CNC

Corrigé de l'épreuve: Mathématiques II

Filière MP

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\widetilde{A}$ la comatrice de A

I. Expression d'un déterminant

Dans cette partie on considère une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, deux vecteurs colonnes u, v de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$; n étant un entier naturel non nul.

1.1.

On suppose ici que la matrice B est inversible.

1.1.1. Sachant que la matrice B est inversible, on a

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} B & v \\ {}^t u & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ {}^t u & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & w \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} B & v \\ {}^t u & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & Bw \\ {}^t u & {}^t uw + \lambda \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} Bw = v \\ {}^t uw + \lambda = b \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} w = B^{-1} v \\ \lambda = b - ({}^t uB^{-1} v) \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi

il existe un seul vecteur $w \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et un seul scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ vérifiant

$$\begin{pmatrix} B & v \\ {}^t u & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ {}^t u & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & w \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad (1)$$

ils sont donnés par

$$w = B^{-1}v \quad \text{et} \quad \lambda = b - ({}^t u B^{-1} v)$$

1.1.2. En développant selon la dernière colonne, on a

$$\begin{vmatrix} B & 0 \\ {}^t u & 1 \end{vmatrix} = |B|$$

1.1.3. Un résultat de cours affirme que ${}^t\widetilde{B}B = B\,{}^t\widetilde{B} = |B| \cdot I_n$. B étant inversible on a alors

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}\,{}^t\widetilde{B}$$

1.1.4. Sachant que $\lambda = b - ({}^t u B^{-1} v)$ et que le déterminant est une application multiplicative, l'égalité des déterminants dans la relation (1 - p. précédente) donne

$$\begin{vmatrix} B & v \\ {}^t u & b \end{vmatrix} = |B| \times \lambda = |B|(b - {}^t u B^{-1} v) = b|B| - {}^t u\,{}^t\widetilde{B} v$$

$$\begin{vmatrix} B & v \\ {}^t u & b \end{vmatrix} = b|B| - {}^t u\,{}^t\widetilde{B} v$$

1.2.

On ne suppose plus que B *est inversible.*

1.2.1. B admet au plus un nombre fini de valeurs propres dans $\mathbb{K}$ (les racines de son polynôme caractéristique dans $\mathbb{K}$), donc il existe une réel ε tel que $]0, \varepsilon[$ ne contienne aucune valeur propre de B. Pour tout $x \in]0, \varepsilon[$, x n'est pas une valeur propre de B et donc $B - xI_n$ est inversible.

$$\exists \varepsilon > 0\,;\ \forall x \in]0, \varepsilon[\,,\ B_x = B - xI_n \text{ est inversible.}$$

1.2.2. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. L'application $A \longmapsto {}^t A$ est linéaire et $\mathscr{M}_m(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel de dimension finie donc elle est continue.

Pour l'application $A \longmapsto \det(A)$, $\det(A)$ c'est une expression polynomiale (de plusieurs variables) des coefficients de la matrice A, qui sont en fait les coordonnées de A dans la base canonique de $\mathscr{M}_m(\mathbb{K})$. Alors det est continue.

Justification

Si $S = \{|\lambda| \,/\, \lambda \in \mathrm{Sp}(B) \setminus \{0\}\}$, prendre par exemple $\varepsilon = \frac{1}{2}\min S$ si $S \neq \emptyset$ et $\varepsilon = 1$ si $S = \emptyset$.

Précision

Ce qui démontre en fait que $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Justification

Les applications composantes $A \longmapsto (-1)^{i+j}\Delta_{i,j}(A)$ de l'application Com dans la base canonique de $\mathcal{M}_m(\mathbb{K})$, sont toutes des fonctions polynomiales des coefficients de A. Ce qui explique sa continuité.

Autre justification: On pourrait aussi regarder $A \longmapsto \det(A)$ comme la composée de l'application qui à A associe la famille de ces vecteurs colonnes $(C_1, C_2, \ldots, C_m)$, qui est linéaire donc continue, et de l'application qui à $(C_1, C_2, \ldots, C_m)$ associe $\det_{\mathscr{B}}(C_1, C_2, \ldots, C_m)$ qui est multilinéaire et donc continue aussi. ($\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$)

Les application $A \longmapsto {}^tA$ et $A \longmapsto \det(A)$ sont continues sur $\mathcal{M}_m(\mathbb{K})$

On admet dans la suite que l'application Com : $A \longmapsto \widetilde{A}$ *est aussi continue sur* $\mathcal{M}_m(\mathbb{K})$.

