

Concours National Commun - Session 2013

Corrigé de l'épreuve de mathématiques I Filière MP

La transformée de Laplace et théorèmes de Tauber

Corrigé par M.TARQI

PARIE I. RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

1.1 Soit $z = x + iy$ un nombre complexe fixé.

1.1.1 On a, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $|e^{-zt}| = e^{-xt}$. Si $x \neq 0$, alors $\forall a > 0$, $\int_0^a e^{-xt} dt = \frac{1}{x}(1 - e^{-xa})$, si $x = 0$, $|e^{-zt}| = 1$. Donc la fonction $t \mapsto e^{-zt}$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ si et seulement si, $x = \operatorname{Re}(z) > 0$.

1.1.2 Soit γ un réel non nul. Posons $f(t) = \cos(\gamma t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Si $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$ existe et vaut L , alors pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$, la suite de terme général $f(u_n)$ converge vers L . Mais la suite de terme général $u_n = \frac{1}{\gamma} n\pi$ tend vers $+\infty$, cependant la suite image de terme général $f(u_n) = (-1)^n$ est divergente, ce qui prouve que f n'a pas de limite en $+\infty$. De même on montre que la fonction $t \mapsto \sin(\gamma t)$ n'admet pas de limite en $+\infty$, en conséquence la fonction $t \mapsto e^{-iyt} = \cos(\gamma t) - i \sin(\gamma t)$ possède une limite que si $y = 0$.

1.1.3 Pour tout $a > 0$, on a

$$\int_0^a e^{-zt} dt = \frac{1}{z}(1 - e^{-az})$$

- Si x est non nul, $\lim_{a \rightarrow +\infty} |e^{-az}| = \lim_{a \rightarrow +\infty} e^{-ax}$ existe et vaut 0 si et seulement si, $x > 0$.
- Si $x = 0$ (donc $y \neq 0$ car z est non nul), $\lim_{a \rightarrow +\infty} e^{-az} = \lim_{a \rightarrow +\infty} e^{-iay}$ n'existe pas.

En conclusion, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-zt} dt$ converge si et seulement si, $\operatorname{Re}(z) > 0$ et dans ce cas

$$\int_0^{+\infty} e^{-zt} dt = \frac{1}{z}.$$

1.2 Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$ et $z_0 \in \mathbb{C}$.

1.2.1 La fonction $t \mapsto e^{-z_0 t} f(t)$ étant continue sur \mathbb{R}^+ , donc sa primitive F sur \mathbb{R}^+ est dérivable sur \mathbb{R}^+ et pour tout $x \geq 0$, $F'(x) = e^{-z_0 x} f(x)$, et comme $x \mapsto e^{-z_0 x} f(x)$ est continue F est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^+ .

D'autre part, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ existe car la fonction $t \mapsto e^{-z_0 t} f(t)$ a une intégrale convergente, donc F est bornée sur \mathbb{R}^+ .

1.2.2 F étant bornée sur \mathbb{R}^+ , donc il existe $M > 0$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $|F(t)| \leq M$. Donc

$$\forall t \geq 0, |e^{-(z-z_0)t} F(t)| \leq M e^{-\operatorname{Re}(z-z_0)t},$$

et comme la fonction $t \mapsto e^{-\operatorname{Re}(z-z_0)t}$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ , il est de même de la fonction $t \mapsto e^{-(z-z_0)t} F(t)$.

1.2.3 Soit $A > 0$, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^A e^{-zt} f(t) dt &= \int_0^A e^{-(z-z_0)t} e^{-z_0 t} f(t) dt \\ &= [e^{-(z-z_0)t} F(t)]_0^A + (z - z_0) \int_0^A e^{-(z-z_0)t} F(t) dt \\ &= e^{-(z-z_0)A} F(A) + (z - z_0) \int_0^A e^{-(z-z_0)t} F(t) dt, \quad \text{car } F(0) = 0. \end{aligned}$$

On obtient donc par passage à la limite, quand A tend vers $+\infty$, l'égalité demandée (car F est bornée) :

$$\int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt = (z - z_0) \int_0^{+\infty} e^{-(z-z_0)t} F(t) dt,$$

donc $\int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt$ est bien convergente.

