CORRIGÉ : MATH 2 ; MP ; CNM_2010

1ère partie : Un peu de géométrie

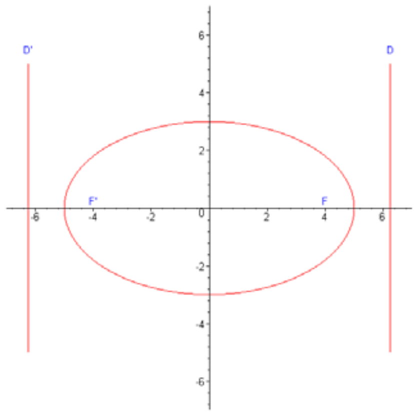
1.1) Pour toute ellipse $(\mathfrak{E})$ qui n'est pas un cercle dans le plan euclidien orienté, il existe des réels $a > b > 0$ et un repère orthonormal direct $\mathfrak{R} = (\mathfrak{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et dans le quel l'éllipse $(\mathfrak{E})$ admet une équation de la forme : $(\mathfrak{E}) \quad : \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

On pose : $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, alors :

(i) L'excentricité de $(\mathfrak{E})$ est $e = \frac{c}{a}$.

(ii) Les foyers de $(\mathfrak{E})$ sont : $F(c, 0)$ et $F'(-c, 0)$.

(iii)Les directrices de $(\mathfrak{E})$ sont les droites (D) d'équation $x = \frac{a^2}{c}$ et D' d'équation $x = -\frac{a^2}{c}$.



1.2) Soient b, c deux nombres complexes tels que $|b| \neq |c|$; on pose : $\lambda = |b|$ et $\mu = |c|$.

1.2.1) La partie du plan donnée par : $E_{\lambda,\mu} = \{\lambda e^{i\theta} + \mu e^{-i\theta} \; ; 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ est paramétrée par :

$$\begin{cases} x = (\lambda + \mu)\cos(\theta) \\ y = (\lambda - \mu)\sin(\theta) \end{cases} \; ; \theta \in [0, 2\pi].$$

$E_{\lambda,\mu}$ est donc l'éllipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a = (\lambda + \mu)$ et $b = |\lambda - \mu|$.

1.2.2) Soient w un point de $\mathbb{R}^2$, $\varphi \in \mathbb{R}$ et l'application $r_{w,\varphi} \; : z \longmapsto z' = w + e^{i\varphi}(z - w)$.
Cette application est définie par : $z' - w = e^{i\varphi}(z - w)$.
On déduit alors que $r_{w,\varphi}$ est la rotation de centre w et d'angle φ.

1.2.3) On pose : $b = \lambda e^{i\varepsilon}$ et $c = \mu e^{i\tau}$. $E_{b,c} = \{\lambda e^{i(\theta+\varepsilon)} + \mu e^{-i(\theta-\tau)} \; ; 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$.
$E_{b,c} = \{e^{i\frac{\varepsilon+\tau}{2}}\left(\lambda e^{i(\theta+\frac{\varepsilon-\tau}{2})} + \mu e^{-i(\theta+\frac{\varepsilon-\tau}{2})}\right) \; ; 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$
$E_{b,c} = \{e^{i\frac{\varepsilon+\tau}{2}}\left(\lambda e^{i\theta'} + \mu e^{-i\theta'}\right) \; ; \frac{\varepsilon-\tau}{2} \leq \theta' \leq 2\pi + \frac{\varepsilon-\tau}{2}\}$
et par 2π-périodicité de l'application : $[t \longmapsto e^{it}]$ on a :
$E_{b,c} = \{e^{i\frac{\varepsilon+\tau}{2}}(\lambda e^{i\theta} + \mu e^{-i\theta}) \; ; 0 \leq \theta \leq 2\pi\} = r_{0,\varphi}(E_{\lambda,\mu})$ avec $\varphi = \frac{\varepsilon+\tau}{2}$.