1.2.3. Soit maintenant une matrice quelconque B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et soit, selon la question 1.2.1, $\varepsilon > 0$ tel que $B - xI_n$ soit inversible pour tout $x \in]0, \varepsilon[$. D'après la question 1.1.4, on a donc pour tous $u, v \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ et $b \in \mathbb{K}$,

$$\forall x \in]0, \varepsilon[, \begin{vmatrix} B - xI_n & v \\ {}^tu & b \end{vmatrix} = b|B - xI_n| + {}^tu\,{}^t\mathrm{Com}(B - xI_n)\,v \tag{2}$$

Par continuité des applications $A \longmapsto |A|$ et $A \longmapsto {}^t\mathrm{Com}(A)$ on a

$$\lim_{x\to 0} |B - xI_n| = |B| \text{ et } \lim_{x\to 0} {}^t\mathrm{Com}(B - xI_n) = {}^t\mathrm{Com}(B)$$

on achève la justification en constatant que lorsque u, v et b sont fixés les applications

$$A \longmapsto \begin{pmatrix} A & v \\ {}^tu & b \end{pmatrix} \text{ et } A \longmapsto {}^tuAv$$

définies sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont linéaires et de ce fait sont continues. Donc par composition d'applications continues

$$\lim_{x\to 0} \begin{vmatrix} B - xI_n & v \\ {}^tu & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B & v \\ {}^tu & b \end{vmatrix} \text{ et } \lim_{x\to 0} {}^tu\,{}^t\mathrm{Com}(B - xI_n)\,v = {}^tu\,{}^t\mathrm{Com}(B)\,v$$

En passant alors à la limite quand x tend vers 0 dans la relation (2), on obtient

$$\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \forall (u, v) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})^2,\ \begin{vmatrix} B & v \\ {}^tu & b \end{vmatrix} = b|B| - {}^tu\,{}^t\widetilde{B}\,v$$

Remarque

Le procédé utilisé dans cette question est utilisé dans beaucoup de situation en algèbre linéaire (et encore plus en analyse): pour montrer qu'une propriété est vérifié par toutes la matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on commence par montrer qu'elle est vérifiée par les éléments d'une partie dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et ensuite on l'étend par des arguments de continuité à tous les éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

II. Réunion de sous-espaces vectoriels

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On suppose qu'il existe un entier naturel $r \geqslant 2$ et des sous-espaces vectoriels $F_1, F_2, \ldots, F_r$ de E tels que

$$E = F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_r$$

2.1. Si $r = 2$. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'aucun des deux sous-espaces F_1 et F_2 n'est inclu dans l'autre. Soient alors des vecteurs $x_1 \in F_1 \setminus F_2$ et $x_2 \in F_2 \setminus F_1$. $x = x_1 + x_2$ est un vecteur de $E = F_1 \cup F_2$ donc il appartient forcément à F_1 ou à F_2. Or si jamais $x \in F_1$ alors on devrait avoir $x_2 = x - x_1 \in F_1$ car $x, x_1 \in F_1$ et F_1 est un sous-espace vectoriel de E. Ce qui est contradictoire. Et de même supposer que $x \in F_2$ mène aussi à une contradiction.

Ce qui est absurde.

Ainsi

$$E = F_1 \cup F_2 \Longrightarrow F_1 \subset F_2 \text{ ou } F_2 \subset F_1$$

Dans la suite on suppose que $r \geqslant 2$ et on pose $F = F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_{r-1}$.

2.2.

On suppose ici que $E \neq F$ et $E \neq F_r$, et on considère deux vecteurs $x \in E \setminus F$ et $y \in E \setminus F_r$.

2.2.1. On a $E = F \cup F_r$ et $x \notin F$ donc $x \in F_r$. Maintenant pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, puisque $y \notin F_r$ et $\lambda x \in F_r$ alors $y + \lambda x \notin F_r$. Car sinon on aurait $y = (y + \lambda x) - \lambda x \in F_r$.

2.2.2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. $E = F \cup F_r$ et $y + \lambda x \notin F_r$ donc $y + \lambda x \in F$. Comme $F = \cup_{k=1}^{r-1} F_k$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, il existe $k \in [\![1, r-1]\!]$ tel que $y + \lambda x \in F_k$. Puisque $\mathbb{K}$ est infini il existe forcément $k \in [\![1, r-1]\!]$ et deux éléments distincts α et β de $\mathbb{K}$ tels que $y + \alpha x \in F_k$ et $y + \beta x \in F_k$.

2.2.3. Avec les notations de la question précédente, on peut écrire

$$(\alpha-\beta)x=(y+\alpha x)-(y+\beta x)$$

et comme $y+\alpha x\in F_k$ et $y+\beta x\in F_k$ alors $(\alpha-\beta)x\in F_k$. Mais $\alpha-\beta\neq 0$, donc $x\in F_k$. Ce qui induit que $x\in F$. Ceci contredit le choix de x comme vecteur de $E\setminus F$.

On en déduit que, soit $E=F_r$, soit $E=F$.

2.3. Un raisonnement par récurrence sur la base de la question 2.2 permet de démontrer que lorsque $E=F_1\cup F_2\cup\cdots\cup F_r$ où $F_1,F_2,\ldots,F_r$ sont des sous-espaces vectoriels de E alors il existe $k\in[\![1,r]\!]$ tel que $F_k=E$.