1.3 Un lemme de Littlewood

1.3.1 On obtient à l'aide d'une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_x^{\alpha x} (\alpha x - t) \psi''(t) dt &= [(\alpha x - t) \psi'(t)]_x^{\alpha x} + \int_x^{\alpha x} \psi'(t) dt \\ &= -(\alpha - 1)x \psi'(x) + \int_x^{\alpha x} \psi'(t) dt \\ &= -(\alpha - 1)x \psi'(x) + \psi(\alpha x) - \psi(x). \end{aligned}$$

D'où la formule :

$$\psi(\alpha x) - \psi(x) = (\alpha - 1)x \psi'(x) + \int_x^{\alpha x} (\alpha x - t) \psi''(t) dt.$$

1.3.2 D'après ce qui précède, on peut écrire :

$$\begin{aligned} |x \psi'(x)| &\leq \frac{1}{1 - \alpha} (|\psi(\alpha x)| + |\psi(x)|) + \frac{1}{1 - \alpha} \left| \int_x^{\alpha x} (\alpha x - t) \psi''(t) dt \right| \\ &\leq \frac{2}{1 - \alpha} \sup_{t \in [0, x]} |\psi(t)| + \int_{\alpha x}^x (t - \alpha x) |\psi''(t)| dt \end{aligned}$$

Mais $\psi''(t) \leq \frac{M}{t^2}$ pour tout $t > 0$ et si $t \in [\alpha x, x]$, $\frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{(\alpha x)^2}$. On obtient donc :

$$\int_{\alpha x}^x (t - \alpha x) |\psi''(t)| dt \leq \frac{M}{(\alpha x)^2} \int_{\alpha x}^x \left(\alpha x t - \frac{t^2}{2} \right) dt = M \frac{(1 - \alpha)^2}{2\alpha^2}$$

D'où :

$$|x \psi'(x)| \leq \frac{2}{1 - \alpha} \sup_{t \in [0, x]} |\psi(t)| + \frac{1 - \alpha}{2\alpha^2} M$$

1.3.3 Soit $\varepsilon > 0$ donné. Il existe $\alpha_0 \in]0, 1[$ tel que $\frac{1 - \alpha_0}{2\alpha_0^2} M \leq \frac{\varepsilon}{2}$. D'autre part, ψ est prolongeable par

continuité en 0 (par 0), donc il existe $\eta > 0$ tel que $0 < x < \eta$ entraîne $|\psi(x)| \leq \frac{1 - \alpha_0}{2} \frac{\varepsilon}{2}$. L'inégalité (*) qui est vraie pour tout $\alpha \in]0, 1[$, entraîne $|x \psi'(x)| \leq \varepsilon$ dès que $x \in]0, \eta[$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \psi'(x) = 0$.

PARIE II. EXEMPLES ET PROPRIÉTÉS DE LA TRANSFORMÉE DE LAPLACE

2.1 D'après ce qui précède, la fonction $t \mapsto e^{-(z-\lambda)t}$ a une intégrale convergente si et seulement si, $Re(z-\lambda) > 0$, autrement dit la fonction $L(f_\lambda)(z)$ existe si et seulement si, $Re(z) > Re(\lambda)$. Donc $L(f_\lambda)$ est définie sur $\{z \in \mathbb{C} / Re(z) > Re(\lambda)\}$, de plus

$$L(f_\lambda)(z) = \int_0^{+\infty} e^{-(z-\lambda)t} dt = \frac{1}{z-\lambda}.$$

2.2 Abscisse de convergence

Soit $E = \{Re(z) / L(f)(z) \text{ existe}\}$. La propriété est évidente si E est vide on prend donc $\sigma = +\infty$, si E est non vide deux cas sont possibles :

- Si E est non minoré, on prend $\sigma = -\infty$. Alors $L(f)$ serait définie sur tout le plan complexe.
- Si E est minoré, on prend $\sigma = \inf E$. En effet, soit $x_0 > \sigma$ et $z = x + iy$ tel que $x > x_0$, alors la fonction $t \mapsto f(t)e^{-zt}$ a une intégrale convergente sur $]0, +\infty[$ (d'après la question 1.2.3), d'où $x \in E$.

On en déduit $E = [\sigma, +\infty[$ si $\sigma \in E$ et $E =]\sigma, +\infty[$ si $\sigma \notin E$.