1.3) Soient b et c deux nombres complexes, et l'application $f : z \longmapsto bz + c\bar{z}$ définie de $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

1.3.1) Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ et $v \in \mathbb{R}$. $f(vz + z') = b(vz + z') + c\overline{(vz + z')} = v(bz + c\bar{z}) + (bz' + c\overline{z'})$.
$f(vz + z') = vf(z) + f(z')$. alors f est $\mathbb{R}$-linéaire.
(i) Si $|b| \neq |c|$ et $z \in \ker(f)$ alors $bz = -c\bar{z}$ et $|z|(|b| - |c|) = 0$, donc $|z| = 0 = z$.

(ii) Si $|b| = |c|$; $b = \lambda e^{i\varepsilon}$ et $c = \lambda e^{i\tau}$, soit $z = e^{i(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon-\tau}{2})}$, $z \neq 0$ et $f(z) = 0$ et $\ker(f) \neq \{0\}$.
f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0\}$ si et seulement si $|b| \neq |c|$.

1.3.2) Découle immédiatement de 1.2.3.

1.3.3) On suppose que f n'est pas injective. Posons alors $|b| = |c| = \lambda$ et $b = \lambda e^{i\varepsilon}$ et $c = \lambda e^{i\tau}$.
L'image par f du cercle unité est : $S_{b,c} = \{\lambda(e^{i(\varepsilon+\theta)} + e^{-i(\theta-\tau)})\ ;\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$.
$S_{b,c} = \{\lambda e^{i\frac{\varepsilon+\tau}{2}}(e^{i(\theta+\frac{\varepsilon-\tau}{2})} + e^{-i(\theta+\frac{\varepsilon-\tau}{2})})\ ;\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$
$S_{b,c} = \{\lambda e^{i\frac{\varepsilon+\tau}{2}}(e^{i\theta'} + e^{-i\theta'})\ ;\ \frac{\varepsilon-\tau}{2} \leq \theta' \leq \frac{\varepsilon-\tau}{2} + 2\pi\}$.
Encore par 2π-périodicité de l'application : $[t \mapsto e^{it}]$ on a :
$S_{b,c} = \{\lambda e^{i\frac{\varepsilon+\tau}{2}}(e^{i\theta'} + e^{-i\theta'})\ ;\ 0 \leq \theta' \leq \pi\} = \{2\lambda\cos(\theta)e^{i\frac{\varepsilon+\tau}{2}}\ ;\ 0 \leq \theta \leq \pi\}$.
Alors l'image par f du cercle unité est le segment d'extrimités $2\lambda e^{i\frac{\varepsilon+\tau}{2}}$ et $-2\lambda e^{i\frac{\varepsilon+\tau}{2}}$.
(c'est bien un segment centré en O).

1.3.4) Soit a un nombre complexe non nul.
(i) Si f n'est pas injective alors d'aprés 1.3.3) il existe un nombre complexe z_0 de module 1 tel que : $f(z_0) = 0$. (Le segment est centré en O , en particulier passe par O).
En particulier $\frac{bz_0+c\overline{z_0}}{a} = 0$ est un réel.
(ii) Si f est injective alors $|b| \neq |c|$ et en posant : $b' = \frac{b}{a}$ et $c' = \frac{c}{a}$ on a aussi : $|b'| \neq |c'|$.
Donc $E_{b',c'}$ est une ellipse centré en O, en particulier traverse l'axe réel.
D'où l'existence d'un nombre complexe z_0 de module 1 tel que $\frac{bz_0+c\overline{z_0}}{a} = b'z_0 + c'\overline{z_0} \in \mathbb{R}$.

2ème partie : **Matrice unitaires**

2.1) Un exemple simple de matrice unitaire est toute matrice diagonale de la forme :
$diag(\rho_1, \ldots, \rho_n)$ avec $\rho_1, \ldots, \rho_n$ sont tous des nombres complexes de module égal à 1.

2.2) Soit $A \in \mathbb{U}(n)$; $\det(A^*) = \det({}^t\overline{A}) = \det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$.
$1 = \det(I_n) = \det(A^*A) = |\det(A)|^2$. D'où $|\det(A)| = 1$.