En effet ; pour $r=2$, c'est ce qui a été démontré dans la question 2.1. Soit alors $r\geqslant 2$ et supposons que pour toute famille de $r-1$ sous-espaces $(F_1,F_2,\ldots,F_{r-1})$ telle que $E=F_1\cup F_2\cup\cdots\cup F_{r-1}$, il existe $k\in[\![1,r-1]\!]$ tel que $E=F_k$. Soit ensuite une famille de r sous-espaces $(F_1,F_2,\ldots,F_r)$ telle que $E=F_1\cup F_2\cup\cdots\cup F_r$. D'après la question précédente, soit on a $F=F_r$ et c'est fini, soit $E=F_1\cup F_2\cup\cdots\cup F_{r-1}$ et dans ce cas par hypothèse de récurrence il existe $k\in[\![1,r-1]\!]$ tel que $E=F_k$. Ce qui achève la démonstration.

Précision

Ce qui signifie qu'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $\geqslant 2$ ne peut être la réunion d'une famille finie d'au moins deux sous-espaces vectoriels stricts de E.

Pour toute famille de sous-espaces vectoriels $(F_1,F_2,\ldots,F_r)$ de E,

$$E=\bigcup_{k=1}^{r}F_k\Longrightarrow\exists k\in[\![1,r]\!]\ ;\ E=F_k$$

Remarques

- Le fait qu'ici $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ou plus généralement un corps infini, est indispensable. On le perçoit dans un passage de la démonstration de la question 2.2.2. Pour le confirmer, si $\mathbb{K}$ était un corps fini alors tout-espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ de dimension finie $n\geqslant 2$ serait lui même un ensemble fini (car il est isomorphe à $\mathbb{K}^n$) et on peut écrire
$$E=\bigcup_{x\in E}(\mathbb{K}\cdot x)$$
ce qui signifie que E est la réunion de toute ses droites vectorielles (qui sont toutes des sous-espaces vectoriels stricts de E et qui sont bien sûr en nombre fini).
- Remarquez que la question 2.3 démontre, que lorsque $\mathbb{K}$ est infini, une réunion finie d'au moins 2 sous-espaces vectoriels de E, n'est pas un sous-espace vectoriel de E ; à moins que l'un de ces sous-espaces contienne tous les autres.

Il suffit en effet de considérer, si on suppose que $F_1 \cup F_2 \cup \cdots, \cup F_p$ est un *sev* de E, $F = F_1 \cup F_2 \cup \cdots, \cup F_p$ et d'appliquer le résultat de la question 2.3 à F.

- **Une autre démonstration du résultat de la question 2.3 (sans utiliser 2.2) :** Il s'agit de montrer que lorsqu'il est de dimension $n \geqslant 2$, E ne peut pas être la réunion d'une famille finie $(F_1, F_2, \dots, F_r)$ de sous-espace-vectoriels stricts de E (avec $r \geqslant 2$). Sachant que tout sous-espace vectoriel strict de E peut être mis dans un hyperplan de E, il suffit de montrer le résultat dans le cas où $F_1, F_2, \dots, F_r$ sont des hyperplans de E. Soient donc $F_1, F_2, \dots, F_r$ des hyperplans de E et soient $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r$ des formes linéaires de E telles que pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, $F_k = \operatorname{Ker} \varphi_k$. Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base quelconque de E et posons pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_k\left(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n\right)$$

Aucune des expressions polynomiales (de plusieurs indéterminées), $\varphi_k\left(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n\right)$ n'est identiquement nul sur $\mathbb{K}^n$ (car sinon on aurait $E = \operatorname{Ker} \varphi_k = F_k$) et **comme** $\mathbb{K}$ **est infini** alors P n'est pas identiquement nul sur $\mathbb{K}^n$. Il existe donc $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $P(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq 0$. Si on pose $v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$ alors $\varphi_k(v) \neq 0$ pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, donc x n'est pas dans la réunion des sous-espaces $F_1, F_2, \dots, F_r$. Ainsi

$$\bigcup_{k=1}^{r} F_k \subsetneq E$$

À savoir

L'anneau $\mathbb{K}[X_1, X_2, \dots, X_r]$ est intègre (grâce, comme pour $\mathbb{K}[X]$, à la notion de degré d'un polynôme).

- **Autre Justification du même résultat :** cette fois par récurrence sur $\dim E$ mais toujours en faisant abstraction de 2.2.

Supposons que la propriété à démontrer est vraie dans tout espace vectoriel de dimension n, et soient E un espace vectoriel de dimension $n+1$ et des sous-espaces vectoriels stricts $F_1, F_2, \dots, F_p$ de E, qu'on suppose vérifiant l'égalité $E = F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_p$. Soit H un hyperplan de E. On peut écrire

$$H = H \cap E = (H \cap F_1) \cup (H \cap F_2) \cup \cdots \cup (H \cap F_p)$$

donc par H.R, il existe $k \in [\![1, p]\!]$ tel que $H = H \cap F_r$, ce qui revient à $H \subset F_k$. F_k étant supposé un sous-espace vectoriel strict de E, ceci implique qu'en fait $H = F_k$. Comme conséquence, on voit que E admet au plus un nombre fini d'hyperplans, ce qui est bien sûr faux.