2.3 Quelques propriétés

2.3.1 D'après 1.2.3, on a $L(f)(z) = (z - z_0) \int_0^{+\infty} e^{-(z-z_0)t} F(t) dt$. La fonction $z \mapsto z - z_0$ est continue sur \mathbb{C} . La fonction F est de classe \mathcal{C}^1 et bornée sur \mathbb{R}^+ par M . La fonction $\phi : (z, t) \rightarrow e^{-(z-z_0)t} F(t)$ est continue sur $\Pi(\sigma(f)) \times \mathbb{R}^+$, et :

$$|\phi(z, t)| \leq M e^{-(x-x_0)t} \leq M e^{-(a-x_0)t}$$

pour tout z tel que $Re(z) = x > a > Re(z_0) = x_0$.

La fonction majorante ne dépend pas de z et est intégrable sur \mathbb{R}^+ . Le théorème de continuité des intégrales à paramètres affirme que $L(f)$ est continue pour tout z tel que $Re(z) \geq a$. Donc, puisque la notion de continuité est une notion locale, $L(f)$ est continue sur $\Pi(\sigma(f))$.

2.3.2 Toujours d'après 1.2.3, on a :

$$L_f(x, y) = L(f)(x + iy) = (z - z_0) \int_0^{+\infty} e^{-(z-z_0)t} F(t) dt$$

Montrons que f est \mathcal{C}^1 sur Ω_f , pour cela il suffit de montrer que les dérivées partielles $\frac{\partial L_f}{\partial x}$ et $\frac{\partial L_f}{\partial y}$ existent et sont continues sur Ω_f .

La fonction $(x, y) \mapsto z - z_0$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 . Soit maintenant, avec y fixé, la pplication :

$$g : (x, t) \mapsto e^{-(z-z_0)t} F(x)$$

g est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Elle admet une dérivée partielle par rapport à x et :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = -tg(x, t)$$

qui est continue sur le même domaine. De plus :

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq M t e^{-(x-a_0)t} \leq M t e^{-t(a-a_0)}$$

pour tout z tel que $Re(z) = x > a > Re(z_0) = a_0$. Cette dernière fonction est intégrable sur \mathbb{R}^+ . Le théorème de dérivation des intégrales à paramètres affirme que L_f est dérivable par rapport à x (cette dérivée partielle étant continue) pour tout z tel que $Re(z) \geq a$. Donc, puisque la notion de dérivabilité est une notion locale, $\frac{\partial L_f}{\partial x}$ existe et est continue sur $\Pi(\sigma(f))$ et :

$$\frac{\partial L_f}{\partial x}(x, y) = \int_0^{+\infty} e^{-(z-z_0)t} F(t) dt - (z - z_0) \int_0^{+\infty} t e^{-(z-z_0)t} F(t) dt \quad (*).$$

Soit $A > 0$ donné,

$$\int_0^A e^{-(z-z_0)t} F(t) dt = \left[-\frac{e^{-(z-z_0)t}}{z - z_0} F(t) \right]_0^A + \frac{1}{z - z_0} \int_0^A e^{-zt} f(t) dt$$

En prenant la limite lorsque A tend vers l'infini, il vient, car $F(0) = 0$, $Re(z) > Re(z_0)$ et F majorée sur \mathbb{R}^+ :

$$\int_0^{+\infty} e^{-(z-z_0)t} F(t) dt = \frac{1}{z - z_0} \int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt \quad (1).$$

D'autre part, une primitive de $t \mapsto (z - z_0)e^{-(z-z_0)t}$ sur \mathbb{R}^+ est $t \mapsto -\frac{(z - z_0)t + 1}{z - z_0} e^{-(z-z_0)t}$. Donc :

$$\begin{aligned} \int_0^A (z - z_0)t e^{-(z-z_0)t} F(t) dt &= \left[F(t) \left(-\frac{(z - z_0)t + 1}{z - z_0} e^{-(z-z_0)t} \right) \right]_0^A \\ &+ \int_0^A \frac{(z - z_0)t + 1}{z - z_0} e^{-(z-z_0)t} e^{-z_0 t} f(t) dt \end{aligned}$$

