x)e^{-\lambda x} = R(x)e^{(\mu-\lambda)x}$, autrement dit $G'(x) = R'_1 e^{(\mu-\lambda)x} + (\mu - \lambda)R_1 e^{(\mu-\lambda)x} = (R_1(x)e^{(\mu-\lambda)x})'$ "dérivée d'une expression en x ", ainsi G est de la forme $x \mapsto R_1(x)e^{(\mu-\lambda)x} + c$ où c est une constante, on en déduit alors que les solutions de l'équation différentielle en question sont les fonctions de la forme $x \mapsto R_1(x)e^{\mu x} + ce^{\lambda x}$ où c est une constante.

Deuxième partie

Expression des solutions de l'équation différentielle (\mathcal{E}_P)

1. Si f est solution de l'équation différentielle \mathcal{E}_P , alors $(\mathcal{D} - \lambda I)^n(f) = P(\mathcal{D})(f) = 0$.
Calcul de $h^{(n)}$; pour tout $x \in \mathbb{R}$, à l'aide de la formule de **Liebnitz**, on obtient

$$\begin{aligned} h^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^n C_n^k (-\lambda)^k e^{-\lambda x} f^{(n-k)}(x) \\ &= e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^n C_n^k (-\lambda)^k \mathcal{D}^{n-k}(f)(x) \\ &= e^{-\lambda x} (\mathcal{D} - \lambda I)^n(f)(x) \\ &= e^{-\lambda x} P(\mathcal{D})(f)(x) = 0 \end{aligned}$$

Donc h est un polynôme de degré inférieure ou égal $n - 1$, si on pose $R = h$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = R(x)e^{\lambda x}$.

Réciproquement, si f est de cette forme alors, $\forall x \in \mathbb{R}$, par un calcul analogue, au précédent, on a

$$P(\mathcal{D})(f)(x) = e^{\lambda x} R^{(n)}(x) = 0$$

Il vient alors que f , est solution de \mathcal{E}_P .

2. (2.1) Les deux endomorphismes $Q(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D} - \lambda I)$ sont dans $\mathbb{C}[\mathcal{D}]$ l'algèbre des endomorphismes polynôme en \mathcal{D} qui est commutative, donc commutent.

(2.2) f solution de l'équation différentielle \mathcal{E}_P si, et seulement si, $P(\mathcal{D})(f) = 0$ si, et seulement si, $(\mathcal{D} - \lambda I)Q(\mathcal{D})(f) = 0$ si, et seulement si, (la commutativité) $Q(\mathcal{D})(\mathcal{D} - \lambda I)(f) = 0$ si, et seulement si, $Q(\mathcal{D})(f' - \lambda f) = 0$ si, et seulement si, $f' - \lambda f$ est solution de l'équation différentielle \mathcal{E}_Q .

3. Pour $n = 1$, il s'agit de l'équation différentielle de la question 1.3.1 avec $g = 0$, les solution sont de la forme $x \mapsto G(x)e^{\lambda x}$, où G est une primitive de la fonction $x \mapsto g(x)e^{-\lambda x} = 0$, c'est-à-dire G est un polynôme de degré ≤ 0 .

Supposons que la propriété est vérifiée à l'ordre n .

Posons $P = (X - \lambda)^{n+1}$, et $Q = (X - \lambda)^n$, de sorte que $P = (X - \lambda)Q$.

f est solution de l'équation différentielle \mathcal{E}_P si, et seulement si, $f' - \lambda f$ est solution de l'équation différentielle \mathcal{E}_Q . D'après l'hypothèse de récurrence, la fonction $f' - \lambda f$ est de la forme $x \mapsto R(x)e^{\lambda x}$ où R est un polynôme dans $\mathbb{C}_{n-1}[X]$, remarquons maintenant que f est solution de l'équation différentielle $y' - \lambda y = R(x)e^{\lambda x}$, et d'après la question 1.3.2, f est de la forme $x \mapsto S(x)e^{\lambda x}$, avec $S' = R$, et donc $S \in \mathbb{C}_n[X]$.

4. **Un exemple :** $P_1 = (X - 1)(X + 1)^3$;

f est solution de \mathcal{E}_{P_1} si, et seulement si, $f' - f$ est solution de $\mathcal{E}_{(X+1)^3}$, dont les solution sont de la forme $x \mapsto R(x)e^{-x}$ où R est un polynôme de degré ≤ 2 , donc f est de cette forme, ainsi f est solution de l'équation différentielle $y' - y = R(x)e^{-x}$, d'après 1.3.3, f est de la forme $x \mapsto R_1(x)e^{-x} + ce^x$, avec R_1 un polynôme de degré ≤ 2 et $c \in \mathbb{C}$.