III. À propos du polynôme minimal d'une matrice

3.1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. D'après le théorème de CAYLEY-HAMILTON, χ_A est un polynôme annulateur de A et donc π_A divise χ_A. Comme χ_A est de degré n alors $\deg \pi_A \leqslant n$.

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \deg \pi_A \leqslant n$$

3.2. Supposons que $\deg \pi_A = n$ et soient $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ des scalaires tels que

$$a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_{n-1} A^{n-1} = 0$$

En posant $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1}$ on a donc $P(A) = 0$ et donc π_A divise P. Mais comme $\deg P < \deg \pi_A$ alors forcément $P = 0$, c'est-à-dire $a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$. Ainsi la famille $(I_n, A, \cdots, A^{n-1})$ est libre.

Réciproquement si la famille $(I_n, A, \ldots, A^{n-1})$ est une famille libre alors il ne peut exister aucun polynôme annulateur non nul de A qui soit de degré inférieur strictement à $n-1$. En particulier $\deg \pi_A \geqslant n$; et vu le résultat de la question précédente, on a en fait $\deg \pi_A = n$.

$$\deg \pi_A = n \Longleftrightarrow \text{la famille } (I_n, A, \ldots, A^{n-1}) \text{ est libre.}$$

Résultat du cours

Si $r = \deg \pi_A$ alors la famille $(I_n, A, \ldots, A^{r-1})$ est libre. C'est en fait une base de la sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ engendrée par A, à savoir

$$\mathbb{K}[A] = \{P(A) \mathbin{/} P \in \mathbb{K}[X]\}$$

En particulier pour tout $k \geqslant r$, A^k est une combinaison linéaire de $I_n, A, \ldots, A^{r-1}$.

3.3.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *Pour tout* $v \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, *on pose*

$$I_{A,v} = \{P \in \mathbb{K}[X] \mathbin{/} P(A)v = 0\}$$

3.3.1. Soit $v \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

- $I_{A,v}$ contient le polynôme nul ;
- pour tout $(P, Q) \in (I_{A,v})^2$, $(P - Q)(A)v = 0$ et donc $P - Q \in I_{A,v}$;
- pour tous $P \in I_{A,v}$ et $R \in \mathbb{K}[X]$, $(RP)(A)v = R(A)P(A)v = 0$ et donc $RP \in I_{A,v}$.

alors $I_{A,v}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$. Maintenant un résultat de cours affirme que $I_{A,v}$ est de la forme $I_{A,v} = \pi_{A,v}\mathbb{K}[X]$ où $\pi_{A,v}$ est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. De plus, sachant que $I_{A,v}$ contient au moins un polynôme non nul (χ_A par exemple), $\pi_{A,v}$ est unique si on exige qu'il soit unitaire.

Pour tout $v \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $I_{A,v}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ et il existe un unique polynôme unitaire qu'on va noter $\pi_{A,v}$ tel que

$$I_{A,v} = \pi_{A,v}\mathbb{K}[X]$$

3.3.2. Soit $v \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. $\pi_A(A) = 0$ donc $\pi_A(A)v = 0$ et par suite $\pi_A \in I_{A,v}$. Et comme $I_{A,v} = \pi_{A,v}\mathbb{K}[X]$, alors $\pi_{A,v}$ divise π_A.

$$\forall v \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ \pi_{A,v} \text{ divise } \pi_A$$

Ensuite, les diviseurs *unitaires* de π_A étant en nombre fini dans $\mathbb{K}[X]$, on en déduit que

L'ensemble $\{\pi_{A,w} \,/\, w \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\}$ est fini

On considère dans la suite des vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_r$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tels que

$$\{\pi_{A,w} \,/\, w \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\} = \{\pi_{A,v_1}, \pi_{A,v_2}, \ldots, \pi_{A,v_r}\} \tag{3}$$

et on pose pour chaque $k \in [\![1, r]\!]$,

$$F_k = \left\{v \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \,/\, \pi_{A,v_k}(A)v = 0\right\} = \operatorname{Ker} \pi_{A,v_k}(A)$$

3.3.3. Les ensembles F_k sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (comme signalé ci-dessus $F_k = \operatorname{Ker} \pi_{A,v_k}(A)$). Soit maintenant $v \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Il existe, d'après (3), $k \in [\![1, r]\!]$ tel que $\pi_{A,v} = \pi_{A,v_k}$, ce qui induit que $v \in F_k$. On a ainsi montré que

$$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \bigcup_{k=1}^{r} F_k$$

D'après la question 2.3, il existe donc $k \in [\![1, r]\!]$ tel que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = F_k$ soit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \operatorname{Ker} \pi_{A,v_k}(A)$ ou encore $\pi_{A,v_k}(A) = 0$. Alors π_A divise π_{A,v_k}. Mais comme on a déjà vu que π_{A,v_k} divise π_A alors π_A et π_{A,v_k} sont associés. Ils sont tous les deux unitaires donc ils sont égaux. En posant $w = v_k$ on peut donc affirmer que

Ouverture

De la même façon qu'il y'a un lien entre l'idéal annulateur d'une matrice A et de de la sous-algèbre $\mathbb{K}[A]$ engendrée par A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il y'a un lien, quand $v \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, entre l'idéal $I_{A,v}$ et le sous-espace vectoriel

$$E_v = \{P(A)v \,/\, P \in \mathbb{K}[X]\}$$

de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. La dimension de E_v est égale au degré du polynôme $\pi_{A,v}$ et plus exactement, si r est ce degré, alors $(v, Av, \ldots, A^{r-1}v)$ est une base de E_v.