Pour les mêmes raisons, en prenant la limite lorsque A tend vers l'infini, il vient :

$$\int_0^{+\infty} (z - z_0)t e^{-(z-z_0)t} F(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{(z - z_0)t + 1}{z - z_0} e^{-zt} f(t) dt \quad (2).$$

D'où, en tenant compte des relations (1) et (2) et de l'égalité (*) :

$$\frac{\partial L_f}{\partial x}(x, y) = - \int_0^{+\infty} t e^{-zt} f(t) dt.$$

Et de la même façon, on démontre l'existence et la continuité sur $]\sigma(f), +\infty[\times \mathbb{R}$ de $\frac{\partial L_f}{\partial x}$ avec cette

fois, pour tout $(x, y) \in]\sigma(f), +\infty[\times \mathbb{R}$, $\frac{\partial L_f}{\partial y}(x, y) = -i \int_0^{+\infty} t e^{-zt} f(t) dt$.

2.3.3 Soit $x > \sigma(f)$. On sait que $L(f)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]\sigma(f), +\infty[$ et que :

$$L(f)'(x) = - \int_0^{+\infty} t e^{-xt} f(t) dt = -L(t \mapsto t f(t))(x).$$

La fonction $t \mapsto t f(t)$ est un élément de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$. La même démonstration que celle de la question précédente où f a été remplacé par $t \mapsto t f(t)$ donnera que $L(f)$ est de classe \mathcal{C}^2 sur $]\sigma(f), +\infty[$ et que :

$$L(f)''(x) = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-xt} f(t) dt.$$

Une démonstration par récurrence montre que $L(f)$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]\sigma(f), +\infty[$ et que pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$L(f)^{(p)}(x) = (-1)^p \int_0^{+\infty} t^p e^{-xt} f(t) dt.$$

2.3.4 On sait que pour tout x et x_0 dans $]\sigma(f), +\infty[$:

$$L(f)(x) = (x - x_0) \int_0^{+\infty} e^{-(x-x_0)t} F(t) dt,$$

où F continue, majorée sur \mathbb{R}^+ par M et $F(0) = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de F , il existe $\alpha > 0$ tel que $0 \leq x < \alpha \Rightarrow |F(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

On a aussi :

$$\int_0^{+\infty} e^{-(x-x_0)t} F(t) dt = \int_0^\alpha e^{-(x-x_0)t} F(t) dt + \int_\alpha^{+\infty} e^{-t(x-x_0)} F(t) dt.$$

Or, si $x > x_0$:

$$\left| \int_0^\alpha e^{-(x-x_0)t} F(t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{1 - e^{-\alpha(x-x_0)}}{x - x_0} \right)$$

et

$$\left| \int_\alpha^{+\infty} e^{-(x-x_0)t} F(t) dt \right| \leq M \frac{e^{-\alpha(x-x_0)}}{x - x_0}.$$

Ainsi :

$$|L(f)(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + M e^{-\alpha(x-x_0)}$$

Or pour cet α fixé, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\alpha(x-x_0)} = 0$. Il existe donc $A > 0$ tel que $x > A \Rightarrow M e^{-\alpha(x-x_0)} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Finalement, pour $0 > A$, il vient $|L(f)(x)| < \varepsilon$.

D'où :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} L(f)(x) = 0.$$

2.4 Un exemple

2.4.1 On a $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$, donc $\frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{1}{2} + o(1)$, ainsi la fonction w se prolonge par $\frac{1}{2}$ en 0.

Puisque w se prolonge par continuité en 0, les deux intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$ sont de même nature. Or pour tout $t \geq 1$, $\left| \frac{1 - \cos t}{t^2} \right| \leq \frac{2}{t^2}$ et par conséquent $\int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$ existe, il est de même de $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$. Ceci montre que la transformée de Laplace de w existe en 0, et en tenant compte de la définition de $\sigma(w)$, on a donc nécessairement $\sigma(w) \leq 0$.

2.4.2 D'après l'étude précédente, $L(w)$ admet une dérivée seconde sur $]0, +\infty[$ avec $\forall x > 0, L(w)''(x) = \int_0^{+\infty} (1 - \cos t) e^{-xt} dt$.