5. Par récurrence sur $\deg P \geq 2$.

Pour $n = 2$.

Dans ce cas le polynôme P est de la forme, $P = (X - \lambda)(X - \mu)$, on va distinguer les deux cas suivant :

- 1er cas : si $\lambda = \mu$, déjà traiter dans les question précédentes.
- 2ieme cas : $\lambda \neq \mu$, et f solution de l'équation différentielle \mathcal{E}_P , d'après la le résultat de la question 2.2.2, $f' - \lambda f$ est solution de l'équation différentielle $\mathcal{E}_{X-\mu}$ dont les solution sont de la forme $x \mapsto \gamma e^{\mu x}$, avec $\gamma \in \mathbb{C}$, ainsi f est solution de l'équation différentielle $y' - \lambda y = \gamma e^{\mu x}$, et d'après le résultat de la question 1.3.3 ($\lambda \neq \mu$), f est de la forme $x \mapsto \alpha e^{\mu x} + ce^{\lambda x}$, où $\alpha, c \in \mathbb{C}$.

Supposons que la propriété est vérifiée pour tout polynôme scindé de degré $\leq n$.

Soit P un polynôme scindé de degré $n + 1$, on peut alors écrire le polynôme P sous

la forme $P = (X - \lambda) \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)^{m_k}$, où $r \geq 1$, $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont des complexes deux

à deux distincts, m_1, \dots, m_r des entiers naturels non nuls, et λ un complexe qui **n'est pas nécessairement distinct** des λ_k . Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, d'après ce qui précède f est solution de l'équation différentielle \mathcal{E}_P si, et seulement si, $f' - \lambda f$ est solution de l'équation

différentielle \mathcal{E}_Q où Q est le polynôme $\prod_{k=0}^r (X - \lambda_k)^{m_k}$, d'après l'hypothèse de récurrence,

la fonction $f' - \lambda f$ est de la forme $x \mapsto \sum_{k=1}^r R_k(x)e^{\lambda_k x}$, où, pour chaque $k \in \{1, \dots, r\}$, $R_k \in$

$\mathbb{C}_{m_k-1}[X]$, remarquons maintenant que f est solution de l'équation différentielle ; (E) $y' - \lambda y = \sum_{k=1}^r R_k(x)e^{\lambda_k x}$, à laquelle on va s'intéresser pour trouver une expression de f . La

solution générale de l'équation différentielle homogène associée à E est de la forme $x \mapsto \gamma e^{\lambda x}$, où γ est un complexe, une solution particulière de l'équation différentielle (E) peut être obtenue par la superposition des solutions particulières des équations différentielles (E_k) $y' - \lambda y = R_k e^{\lambda_k x}$, pour $k = 0, \dots, r$, deux cas se présentent :

• 1er cas : λ est distinct de tous les $\lambda_k, k = 0, \dots, r$;

D'après le résultat de la question 1.3.3, chacune des équations différentielle E_k , possède une solution particulière de la forme $x \mapsto R_{k,1}(x)e^{\lambda_k x}$ où, pour chaque $k \in \{1, \dots, r\}$, $R_{k,1}$ est un polynôme de degré $\leq m_k - 1$ (en effet $\deg R_{k,1} = \deg R_k \leq m_k - 1$), en on déduit alors que la fonction $x \mapsto \sum_{k=1}^r R_{k,1}(x)e^{\lambda_k x}$ est une solution particulière de E , ainsi

f est de la forme $x \mapsto \gamma e^{\lambda x} + \sum_{k=1}^r R_{k,1}(x)e^{\lambda_k x}$, notons que l'ordre de multiplicité de λ est égal à 1, ce qui démontre le résultat dans ce cas.

• 2ième cas : λ est l'un des complexes λ_k où $k \in \{1, \dots, r\}$;

Pour simplifier on peut supposer que $\lambda = \lambda_r$, donc l'ordre de multiplicité de la racines λ_r dans le polynôme P est $m_k + 1$, toujours par le résultat de la question 1.3.2, pour $k \in \{1, \dots, r - 1\}$, la fonction $x \mapsto R_{k,1}e^{\lambda_k x}$ où $\deg R_{k,1} \leq m_k - 1$ est une solution particulière de E_k , pour la détermination d'une solution particulière de l'équation (E_r), remarquons, pour cette équation différentielle, que $\lambda = \lambda_r$, d'après le résultat de la question 1.3.2, une solution particulière de cette équation différentielle est de la forme $x \mapsto S(x)e^{\lambda_r x}$ avec $S' = R_r$, ainsi S est un polynôme de degré $\leq m_r = (m_r + 1) - 1$, il en résulte que f est de

la forme $x \mapsto \gamma e^{\lambda x} + S(x)e^{\lambda_r x} + \sum_{k=1}^{r-1} R_{k,1}(x)e^{\lambda_k x} = (\gamma + S(x))e^{\lambda_r x} + \sum_{k=1}^{r-1} R_{k,1}(x)e^{\lambda_k x}$, qui a la forme voulu.