N.B: E_v est le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ contenant v et stable par l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ canoniquement associé à A. Les sous-espaces E_v peuvent servir de base à une démonstration du théorème de CAYLEY-HAMILTON, rien de moins.

Rappel

Deux polynômes non nuls P et Q de $\mathbb{K}[X]$ sont dit associés si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $Q = \lambda P$; λ étant alors forcément le quotient du coefficient dominant de Q par celui de P. On démontre ensuite que les assertions suivantes sont équivalentes:

(i) P et Q sont associés ; (ii) $P|Q$ et $Q|P$; (iii) $P|Q$ et $\deg P = \deg Q$; (iv) $P\mathbb{K}[X] = Q\mathbb{K}[X]$.

$$\exists w \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\ ;\ \pi_{A,w} = \pi_A$$

3.4. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Si on note e_1, e_2, e_3 les vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$, on voit immédiatement que $Ae_1 = e_2$ et $A^2 e_1 = Ae_2 = e_3$. La famille $(e_1, Ae_1, A^2 e_1)$ est donc libre. Tous polynôme non nul $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(A)e_1 = 0$ devrait être donc de degré au moins 3 ; c'est vrai en particulier pour π_{A,e_1}. Mais comme π_{A,e_1} divise π_A et que $\deg \pi_A \leqslant 3$ alors $\pi_{A,e_1} = \pi_A$.

Généralisation

On démontre en général que pour toutes les matrices dites compagnes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & & & a_1 \\ & \ddots & & 0 & \vdots \\ 0 & & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\pi_{A,e_1} = \pi_A = (-1)^n \chi_A = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$$

où e_1 est le premier vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On peut même démontrer qu'une matrice carré d'ordre n dont le polynôme minimal est de degré n (et donc forcément associé à son polynôme caractéristique) est semblable à une matrice compagne.

3.5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

On considère les assertion suivantes

(i) $\deg \pi_A = n$;

(ii) *il existe* $v \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *tel que pour tout* $x \in \mathbb{K}^n$, *il existe* $u \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *vérifiant*
$x = ({}^t uv, {}^t uAv, \dots, {}^t uA^{n-1}v)$;

(iii) *pour tout* $x \in \mathbb{K}^n$, *il existe* $(u, v) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})^2$ *tel que* $x = ({}^t uv, {}^t uAv, \dots, {}^t uA^{n-1}v)$.

3.5.1. Montrons l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii). Pour cela supposons que $\deg \pi_A = n$. D'après la question 3.3, il existe un vecteur $v \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $\pi_{A,v} = \pi_A$. Soit alors comme indiqué dans l'énoncé la matrice $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les vecteurs colonnes sont $v, Av, \dots A^{n-1}v$.

$\deg \pi_{A,v} = n$ donc la famille $(v, Av, \dots, A^{n-1}v)$ est forcément libre (sinon on arriverait à constituer un polynôme non nul P de degré $< n$ tel que $P(A)v = 0$). La matrice V est donc inversible. Soit alors un vecteur $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. La matrice ${}^tV$ est inversible donc il existe un vecteur (unique) $u \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que

$$^{t}\mathrm{V}u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ou encore ${}^{t}u\mathrm{V} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$. Ce qui signifie que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, ${}^{t}u\mathrm{A}^{k}v = x_k$.

CQFD.

Ce qui démontre ainsi que

$$\boxed{\text{(i)} \Longrightarrow \text{(ii)}}$$

Autre justification: v étant choisi comme auparavant, les vecteurs $v, \mathrm{A}v, \ldots, \mathrm{A}^{n-1}v$ constituent une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Considérons alors l'application *linéaire*

$$f: \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ u & \longmapsto & ({}^{t}uv, {}^{t}u\mathrm{A}v, \ldots, {}^{t}u\mathrm{A}^{n-1}v) \end{array}$$

Soit $u \in \mathrm{Ker} f$. Alors pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, ${}^{t}u\mathrm{A}^{k}v = 0$, et comme $(v, \mathrm{A}v, \ldots, \mathrm{A}^{n-1}v)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ alors pour tout $w \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ on a ${}^{t}uw = 0$. Ce qui implique que u est le vecteur nul. (selon que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, en prenant $w = u$ ou $w = \overline{u}$ on aura ${}^{t}uw = \sum_{k=1}^{n} |u_k|^2 = 0$ et donc $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0$).