Les calculs montrent que

$$L(w)''(x) = \int_0^{+\infty} (1 - \cos t) e^{-xt} dt = \frac{1}{x(x^2 + 1)}.$$

2.4.3 On trouve $L(w)'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \alpha$ et $L(w)(x) = x \ln(x) - \frac{1}{2} x \ln(1+x^2) - \arctan(x) + \alpha x + \beta$ avec α et β sont des réels.

On sait que $0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} L(w)(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\ln \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \alpha \right) + \beta$, donc nécessairement $\alpha = \beta = 0$.

D'où

$$L(w)(x) = x \ln(x) - \frac{1}{2} x \ln(1+x^2) - \arctan(x).$$

2.5 Un théorème de Césaro

2.5.1 h étant continue par morceaux sur $[0, 1]$ donc bornée par un certain $M > 0$, il est de même de la fonction $t \mapsto h(e^{-xt})$ car si $t \geq 0$, e^{-xt} décrit l'intervalle $[0, 1]$. Ainsi pour tout $t \geq 0$,

$$|e^{-xt} g(t) h(e^{-xt})| \leq M e^{-xt} g(t).$$

Donc la fonction $t \mapsto e^{-xt} g(t) h(e^{-xt})$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

2.5.2 Soit $x > 0$. Avec le changement de variable $u = e^{-xt}$, on a :

$$xL(g)(x) = \int_0^1 g\left(\frac{-\ln u}{x}\right) du$$

et

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt} g(t) h(e^{-xt}) dt = \int_0^1 h(u) g\left(\frac{-\ln u}{x}\right) du.$$

D'après les hypothèses $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^1 g\left(\frac{-\ln u}{x}\right) du - 1 = 0$. Maintenant pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} \Delta_x(X^k) - \int_0^1 u^k du &= \int_0^1 u^k \left[g\left(\frac{-\ln u}{x}\right) - 1 \right] du \\ &= \frac{1}{k+1} \int_0^1 \left[g\left(\frac{-\ln t}{(k+1)x}\right) - 1 \right] dt \quad \text{avec } t = u^{k+1} \end{aligned}$$

Ainsi $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\Delta_x(X^k) - \int_0^1 u^k du \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{k+1} \int_0^1 \left[g\left(\frac{-\ln t}{(k+1)x}\right) - 1 \right] dt = 0$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \Delta_x(X^k) = \int_0^1 t^k dt,$$

puis on conclut par linéarité de l'opérateur Δ_x .

2.5.3 D'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers h sur $[0, 1]$. On a alors pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\left| \Delta_x(h) - \int_0^1 h(u) du \right| \leq |\Delta_x(h) - \Delta_x(P_n)| + \left| \Delta_x(P_n) - \int_0^1 P_n(u) du \right| + \left| \int_0^1 (P_n(u) - h(u)) du \right|$$

Or

$$|\Delta_x(h) - \Delta_x(P_n)| \leq \sup_{u \in [0,1]} |h(u) - P_n(u)| x \int_0^{+\infty} e^{-xt} g(t) dt = \sup_{u \in [0,1]} |h(u) - P_n(u)| x L(g)(x),$$

donc $\lim_{x \rightarrow 0} \Delta_x(h) - \Delta_x(P_n) = 0$. Les autres termes convergent vers 0 d'après le résultat de la question

2.5.2 et la convergence uniforme. D'où

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \Delta_x(h) = \int_0^1 h(t) dt.$$

2.5.4 Calculons $\Delta_x(h_1)$: on a pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned}\Delta_x(h_1) &= \int_0^1 g\left(\frac{-\ln u}{x}\right) h_1(u) \, du \\ &= \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{1}{u} g\left(\frac{-\ln u}{x}\right) \, du \\ &= -x \int_{\frac{1}{x}}^0 g(t) \, dt, \quad \text{avec } t = \frac{-\ln u}{x}.\end{aligned}$$

D'où $\int_0^{\frac{1}{x}} g(t) \, dt = \frac{1}{x} \Delta_x(h_1)$.