2.3) Soit $A = \begin{pmatrix} u & v \\ u' & v' \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ une matrice unitaire.

$A^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{u} & \overline{u'} \\ \bar{v} & \overline{v'} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} v' & -v \\ -u' & u \end{pmatrix}$ on pose $\lambda = \det(A)$; alors :

$\begin{cases} |\lambda| = 1 \\ u' = -\lambda\bar{v} \\ v' = \lambda\bar{u} \end{cases}$ et $A = \begin{pmatrix} u & v \\ -\lambda\bar{v} & \lambda\bar{u} \end{pmatrix}$ et $[\det(A) = \lambda(|u|^2 + |v|^2) \Rightarrow |u|^2 + |v|^2 = 1]$.

Réciproquement si $A = \begin{pmatrix} u & v \\ -\lambda\bar{v} & \lambda\bar{u} \end{pmatrix}$ avec $|\lambda| = 1$ et $|u|^2 + |v|^2 = 1$ on vérifie aisément que $A^*A = I_2$ et donc A est unitaire.

2.4) $D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \Rightarrow D^* = diag(\overline{\lambda_1}, \ldots, \overline{\lambda_n}) \Rightarrow D^*D = diag(|\lambda_1|^2, \ldots, |\lambda_n|^2)$.
Alors D est unitaire si et seulement si tous les nombres complexes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont de module égal à 1.

2.5) **Cas des matrices réelles**

2.5.1) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Alors $A^* = {}^tA$.
A est unitaire si et seulement si ${}^tAA = I_n$ si et seulement si A est orthogonale.

2.5.2) Les vecteurs colonnes d'une matrice de permutation sont unitaires deux à deux orthogonaux (dans $\mathbb{R}^n$), donc toute matrice de permutation est orthogonale donc unitaire.

2.6) Soient $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $A_1, \ldots, A_n$ ses vecteurs colonnes. ${}^t\overline{A_1}, \ldots, {}^t\overline{A_n}$ sont les vecteurs lignes de A^*. Posons $A^*A = (\gamma_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$; $\forall i,j \in [[1,n]]$; $\gamma_{i,j} = < A_i, A_j >$.

A est unitaire si et seulement si $\forall i,j \in [[1,n]]$; $\gamma_{i,j} = < A_i, A_j > = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si non} \end{cases}$.

On déduit alors que A est unitaire si et seulement si les colonnes de A forment une base orthonormale de $M_{n,1}(\mathbb{C})$.

2.7) On a bien $\mathbb{U}(n) \subset GL_n(\mathbb{C})$ et $\mathbb{U}(n) \neq \varnothing$ puisque $I_n \in \mathbb{U}(n)$.
Remarquons que :
$[\forall A,B \in M_n(\mathbb{C})\ ;\ (AB)^* = B^*A^*]$ et $[\forall C \in GL_n(\mathbb{C})\ ;\ (C \in \mathbb{U}(n) \Leftrightarrow C^{-1} = C^*)]$
Soient $A,B \in \mathbb{U}(n)$, on va montrer que $AB^{-1} \in \mathbb{U}(n)$.
$(AB^{-1})^{-1} = BA^{-1} = BA^* = (AB^*)^* = (AB^{-1})^*$

2.8) **Compacité de** $\mathbb{U}(n)$
2.8.1) $M_n(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et l'application $[A \mapsto A^*]$ est $\mathbb{R}$-linéaire, alors elle est continue de $M_n(\mathbb{C})$ vers lui même.
De même l'application $[A \overset{\phi}{\mapsto} (A^*, A)]$ est $\mathbb{R}$-linéaire continue de $M_n(\mathbb{C})$ vers $M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C})$.
L'application $[(A,B) \overset{\Phi}{\mapsto} AB]$ est bilinéaire continue de $M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C})$ vers $M_n(\mathbb{C})$.
$[\Phi \circ \phi : A \mapsto A^*A]$ est donc continue de $M_n(\mathbb{C})$ vers lui même.