Ainsi f est injective et comme $\dim \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = \dim \mathbb{K}^n = n$ alors elle est bijective.Tout élément $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{K}^n$ admet donc un antécédent unique $u \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ par f ; de telle sorte que $x = ({}^{t}uv, {}^{t}u\mathrm{A}v, \ldots, {}^{t}u\mathrm{A}^{n-1}v)$.

CQFD.

3.5.2. Montrons maintenant l'implication (iii)$\Longrightarrow$(i). Supposons donc que pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, il existe $(u, v) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})^2$ tel que $x = ({}^{t}uv, {}^{t}u\mathrm{A}v, \ldots, {}^{t}u\mathrm{A}^{n-1}v)$. Soit alors des scalaires $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ tels que $a_0\mathrm{I}_n + a_1\mathrm{A} + \ldots + a_{n-1}\mathrm{A}^{n-1} = 0$.

Soit un vecteur quelconque $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et soient $u, v \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

tels que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $x_k = {}^t u A^{k-1} v$. On a alors

$$a_0 x_1 + a_1 x_2 + \cdots + a_{n-1} x_n = {}^t u (a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_{n-1} A^{n-1}) v = 0$$

et ceci pour tout $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. En appliquant ceci aux vecteurs $\varepsilon_k = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ on voit que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $a_k = 0$.

Ainsi la famille $(I_n, A, \ldots, A^{n-1})$ est libre et par suite, selon la question 3.2, $\deg \pi_A = n$.

Ce qui achève la démonstration de l'implication

$$\boxed{\text{(iii)} \Longrightarrow \text{(i)}}$$

IV. Démonstration du résultat proposé

On considère un entier $n \geqslant 2$, un polynôme unitaire de degré n, $P \in \mathbb{K}[X]$ et une matrice $B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ telle que $\deg \pi_B = n-1$. On pose

$$P = X^n + \sum_{k=1}^{n} c_k X^{n-k}$$

On cherche une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\chi_A = (-1)^n P$ et dont B est une sous-matrice, sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} B & v \\ {}^t u & b \end{pmatrix}$$

où $b \in \mathbb{K}$ et $u, v \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})$

4.1. Supposons que A répond à la question, et donc que $(-1)^n \chi_A = P$. En identifiant les coefficients des termes en X^{n-1} dans cette écriture, on obtient: $-\mathrm{Tr}(A) = c_1$, soit $-b - \mathrm{Tr}(B) = c_1$. Alors

$$\boxed{b = -\mathrm{Tr}(B) - c_1}$$

Dans la suite on écrit

$$\chi_B = (-1)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^{n-1-k}$$

avec $\alpha_0 = 1$ et puisque $\mathrm{Tr}(B) = -\alpha_1$, $b = \alpha_1 - c_1$.

4.2. Une famille de polynômes

On pose pour tout $p \in [\![0, n-2]\!]$,

$$\mathrm{U}_p = \sum_{k=0}^{n-2-p} \alpha_k \mathrm{X}^{n-2-k-p}$$

4.2.1. Pour tout $p \in [\![0, n-2]\!]$, $\deg \mathrm{U}_p = n-2-p$. $(\mathrm{U}_0, \mathrm{U}_1, \dots, \mathrm{U}_{n-2})$ est donc une famille échelonnée de polynômes de $\mathbb{K}_{n-2}[\mathrm{X}]$, elle est donc libre. Puisque elle comporte $n-1$ vecteurs et que $\dim \mathbb{K}_{n-2}[\mathrm{X}] = n-1$ alors c'est une base de $\mathbb{K}_{n-2}[\mathrm{X}]$.

$(\mathrm{U}_0, \mathrm{U}_1, \dots, \mathrm{U}_{n-2})$ est une base de $\mathbb{K}_{n-2}[\mathrm{X}]$.

4.2.2. Soit un polynôme $\mathrm{Q} \in \mathbb{K}_{n-2}[\mathrm{X}]$. Puisque $(\mathrm{U}_0, \mathrm{U}_1, \dots, \mathrm{U}_{n-2})$ est une base de $\mathbb{K}_{n-2}[\mathrm{X}]$ alors on peut écrire $\mathrm{Q} = a_0\mathrm{U}_0 + a_1\mathrm{U}_1 + \cdots + a_{n-2}\mathrm{U}_{n-2}$ où $(a_0, a_1, \dots, a_{n-2}) \in \mathbb{K}^{n-1}$. Maintenant, puisque $\deg \pi_\mathrm{B} = n-1$, alors d'après la question (3.5), il existe deux vecteurs $y, z \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})$ tels que $a_k = {}^t y \mathrm{B}^k z$ pour tout $k \in [\![0, n-2]\!]$. On a alors

$$\forall \mathrm{Q} \in \mathbb{K}_{n-2}[\mathrm{X}],\ \exists (y, z) \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})^2\ ;\ \mathrm{Q} = \sum_{k=0}^{n-2} \left({}^t y \mathrm{B}^k z\right) \mathrm{U}_k$$