Ainsi, pour tout $a > 0$, on a $\frac{1}{a} \int_0^a g(t) \, dt = \Delta_{\frac{1}{a}}(h_1)$ et donc

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{a} \int_0^a g(t) \, dt = \lim_{x \rightarrow 0^+} \Delta_x(h_1) = \int_0^1 h_1(t) \, dt = [\ln t]_{\frac{1}{e}}^1 = 1.$$

PARTIE III. COMPORTEMENT AU VOISINAGE DE L'ORIGINIE

3.1 Soit $f \in (\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$.

3.1.1 Soit $H(x) = \int_0^x f(t) \, dt$ avec $x > 0$. H est \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[$ et admet une limite finie en $+\infty$, donc bornée sur $[0, +\infty[$. Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto F(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t)e^{-xt} = 0$, donc par une intégration par parties, $\forall x > 0$,

$$\begin{aligned}x \int_0^{+\infty} (F(t) - L(f)(0))e^{-xt} \, dt &= [(F(t) - L(f)(0))e^{-xt}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} \, dt \\ &= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} \, dt - L(f)(0)\end{aligned}$$

d'où

$$L(f)(x) - L(f)(0) = x \int_0^{+\infty} (F(t) - L(f)(0))e^{-xt} \, dt.$$

3.1.2 On sait que $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = L(f)(0)$, donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$ tel que $|F(t) - L(f)(0)| \leq \varepsilon$ dès que $t \geq A$. D'autre part, pour $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned}\left| x \int_0^{+\infty} (F(t) - L(f)(0))e^{-xt} \, dt \right| &\leq \left| x \int_0^A (F(t) - L(f)(0))e^{-xt} \, dt \right| + \left| x \int_A^{+\infty} (F(t) - L(f)(0))e^{-xt} \, dt \right| \\ &\leq \left| x \int_0^A (F(t) - L(f)(0))e^{-xt} \, dt \right| + \varepsilon x \left| \int_A^{+\infty} e^{-xt} \, dt \right| \\ &\leq \left| x \int_0^A (F(t) - L(f)(0)) \, dt \right| + \varepsilon,\end{aligned}$$

inégalité qui montre que $x \mapsto x \int_0^{+\infty} (F(t) - L(f)(0))e^{-xt} \, dt$ tend vers 0 en 0^+ , il est de même de la fonction $x \mapsto L(f)(x) - L(f)(0)$, c'est à dire

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) \, dt = \int_0^{+\infty} f(t) \, dt.$$

3.2 La fonction $t \mapsto e^{it}$ répond à la question.

3.3 Théorème de Tauber

3.3.1 Il existe $A > 0$ tel que $|tf(t)| < 1$ dès que $x \geq A$, et soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $x = \operatorname{Re}(z) > 0$. Alors pour tout $t \geq A$, on a $|e^{-tz}f(t)| \leq \frac{e^{-tx}}{t}$ et comme la fonction $t \mapsto \frac{e^{-tx}}{t}$ est intégrable sur $[A, +\infty[$, car $x > 0$, donc l'intégrale $\int_A^{+\infty} e^{-tz}f(t) dt$ existe, il est de même de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-tz}f(t) dt$ (la fonction $t \mapsto e^{-zt}f(t)$ est continue sur $[0, A]$). Donc $\sigma(f) \leq 0$.

3.3.2 Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Il existe $A > 0$ tel que $x \geq A \Rightarrow |tf(t)| \leq \varepsilon$. On a donc :

$$\frac{1}{a} \int_0^a |tf(t)| dt = \frac{1}{a} \int_0^A |tf(t)| dt + \frac{1}{a} \int_A^a |tf(t)| dt \leq \frac{1}{a} \int_0^A |tf(t)| dt + \frac{(a-A)\varepsilon}{a}$$

Mais $\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{a} \int_0^A |tf(t)| dt = 0$, donc l'inégalité précédente montre que $\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{a} \int_0^a |tf(t)| dt = 0$.

3.3.3 Une étude simple de la fonction $u \mapsto \varphi(u) = u - e^{-u} + 1$, montre que $\varphi(u) \geq 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}$.