2.8.2) On identifie $M_n(\mathbb{C})$ à $\mathbb{C}^{n^2}$ muni de son produit scalaire complexe usuel défini par :
$\forall x,y \in \mathbb{C}^{n^2}$; $< x,y > = \sum\limits_{1\leq i\leq n^2} \overline{x_i} y_i$ ou encore $\forall A,B \in M_n(\mathbb{C})$; $< A,B > = \sum\limits_{1\leq i\leq n} \sum\limits_{1\leq j\leq n} \overline{a_{i,j}} b_{i,j}$.
La norme hermitienne associée à ce produit scalaire est définie par :
$\|A\|_2 = \left(\sum\limits_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ pour tout $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{C})$.
En particulier si $A \in \mathbb{U}(n)$ alors selon la question 2.6 toutes les colonnes de A sont de norme égale à 1, et donc $\|A\|_2 = \sqrt{n}$.

N.B : Une autre façon de définir le produit scalire ci dessus est :
$\forall A,B \in M_n(\mathbb{C})$; $< A,B > = Tr(A^*B)$.

2.8.3) L'application $[\Psi : A \in M_n(\mathbb{C}) \mapsto A^*A \in M_n(\mathbb{C})]$ est continue, $\{I_n\}$ est un fermé de $M_n(\mathbb{C})$, $\mathbb{U}(n) = \Psi^{-1}(\{I_n\})$ alors $\mathbb{U}(n)$ est un fermé de $M_n(\mathbb{C})$. de plus d'aprés 2.8.2) $\mathbb{U}(n)$ est borné dans $M_n(\mathbb{C})$ qui est de dimension finie.
D'où $\mathbb{U}(n)$ est une partie compacte de $M_n(\mathbb{C})$.

3ème partie : **Démonstration du résultat annoncé**

3.1) **Étude en dimension 2**

Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & b \\ c & a_2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ avec $a_1 \neq a_2$. On pose :

$U = \begin{pmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix}$ et $UAU^* = \begin{pmatrix} A_1 & b_1 \\ c_1 & A_2 \end{pmatrix}$ avec $u = e^{i\beta}\cos(\alpha)$; $v = e^{i\gamma}\sin(\alpha)$ et $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$.

3.1.1) A vérifie les conditions de la question 2.3 pour $\lambda = 1$.

3.1.2) Tout calcul fait on trouve :
$A_1 = |u|^2 a_1 + |v|^2 a_2 + \bar{u}vc + u\bar{v}b = \cos^2(\alpha)a_1 + \sin^2(\alpha)a_2 + \bar{u}vc + u\bar{v}b$
$A_2 = |v|^2 a_1 + |u|^2 a_2 - \bar{u}vc - u\bar{v}b = \sin^2(\alpha)a_1 + \cos^2(\alpha)a_2 - (\bar{u}vc + u\bar{v}b)$

3.1.3) On pose $t = \cos^2(\alpha) + p\cos(\alpha)\sin(\alpha)$ avec $p = \frac{be^{i(\beta-\gamma)}+ce^{-i(\beta-\gamma)}}{a_1-a_2}$.
3.1.3.1) On applique 1.3.4) pour $a = a_1 - a_2$.

3.1.3.2) On suppose que p est réel. L'application $[\alpha \overset{h}{\mapsto} \cos^2(\alpha) + p\cos(\alpha)\sin(\alpha)]$ est continue sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$ à valeurs réelles, $h(0) = 1$ et $h(\frac{\pi}{2}) = 0$, alors d'aprés le théorème des valeurs intermédiaures, il exste $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tel que :
$t = \cos^2(\alpha) + p\cos(\alpha)\sin(\alpha) = \frac{1}{2}$.