6. Quitte à diviser le polynome par son coefficient dominant, (pas d'influence sur l'ensemble des solutions), on peut supposer que P est **unitaire**.

La seule hypothèse qui manque pour démontrer ce résultat, et c'est que le polynôme soit **scindé** (c'était une hypothèse dans la question précédente). Donc il s'agit bien du théorème de **D'alembert-Gauss**, puisqu'on cherche des solutions à valeurs dans \mathbb{C} , ce qui n'est pas le cas lorsqu'on cherche des solutions à valeurs dans \mathbb{R}

Remarquons que le sous espace vectoriel des solutions de \mathcal{E}_P est somme direct des sous espaces vectoriels $F_k = \{x \mapsto P(x)e^{\lambda_k}, P \in \mathbb{C}_{m_k}[X]\}$, où $k = 0, \dots, r$, chacun est de dimension m_k , ainsi la dimension du \mathbb{C} -espace vectoriel des solutions de \mathcal{E}_P est égale à

$$\sum_{k=1}^r m_k = \deg P.$$

7. **Un autre exemple** : $P_2 = (X - 1)^3(X - i)^2(X + i)^2$, d'après le résultat de la question précédent, les solutions de \mathcal{E}_{P_2} , sont de la forme

$$x \mapsto R_1(x)e^x + R_2(x)e^{ix} + R_3e^{-ix}$$

où R_2, R_3 sont des polynômes de degré ≤ 1 , et R_1 polynôme de degré ≤ 2 .

Troisième partie
Un résultat de finitude

1. (1.1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$; $g_n(x) = n f_{\frac{1}{2}}(x) - n f_0(x)$, donc $g_n = n f_{\frac{1}{2}} - n f_0$, c'est bien un élément de E_f .

$(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ est une base de E_f , puisque g_n est un élément de E_f , il existe alors des complexes $\alpha_{1,n}, \dots, \alpha_{p,n}$ tels que $g_n = \sum_{k=1}^p \alpha_{k,n} \varphi_k$.

(1.2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $n \in \mathbb{N}^*$, $g_n(x) = \frac{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)}{1/n}$, puisque f est dérivable, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) = f'(x)$, c'est bien maintenant que la suite de fonction converge simplement sur \mathbb{R} vers f' .

2. (2.1) Supposons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\delta_2(a_1, x) = 0$, par l'expression du déterminant on aura, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi_1(a_1)\varphi_2(x) - \varphi_2(a_1)\varphi_1(x) = 0$, ce qui est impossible, puisque $\varphi_1(a_1) \neq 0$ et la famille (φ_1, φ_2) est libre. Donc la fonction $x \mapsto \delta_2(a_1, x)$ n'est pas identiquement nulle, ce qui prouve l'existence d'un réel $a_2 \in \mathbb{R}$, tel que $\delta_2(a_1, a_2) \neq 0$, ainsi la matrice $\Delta_2(a_1, a_2)$ est inversible.

(2.2) Supposons par l'absurde que la fonction $x \mapsto \delta_{k+1}(a_1, \dots, a_k, x)$ est nulle, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\delta_{k+1}(a_1, \dots, a_k, x) = 0$, on développe par rapport à la dernière ligne, on obtient une relation de la forme $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=1}^{k+1} c_i \varphi_i(x) = 0$, où c_1, \dots, c_{k+1} sont des constantes complexes, et remarquons que $c_{k+1} = \delta_k(a_1, \dots, a_k)$ qui est non nul par hypothèse de récurrence, cette dernière relation s'écrit aussi $\sum_{i=1}^{k+1} c_i \varphi_i = 0$, qui est une contradiction avec le fait que la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_{k+1})$ est libre et $c_{k+1} \neq 0$, on en déduit alors qu'il existe un réel a_{k+1} tel que $\delta_{k+1}(a_1, \dots, a_k, a_{k+1})$ est non nulle, ou encore tel que la matrice $\Delta_{k+1}(a_1, \dots, a_k, a_{k+1})$ est inversible. On a démontré la propriété par récurrence.