3.3.4 Soit a et x des réels strictement positifs, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt - \int_0^a f(t) dt \right| &\leq \int_0^a (1 - e^{-xt})|f(t)| dt + \int_a^{+\infty} |f(t)|e^{-xt} dt \\ &\leq x \int_0^a t|f(t)| dt + \int_a^{+\infty} |f(t)|e^{-xt} dt \\ &\leq x \int_0^a t|f(t)| dt + \sup_{t \geq a} |tf(t)| \frac{e^{-ax}}{ax} \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} \left| \int_a^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt \right| &\leq \int_a^{+\infty} |tf(t)| \frac{e^{-xt}}{t} dt \\ &\leq \sup_{t \geq a} |tf(t)| \int_a^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t} dt \\ &= \sup_{t \geq a} |tf(t)| \frac{e^{-ax}}{ax} \leq \sup_{t \geq a} |tf(t)| \frac{1}{ax} \end{aligned}$$

D'où l'inégalité demandée :

$$\left| \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt - \int_0^a f(t) dt \right| \leq x \int_0^a |tf(t)| dt + \sup_{t \geq a} |tf(t)| \frac{1}{ax}.$$

3.3.5 L'inégalité précédente reste vraie pour $a = \frac{1}{x}$; on obtient donc :

$$\left| \int_0^{+\infty} f(t)e^{-\frac{t}{x}} dt - \int_0^a f(t) dt \right| \leq \frac{1}{a} \int_0^a |tf(t)| dt + \sup_{t \geq a} |tf(t)|.$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$ donné. D'après les données et le résultat de la question 3.3.2, il existe $a_0 > 0$ tel que pour tout $a \geq a_0$, on a :

$$\frac{1}{a} \int_0^a |tf(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$\sup_{t \geq a} |tf(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi, pour tout $a \geq a_0$, on obtient :

$$\left| \int_0^{+\infty} f(t)e^{\frac{-t}{a}} dt - \int_0^a f(t) dt \right| \leq \varepsilon.$$

On en déduit que si $\lim_{x \rightarrow 0^+} L(f)(x) = \mu$, alors $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a f(t) dt = \mu$.

PARIE IV. UNE GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE TAUBER DANS LE CAS RÉEL

4.1 La fonction f_1 est continue sur \mathbb{R}^+ (c'est une fonction de classe \mathcal{C}^1), donc par opérations les fonctions f_2 et f_3 sont continues sur $]0, +\infty[$.

Il existe $\alpha_x \in]a, x[$ tel que $f_1(x) = \int_0^x tf(t) dt = x\alpha_x f(\alpha_x)$, ceci montre que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_2(x)$ existe. De même $f_3(x) = \frac{\alpha_x}{x} f_1(\alpha_x)$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_3(x)$ existe car $0 < \frac{\alpha_x}{x} < 1$.

4.2 pour tout $x > 0$ et $t > 0$, on a $|f_1(x)| \leq Mx$ et donc $|f_2(t)e^{-xt}| \leq Me^{-xt}$; donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(t)e^{-xt} = 0$.

4.3 L'inégalité précédente $|f_2(t)e^{-xt}| \leq Me^{-xt}$ montre que la fonction $t \mapsto f_2(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et ceci pour tout $x > 0$, donc $\sigma(f_2) \leq 0$.

D'autre part, $|f_3(x)e^{-xt}| \leq M \frac{e^{-xt}}{t^2}$ et la fonction $t \mapsto \frac{e^{-xt}}{t^2}$ est intégrable (par exemple) sur tout $[1, +\infty[$, donc $t \mapsto f_3(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et même sur $[0, +\infty[$, car elle est continue sur $[0, 1]$ (par prolongement). Donc $\sigma(f_3) \leq 0$.

4.4 On remarque que f_2 est dérivable est que $f_2'(x) = \frac{xf_1'(x) - f_1(x)}{x^2} = f(x) - f_3(x)$ et donc une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} x \int_u^v f_2(x)e^{-xt} dt &= - \int_u^v f_2(t)(e^{-xt})' dt \\ &= -[f_2(t)e^{-xt}]_u^v + \int_u^v (f(t) - f_3(t)) dt \\ &= f_2(u)e^{-xu} - f_2(v)e^{-vx} + \int_u^v f(x)e^{-xt} dt - \int_u^v f_3(x)e^{-xt} dt \end{aligned}$$

ce qui entraîne évidemment l'égalité en question.