3.1.3.3) D'aprés 3.1.2) $A_1 + A_2 = a_1 + a_2$.
$A_1 = \cos^2(\alpha)a_1 + \sin^2(\alpha)a_2 + \bar{u}vc + u\bar{v}b$
$A_1 = \cos^2(\alpha)a_1 + \sin^2(\alpha)a_2 + \cos(\alpha)\sin(\alpha)(be^{i(\beta-\gamma)} + ce^{-i(\beta-\gamma)})$
$A_1 = \cos^2(\alpha)a_1 + \sin^2(\alpha)a_2 + p(a_1 - a_2)\cos(\alpha)\sin(\alpha)$
$A_1 = a_1(\cos^2(\alpha) + p\cos(\alpha)\sin(\alpha)) + a_2(1 - \cos^2(\alpha) - p\cos(\alpha)\sin(\alpha)) = \frac{a_1+a_2}{2}$.
D'où $A_1 = A_2 = \frac{a_1+a_2}{2}$.
Le résultat est alors démontré pour $n = 2$.

3.2) **Étude du cas génèral**
On munit $M_n(\mathbb{C})$ de la norme $\|.\|_\infty$ définie par : $\|M\|_\infty = \|(m_{i,j})\|_\infty = \sup\limits_{1\leq i,j\leq n} |m_{i,j}|$.

3.2.1) On pose : $f((m_{i,j})) = (m_{i,i} - m_{j,j})$, f est un endomorphisme du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $M_n(\mathbb{C})$ qui est de dimension finie, alors f est continue.

3.2.2) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et g_A l'application de $\mathbb{U}(n)$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g_A(H) = \|f(HAH^*)\|_\infty$.

3.2.2.1) On sait que toute norme est continue sur l'espace vectoriel normé qu'elle définit.
f est continue, alors pour montrer que g_A est continue sur $\mathbb{U}(n)$, il suffit de montrer que :
$G_A(H) = HAH^*$ définit une application continue sur $M_n(\mathbb{C})$.
L'application $\left[H \overset{F}{\mapsto} (H,H^*)\right]$ est $\mathbb{R}$-linéaire de $M_n(\mathbb{C})$ vers $M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C})$.
L'application $\left[(M,N) \overset{F_A}{\mapsto} MAN\right]$ est bilinéaire de $M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C})$ vers $M_n(\mathbb{C})$.
$M_n(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, alors les deux applications F et F_A sont continues, et donc $G_A = F_A \circ F$ est aussi continue.

3.2.2.2) g_A est continue sur le compact $\mathbb{U}(n)$ à valeurs réelles, alors g_A est bornée et atteint ses bornes sur $\mathbb{U}(n)$.
Dans la suite, on considère les matrices $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $H_0 \in \mathbb{U}(n)$ telles que :
$g_A(H_0) = \inf(\{g_A(H) \;;\; H \in \mathbb{U}(n)\})$.

3.2.3) On suppose ici que $g_A(H_0) > 0$, (donc $n \geq 3$ d'aprés 3.1).
On pose : $H_0AH_0^* = A' = (a'_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$.

On note : i_0, j_0 des indices tels que : $|a'_{i_0,i_0} - a'_{j_0,j_0}| = g_A(H_0) = \sup_{1\leq i,j\leq n} |a'_{i,i} - a'_{j,j}|$.

3.2.3.1) Notons que $i_0 \neq j_0$ puisque $|a'_{i_0,i_0} - a'_{j_0,j_0}| = g_A(H_0) > 0$
Soit σ la permutation de $[[1,n]]$ qui échange 1 avec i_0 et 2 avec j_0 et laisse fixe tout élèment de $[[1,n]]$ autre que 1 ; 2 ; i_0 ; j_0.
Soit $P = P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})$ la matrice de permutation correspondante à σ.
D'aprés la première partie, P est une matrice unitaire, alors $P^* = P^{-1}$ et $PH_0 \in \mathbb{U}(n)$.
$g_A(PH_0) = \|f(PH_0AH_0^*P^{-1})\|_\infty$.
La matrice $PH_0AH_0^*P^{-1}$ s'obtient en échangeant les lignes L_1 et L_{i_0} et les lignes L_2 et L_{j_0} et en suite les colonnes C_1 et C_{i_0} et les colonnes C_2 et C_{j_0} dans la matrice $A' = H_0AH_0^*$.
La matrice $PH_0AH_0^*P^{-1}$ contient a'_{i_0,i_0} à la place $(1,1)$ et a'_{j_0,j_0} à la place $(2,2)$.
$g_A(PH_0) = g_A(H_0)$ car les élèments diagonaux de $PH_0AH_0^*P^{-1}$ sont une permutation des élèments diagonaux de $H_0AH_0^*$.