4.3. Expression d'une comatrice

4.3.1. Soit $(x, \lambda) \in \mathbb{K}^2$.

$$\begin{aligned}
\chi_\mathrm{B}(x) - \chi_\mathrm{B}(\lambda) &= (-1)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \left(x^{n-1-k} - \lambda^{n-1-k}\right) \\
&= (-1)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{n-k-1} (x^k - \lambda^k) && \text{(on remplace } k \text{ par } n-k-1) \\
&= (-1)^{n-1} (x-\lambda) \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{n-k-1} \left(\sum_{p=0}^{k-1} x^{k-1-p} \lambda^p \right) \\
&= (-1)^{n-1} (x-\lambda) \sum_{p=0}^{n-2} \left(\sum_{k=p+1}^{n-1} \alpha_{n-k-1} x^{k-p-1} \right) \lambda^p && \text{(permutation des 2 sommes)} \\
&= (-1)^{n-1} (x-\lambda) \sum_{p=0}^{n-2} \left(\sum_{h=0}^{n-p-2} \alpha_h x^{n-h-p-2} \right) \lambda^p && \text{(on pose } h = n-k-1)
\end{aligned}$$

$$= (-1)^{n-1}(x-\lambda)\sum_{p=0}^{n-2} \mathrm{U}_p(x)\lambda^p$$

Ouverture

Quand le corps $\mathbb{K}$ est infini alors l'application qui à un polynôme associe sa fonction polynomiale est injective. Ce n'est pas le cas si le corps $\mathbb{K}$ est fini. Pour s'en convaincre considérer le corps $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ où p est un nombre premier et le polynôme $\mathrm{P} = \mathrm{X}^p - \mathrm{X}$; qui grâce au théorème de Fermat s'annule en tout élément de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sans être lui même le polynôme nul.

Ainsi

$$\boxed{\forall (x,\lambda) \in \mathbb{K}^2,\ \chi_{\mathrm{B}}(x) - \chi_{\mathrm{B}}(\lambda) = (-1)^{n-1}(x-\lambda)\sum_{p=0}^{n-2} \mathrm{U}_p(x)\lambda^p \qquad (4)}$$

4.3.2. Fixons $x \in \mathbb{K}$. On peut alors voir les deux membres de l'égalité (4) comme des fonctions polynomiales de la variable λ. Les polynômes associés sont donc égaux (grâce au fait que $\mathbb{K}$ est infini). Alors

$$\chi_{\mathrm{B}}(x) - \chi_{\mathrm{B}}(\mathrm{X}) = (-1)^{n}(\mathrm{X}-x)\sum_{p=0}^{n-2} \mathrm{U}_p(x)\mathrm{X}^p$$

en appliquant maintenant à la matrice B et sachant selon le théorème de Cayley-Hamilton que $\chi_{\mathrm{B}}(\mathrm{B}) = 0$, on obtient

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{K},\ \chi_{\mathrm{B}}(x)\mathrm{I}_n = (-1)^{n}(\mathrm{B}-x\mathrm{I}_n)\sum_{p=0}^{n-2} \mathrm{U}_p(x)\mathrm{B}^p \qquad (5)}$$

4.3.3. Soit $x \in \mathbb{K}$.

Si x n'est pas une valeur propre de B alors la matrice $\mathrm{B} - x\mathrm{I}_n$ est inversible et on a d'après la relation (5)

$$\det(\mathrm{B}-x\mathrm{I}_n)\mathrm{I}_n = (-1)^{n}(\mathrm{B}-x\mathrm{I}_n)\sum_{p=0}^{n-2} \mathrm{U}_p(x)\mathrm{B}^p$$

Mais on a aussi $\det(\mathrm{B}-x\mathrm{I}_n)\mathrm{I}_n = (\mathrm{B}-x\mathrm{I}_n)\,{}^t\mathrm{Com}(\mathrm{B}-x\mathrm{I}_n)$. Sachant que $\mathrm{B}-x\mathrm{I}_n$ est inversible, ces deux dernières égalités donnent après multiplication à gauche par $(\mathrm{B}-x\mathrm{I}_n)^{-1}$

$${}^t\mathrm{Com}(\mathrm{B}-x\mathrm{I}_n) = (-1)^{n}\sum_{p=0}^{n-2} \mathrm{U}_p(x)\mathrm{B}^p$$

Pour l'instant, cette égalité est vérifiée par tout élément x de $\mathbb{K}$ qui n'est pas une valeur propre de B. Mais puisque les valeurs propres de B sont en nombre fini et vu la continuité de l'application $x \longmapsto {}^t\mathrm{Com}(\mathrm{B}-x\mathrm{I}_n)$ (par composition d'applications continues) et des fonctions polynomiales U_p, $p \in [\![0, n-2]\!]$, elle s'étend aussi aux valeurs propres de B, par simple passage à la limite.