Puisque les fonctions $t \mapsto f_2(t)e^{-xt}$ et $t \mapsto f_3(t)e^{-xt}$ sont intégrables sur $[0, +\infty[$, la limite de la quantité à droite (l'égalité précédente) existe lorsque le couple (u, v) tend vers $(0, +\infty)$, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt$ existe et ceci pour tout $x > 0$, par conséquent $\sigma(f) \leq 0$. De plus, le passage à la limite entraîne :

$$\forall x > 0, \quad L(f)(x) = xL(f_2)(x) + L(f_3)(x).$$

4.5

4.5.1 D'après le lemme de Littelwood, il suffit donc de montrer que la fonction $x \mapsto x^2 L(f)''(x)$ est bornée sur $]0, +\infty[$. En effet, pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a $L(f)''(x) = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-xt} f(t) dt$ et donc

$$|x^2 L(f)''(x)| \leq \sup_{t \geq 0} |tf(t)| \int_0^{+\infty} x^2 t e^{-xt} dt$$

Or $\int_0^{+\infty} x^2 t e^{-xt} dt = [-(xt+1)e^{-xt}]_0^{+\infty} = 1$, donc $x \mapsto x^2 L(f)''(x)$ est bornée, et par conséquent $\lim_{x \rightarrow 0^+} x L(f)'(x) = 0$.

4.5.2 Pour tout $x > 0$, on a

$$\begin{aligned} xL(g)(x) &= x \int_0^{+\infty} e^{-xt} g(t) dt \\ &= x \int_0^{+\infty} e^{-xt} \left(1 - \frac{tf(t)}{M}\right) dt \\ &= x \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt - \frac{x}{M} \int_0^{+\infty} tf(t)e^{-xt} dt \\ &= 1 + \frac{1}{M} xL(f)'(x) \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} xL(g)(x) = 1 + \frac{1}{M} \lim_{x \rightarrow 0^+} xL(f)'(x) = 1.$$

4.5.3 D'après le théorème de Césaro, puisque $\lim_{x \rightarrow 0^+} xL(g)(x) = 1$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x g(t) dt = 1$. Mais

$$\frac{1}{x} \int_0^x g(t) dt = \frac{1}{x} \int_0^x dt - \frac{1}{Mx} \int_0^x tf(t) dt = 1 - Mx f_1(x) = x f_3(x).$$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f_3(x) = 0$.

4.6 Soit donc $\varepsilon > 0$ et $A > 0$ tel que $|f_2(t)| \leq \varepsilon$ dès que $t \geq A$. Alors on peut écrire :

$$\begin{aligned} |xL(f_2)(x)| &\leq \left| \int_0^A x e^{-xt} f_2(t) dt \right| + \left| \int_A^{+\infty} x e^{-xt} f_2(t) dt \right| \\ &\leq \sup_{t \in [0, A]} |f_2(t)| \int_0^A x e^{-xt} dt + \varepsilon \int_A^{+\infty} x e^{-xt} dt \\ &\leq \sup_{t \in [0, A]} |f_2(t)| Ax + \varepsilon. \end{aligned}$$

Cette inégalité montre que $\lim_{x \rightarrow 0^+} xL(f_2)(x) = 0$.

4.7 On sait que, d'après la question 4.4, que $\forall x > 0$, $L(f_3)(x) = L(f)(x) - xL(f_2)(x)$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} L(f_3)(x)$ existe et vaut 0 (d'après les hypothèses $\lim_{x \rightarrow 0^+} L(f)(x) = 0$). Le théorème de Tauber (question 3.3) assure

que $\int_0^{+\infty} f_3(t) dt$ existe et égale à 0, car $\lim_{x \rightarrow 0^+} x f_3(x) = 0$.

4.8 On a

$$L(f)(0) = \int_0^{+\infty} f(t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{f'(t)}{t} dt = [f_2(t)]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{f_1(t)}{t} dt = L(f_3)(0),$$

car $f_2(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = 0$. Donc $L(f)(0) = 0$.

4.9 Considérons la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $t \mapsto f(t) = \phi(t) - \mu e^{-t}$. La fonction f vérifie les conditions suivantes :

- la fonction $t \mapsto t\phi(t) - \mu t e^{-t}$ est bornée sur $]0, +\infty[$,
- la fonction $x \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt = \int_0^{+\infty} \phi(t)e^{-xt} dt - \frac{\mu}{x+1}$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0^+ .

Donc, d'après ce qui précède, $L(f)(0)$ existe vaut 0, c'est à dire $L(\phi)(0)$ existe et vaut μ .

•••••