3.2.3.2) On suppose alors que $i_0 = 1$ et $j_0 = 2$ et donc $|a'_{1,1} - a'_{2,2}| = g_A(H_0) > 0$
On pose $B = (a'_{i,j})_{1\leq i,j\leq 2} \in M_2(\mathbb{C})$.
D'aprés 3.1.3.3) il existe $U_0 \in \mathbb{U}(2)$ telle que les élèments diagonaux de $U_0BU_0^*$ soient égaux à $\frac{a'_{1,1}+a'_{2,2}}{2}$.

3.2.3.3) On pose $U = \begin{pmatrix} U_0 & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$.
Les colonnes de U_0 forment une base orthonormale de $M_{2,1}(\mathbb{C})$, alors Les colonnes de U forment une base orthonormale de $M_{n,1}(\mathbb{C})$, et donc U est unitaire.
On décompose en blocs $A' = \begin{pmatrix} B & D \\ E & C \end{pmatrix}$, le produit $UA'U^*$ admet pour élèments diagonaux $\frac{a'_{1,1}+a'_{2,2}}{2}$; $\frac{a'_{1,1}+a'_{2,2}}{2}$; $a'_{3,3}, \ldots, a'_{n,n}$.

3.2.3.4) $\left|\frac{a'_{1,1}+a'_{2,2}}{2} - \frac{a'_{1,1}+a'_{2,2}}{2}\right| = 0 \leq |a'_{1,1} - a'_{2,2}| = \|f(A')\|_\infty$.
$\forall j \in [[3,n]]$; $\left|\frac{a'_{1,1}+a'_{2,2}}{2} - a'_{j,j}\right| = \left|\frac{a'_{1,1}-a'_{j,j}}{2} + \frac{a'_{2,2}-a'_{j,j}}{2}\right| \leq \frac{1}{2}(|a'_{1,1} - a'_{j,j}| + |a'_{2,2} - a'_{j,j}|) \leq \|f(A')\|_\infty$. $(*)$
D'où $\|f(UA'U^*)\|_\infty \leq \|f(A')\|_\infty$.
Par l'absurde, supposons qu'il existe $j \in [[3,n]]$ tel que :
$\left|\frac{a'_{1,1}+a'_{2,2}}{2} - a'_{j,j}\right| = |a'_{1,1} - a'_{2,2}| = \|f(A')\|_\infty$.
L'inégalité de la ligne $(*)$ donne alors que : $|a'_{1,1} - a'_{j,j}| = |a'_{2,2} - a'_{j,j}| = |a'_{1,1} - a'_{2,2}|$.
Il existe deux réels φ, ψ tels que : $\begin{cases} a'_{1,1} - a'_{j,j} = e^{i\varphi}(a'_{1,1} - a'_{2,2}) \\ a'_{2,2} - a'_{j,j} = e^{i\psi}(a'_{1,1} - a'_{2,2}) \end{cases}$.
$\frac{a'_{1,1}+a'_{2,2}}{2} - a'_{j,j} = \frac{e^{i\varphi}+e^{i\psi}}{2}(a'_{1,1} - a'_{2,2})$ et $|e^{i\varphi} + e^{i\psi}| = 2$.
Le cas d'égalité dans l'inégalité de Minkowski permet alors de déduire que $e^{i\varphi} = e^{i\psi}$.
Le système ci-dessus permet alors de conclure que : $a'_{1,1} = a'_{2,2}$.
Ce qui est absurde puisque $|a'_{1,1} - a'_{2,2}| > 0$.
D'où $\forall j \in [[3,n]]$; $\left|\frac{a'_{1,1}+a'_{2,2}}{2} - a'_{j,j}\right| < |a'_{1,1} - a'_{2,2}|$.