Par suite

$$\forall x \in \mathbb{K},\ {}^t\mathrm{Com}(\mathrm{B} - x\mathrm{I}_n) = (-1)^n \sum_{p=0}^{n-2} \mathrm{U}_p(x)\mathrm{B}^p$$

Cas particulier

en particulier

$${}^t\mathrm{Com}(\mathrm{B}) = (-1)^n \sum_{p=0} \mathrm{U}_p(0)\mathrm{B}^p$$

ce qui démontre que la transposé de la comatrice de la matrice B est un polynôme en B. Noter que durant toute la question 4.3 on n'a pas utilisé l'hypothèse $\deg \pi_{\mathrm{B}} = n-1$; le constat précédent est donc général.

4.4. Résolution du problème

A *désigne toujours la matrice ci-dessus avec* $b = \alpha_1 - c_1$.

4.4.1. Soit $x \in \mathbb{K}$. On a

$$\chi_{\mathrm{A}}(x) = \mathrm{A} - x\mathrm{I}_n = \begin{vmatrix} \mathrm{B} - x\mathrm{I}_{n-1} & v \\ {}^t u & b - x \end{vmatrix}$$

et donc d'après la question 1.1

$$\chi_{\mathrm{A}}(x) = (b-x)|\mathrm{B} - x\mathrm{I}_{n-1}| - {}^t u\, {}^t\mathrm{Com}(\mathrm{B} - x\mathrm{I}_{n-1})\, v$$

mais d'après la question précédente

$${}^t u\, {}^t\mathrm{Com}(\mathrm{B} - x\mathrm{I}_{n-1})\, v = (-1)^n \sum_{p=0}^{n-2} \mathrm{U}_p(x)\, {}^t u \mathrm{B}^p v$$

donc

$$\chi_{\mathrm{A}}(x) = (b-x)\chi_{\mathrm{B}}(x) - (-1)^n \sum_{p=0}^{n-2} \mathrm{U}_p(x)\, {}^t u \mathrm{B}^p v$$

Maintenant, comme le polynôme $\sum_{p=0}^{n-2} \mathrm{U}_p(x)\, {}^t u \mathrm{B}^p v$ est de degré $\leqslant n-2$ alors $\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X})$ et $(b-\mathrm{X})\chi_{\mathrm{B}}(\mathrm{X})$ ont les mêmes termes en X^n et en X^{n-1} ; termes qui sont respectivement $(-1)^n\mathrm{X}^n$ et $(-1)^{n-1}\operatorname{Tr}(\mathrm{A})\mathrm{X}^{n-1} = (-1)^n(\alpha_1 - b)\mathrm{X}^{n-1}$ alors on peut écrire

$$(-1)^n(b-\mathrm{X})\chi_{\mathrm{B}}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^n + (\alpha_1 - b)\mathrm{X}^{n-1} + \mathrm{H}(\mathrm{X})$$

où H est un polynôme de degré $\leqslant n-2$ et ses coefficients ne dépendent que de b et de ceux de χ_{B}. On a en outre

$$\forall x \in \mathbb{K},\ \chi_B(x) = (-1)^n\big(x^n + (\alpha_1 - b)x^{n-1} + H(x)\big) - (-1)^n \sum_{p=0}^{n-2} U_p(x)\,{}^t u B^p v$$

4.4.2. On a posé d'un côté, avec $c_1 = \alpha_1 - b$

$$P(X) = X^n + \sum_{k=1}^{n} c_k X^{n-k}$$

de l'autre, d'après la question précédente, on à l'écriture

$$(-1)^n \chi_B(x) = x^n + (\alpha_1 - b)x^{n-1} + H(x) - \sum_{p=0}^{n-2} U_p(x)\,{}^t u B^p v$$

d'où l'équivalence

$$\chi_A = (-1)^n P \Longleftrightarrow H(X) - \sum_{k=2}^{n} c_k X^{n-k} = \sum_{p=0}^{n-2} ({}^t u B^p v) U_p(X)$$

4.4.3. La matrice $B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ et le polynôme P étant maintenant donnés, les polynômes H et $\sum_{k=2}^{n} c_k X^{n-k}$ sont de degré $\leqslant n-2$ et leurs construction ne dépend que des coefficients de P et de χ_B. Si on pose $Q = H - \sum_{k=2}^{n} c_k X^{n-k}$, Q est de degré $\leqslant n-2$; donc d'après la question 4.2.2, il existe des vecteurs (uniques) $u, v \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ tels que

$$Q = \sum_{p=0}^{n-2} ({}^t u B^p v) U_p(X)$$

Il suffit maintenant de considérer la matrice

$$A = \begin{pmatrix} B & v \\ {}^t u & b \end{pmatrix}$$

où $b = \alpha_1 - c_1$, on a alors d'après la question précédente $\chi_A = (-1)^n P$.

Résumons

B étant une matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ telle que $\deg \pi_B = n-1$ et P un polynôme unitaire de degré n de $\mathbb{K}[X]$, il existe des vecteurs $u, v \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})$ et un scalaire $b \in \mathbb{K}$ tels que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} B & v \\ {}^t u & b \end{pmatrix}$$

vérifie

$$\chi_A = (-1)^n P$$