3. (3.1) Pour $i \in \{1, \dots, p\}$, la i -ième composante de la matrice colonne MY_n est $\sum_{k=0}^p \varphi_k(a_i) \alpha_{k,p} = g_n(a_i)$ qui est aussi la i -ième composante de la matrice colonne Z_n , d'où $MY_n = Z_n$.

(3.2) Par le résultat de la question précédente, et le fait que M est inversible, on a $Y_n = M^{-1}Z_n$, et comme la suite $(Z_n)_{n \geq 1}$ est convergente de limite, le vecteur Z de composante $f'(a_1), \dots, f'(a_p)$, aussi tenant compte la continuité de l'application $H \mapsto M^{-1}H$, de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$, alors la suite $(Y_n)_{n \geq 1}$ est convergente, et on a $Y = M^{-1}Z$.

(3.3) De la question précédente, on déduit que pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$, la suite $(\alpha_{k,n})_{n \geq 1}$ est convergente de limite α_k , maintenant pour $x \in \mathbb{R}$, passant à la limite dans la relation (1), il vient que $f'(x) = \sum_{k=1}^p \alpha_k \varphi_k(x)$, ce qui montre que $f' \in E_f$.

4. Pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, la fonction f_τ est dérivable, par la suite tout élément de E_f est dérivable, remarquons aussi que si $h \in E_f$, alors $E_h \subset E_f$, comme tout élément de E_f est dérivable, h est dérivable et avec un même raisonnement $h' \in E_h \subset E_f$, il vient alors que $h' \in E_f$. Soit $g \in E_f$, montrons par récurrence sur $q \in \mathbb{N}$, que g est q fois dérivable et que $g^{(q)} \in E_f$: $g \in E_f$, d'après ce qui précède, g est aussi dérivable et $g \in E_f$, supposons que g est q fois dérivable et que $g^{(q)} \in E_f$, par le résultat de la question précédente, $g^{(q)}$ est dérivable et $(g^{(q)})' \in E_f$, c'est-à-dire g est $q + 1$ fois dérivable et $g^{(q+1)} \in E_f$. D'où le résultat.

5. P étant le polynôme caractéristique de \mathcal{D} , par le théorème de **Cayley-Hamilton**, on a $P(D) = 0$, en particulier $P(D)(f) = 0$, donc f est solution de l'équation différentielle \mathcal{E}_P . Quitte à diviser par le coefficient dominant de P , on peut supposer que P est unitaire (cette n'a pas d'influence sur l'ensemble des solutions de l'équation différentielle). Par le théorème de **D'Alembert-Gauss**, le polynôme P s'écrit sous la forme $P = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)^{m_k}$, où $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont des complexes deux à deux distincts, et m_1, \dots, m_r des entiers naturels (c'est l'hypothèse qui manque pour appliquer le résultat de la question 2.5 de la deuxième partie), maintenant c'est bien que f est de la forme

$$x \mapsto \sum_{k=1}^r R_k(x) e^{\lambda_k x}$$

où les $R_k \in \mathbb{C}_{m_k-1}[X]$.

Réciproquement, si f est de la forme

$$x \mapsto \sum_{k=0}^r R_k(x) e^{\lambda_k x}$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ des complexes deux à deux distincts, et les R_k des polynômes, notons $\deg(R_k) = m_k$ pour $k \in \{1, \dots, r\}$, alors

$$E_f \subset E = \left\{ x \mapsto \sum_{k=1}^r Q_k(x) e^{\lambda_k x}, \text{ pour } k = 0, \dots, r, Q_k \in \mathbb{C}_{m_k}[X], \right\}$$

En effet ; pour $\tau \in \mathbb{R}$, $f_\tau(x) = \sum_{k=0}^r Q_k(x + \tau) e^{\lambda_k(x + \tau)}$. Or pour tout $k = 0, \dots, r$, on a $Q(x + \tau) e^{\lambda_k(x + \tau)} = (e^{\lambda_k \tau} Q(x + \tau)) e^{\lambda_k x}$, et $e^{\lambda_k} Q(x + \tau)$ est un polynôme de degré $\leq m_k$, alors ($E_f \subset E$).

Comme E est un sous espace vectoriel de dimension finie (de dimension $m_1 + \dots + m_r$), alors E_f est aussi de dimension finie.

Conclusion :

Une condition nécessaire et suffisante pour la finitude de la dimension de E_f , est que la fonction f doit être de la forme $x \mapsto \sum_{k=0}^r R_k(x) e^{\lambda_k x}$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ des complexes (non forcément deux à deux distincts), et les R_k des polynômes à coefficients complexes.

النهاية FIN END