3.2.3.5) On garde les notations de la question précèdente.
$\|f(UA'U^*)\|_\infty = g_A(UH_0) \geq g_A(H_0) = \|f(A')\|_\infty$.
car $UH_0 \in \mathbb{U}(n)$ et g_A atteint son minimum en H_0.

On déduit alors que : $\|f(UA'U^*)\|_\infty = \|f(A')\|_\infty$.
alors il existe $i_1, j_1 \in [[3,n]]$ tels que : $\|f(A')\|_\infty = \|f(UA'U^*)\|_\infty = \left|a'_{i_1 i_1} - a'_{j_1 j_1}\right|$.
On réapplique ce qu'on a fait aux questions 3.2.3.1) et 3.2.3.2) et 3.2.3.3)
Alors il existe une matrice unitaire V telle que $VUA'U^*V^*$ vérifie $\|f(A')\|_\infty = \|f(VUA'U^*V^*)\|_\infty$
et les élèments diagonaux de $VUA'U^*V^*$ à l'ordre prés sont :
$\frac{a'_{1,1}+a'_{2,2}}{2}$; $\frac{a'_{1,1}+a'_{2,2}}{2}$; $\frac{a'_{i_1,i_1}+a'_{j_1,j_1}}{2}$; $\frac{a'_{i_1,i_1}+a'_{j_1,j_1}}{2}$; $\left(a'_{j,j} \quad ; \quad j \in [[1,n]]\backslash\{1,2,i_1,j_1\}\right)$ avec :
$\forall j \in [[1,n]]\backslash\{1,2,i_1,j_1\}$, $\left|\frac{a'_{1,1}+a'_{2,2}}{2} - a'_{j,j}\right| < |a'_{1,1} - a'_{2,2}|$ et $\left|\frac{a'_{i_1,i_1}+a'_{j_1,j_1}}{2} - a'_{j,j}\right| < |a'_{1,1} - a'_{2,2}|$
et $\left|\frac{a'_{1,1}+a'_{2,2}}{2} - \frac{a'_{i_1,i_1}+a'_{j_1,j_1}}{2}\right| < |a'_{1,1} - a'_{2,2}|$.
Puisque la matrice est de taille finie, on ne peut refaire ce procédé que pour un nombre fini de fois. à la dernière étape, on aura une matrice de la forme : $HA'H^*$ avec H est produit de matrices unitaires (donc H est aussi unitaire), et les élèments diagonaux de $HA'H^*$ sont à l'ordre prés :
(i) $h_{1,1}$; $h_{1,1}$; $h_{2,2}$; $h_{2,2}$; ... ; $h_{q,q}$; $h_{q,q}$ si $n = 2q$ est pair.
(ii) $h_{1,1}$; $h_{1,1}$; $h_{2,2}$; $h_{2,2}$; ... ; $h_{q,q}$; $h_{q,q}$; $h_{q+1,q+1}$ si $n = 2q+1$ est impair.
avec $|h_{i,i} - h_{j,j}| < |a'_{1,1} - a'_{2,2}|$ chaque fois que $i \neq j$.
On déduit alors que $\|f(HA'H^*)\|_\infty < \|f(A')\|_\infty$, c'est à dire : $g_A(HH_0) < g_A(H_0)$.
Ceci est absurde car $HH_0 \in \mathbb{U}(n)$ et g_A atteint son minimum sur $\mathbb{U}(n)$ en H_0.

3.2.4) La supposition faite à la question 3.2.3) conduit à une contradiction ,alors elle est fausse , c'est à dire que $g_A(H_0) = 0 = \|f(H_0AH_0^*)\|_\infty$, alors la matrice $f(H_0AH_0^*)$ est nulle, c'est à dire que les élèments diagonaux de la matrice $H_0AH_0^*$ sont tous égaux.