Un corrigé du CNC 2010 MP Maths1

1.1) On a f est de classe C^2 donc par théorème de Schwarz $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$.

H_x est alors une matrice symétrique réelle donc elle est orthogonalement diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$.

1.2.1) $f \in C^2(U)$ donc Taylor-Young donne $f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + (\text{grad} f(a)|h) + \frac{1}{2}Q_a(h) + o(\|h\|^2)$

or f présente un maximum local en a donc $\text{grad} f(a) = 0$ d'où $f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + \frac{1}{2}Q_a(h) + o(\|h\|^2)$.

1.2.2.1) f présente un maximum local en a donc $\exists\, \varepsilon > 0,\ \forall h \in B(0,\varepsilon),\ f(a+h) - f(a) \leq 0,$ donc pour $|t| < \frac{\varepsilon}{\|u\|}$, $f(a+tu) - f(a) \leq 0$ càd d'aprés 1.2.1), $\frac{1}{2}t^2 Q_a(u) + o(t^2) \leq 0$ pour t voisin de zéro.

1.2.2.2) D'aprés 1.2.2.1) on a pour $t \in \left] -\frac{\varepsilon}{\|u\|}, \frac{\varepsilon}{\|u\|}\right[\setminus \{0\},\ \frac{1}{2}Q_a(u) + o(1) \leq 0$ et en faisant tendre t vers 0 on a $Q_a(u) \leq 0$ ceci pour tout u non nul de plus $Q_a(0) = 0$ donc Q_a est négative.

1.2.3) Soit e la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a $(H_a)_{i,i} = Q_a(e_i) \leq 0$ et $\Delta f(a) = \sum_{i=1}^{n} (H_a)_{i,i} \leq 0$.

1.3.1) On a K est fermé borné en dimension finie donc compact et comme $f \in C(K)$ alors f est bornée sur K et atteint ses bornes.

1.3.2) Si f atteint son maximum sur K en un point $a \in \overset{\circ}{K} = U$ alors f présente un maximum local en a donc d'aprés 1.2.3), $\Delta f(a) \leq 0$ ce qui contredit $\Delta f > 0$ sur U d'où $\sup\limits_{\|x\|\leq 1} f(x) = \sup\limits_{\|y\|=1} f(y)$.

1.3.3.1) Les applications $e_i^* : x \to x_i$ ont des dérivées partielles secondes nulles donc continues, donc les e_i^* sont dans $C^2(\mathbb{R}^n)$ qui est une algèbre donc l'application $q : x \to \|x\|^2$ est dans $C^2(\mathbb{R}^n)$ en particulier elle est C^2 sur U et continue sur K par suite $f_\varepsilon = f + \varepsilon q \in C^2(U) \cap C(K)$.

On a $\Delta f_\varepsilon = \Delta f + 2n\varepsilon = 2n\varepsilon$.

1.3.3.2) On a $\Delta f_\varepsilon = 2n\varepsilon > 0$ donc d'aprés 1.3.2) on a $\forall x \in K,\ f(x) + \varepsilon\|x\|^2 \leq \sup\limits_{\|y\|=1} f_\varepsilon(y)$ par suite

$\forall x \in K,\ f(x) \leq \sup\limits_{\|y\|=1} f(y) + \varepsilon$ et en faisant tendre ε vers 0 on obtient $\forall x \in K,\ f(x) \leq \sup\limits_{\|y\|=1} f(y)$.

1.3.3.3) On a $\Delta(-f) = -\Delta f = 0$ donc $-f$ est harmonique d'où d'aprés 1.3.3.2) on a $\forall x \in K$,

$-f(x) \leq \sup\limits_{\|y\|=1} -f(y)$ càd $f(x) \geq \inf\limits_{\|y\|=1} f(y)$.

2.1) Pour $x \in [-\pi, 0]$, $\tilde{\psi}(x) = -\tilde{\psi}(-x) = -\psi(-x)$. Pour $x \in [\pi, 2\pi]$ on a $\tilde{\psi}(x) = \tilde{\psi}(x-2\pi)$

et comme $x - 2\pi \in [-\pi, 0]$ alors $\tilde{\psi}(x) = -\psi(2\pi - x)$. Pour. $x \in [2\pi, 3\pi]$ on a $\tilde{\psi}(x) = \tilde{\psi}(x-2\pi)$

et comme $x - 2\pi \in [0, \pi]$ alors $\tilde{\psi}(x) = \psi(x - 2\pi)$. Ainsi $\tilde{\psi}(x) = \begin{cases} -\psi(-x) \text{ si } x \in [-\pi, 0] \\ \psi(x) \text{ si } x \in [0, \pi] \\ -\psi(2\pi - x) \text{ si } x \in [\pi, 2\pi] \\ \psi(x - 2\pi) \text{ si } x \in [2\pi, 3\pi] \end{cases}$

avec $\psi(0) = \psi(\pi) = 0$, donc $\lim\limits_{0^-}\tilde{\psi} = \lim\limits_{0^+}\tilde{\psi} = 0$ et $\lim\limits_{\pi^-}\tilde{\psi} = \lim\limits_{\pi^+}\tilde{\psi} = 0$, donc $\tilde{\psi}$ est continue en 0 et π de plus $\tilde{\psi}$ est continue sur $]0, \pi[$ car ψ l'est, donc par parité et périodicité $\tilde{\psi}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Dérivabilité: On a ψ est de classe C^1 sur $[0,\pi]$ donc :

$\tilde{\psi}'(x) = \begin{cases} \psi'(-x) \text{ si } x \in]-\pi, 0[\\ \psi'(x) \text{ si } x \in]0, \pi[\end{cases}$, par suite $\lim\limits_{0^-}\tilde{\psi}' = \psi'(0) = \lim\limits_{0^+}\tilde{\psi}'(0)$ d'où par théorème du prolongement de la dérivée on déduit que $\tilde{\psi}$ est dérivable en 0 et que sa dérivée est continue en 0.

$\tilde{\psi}'(x) = \begin{cases} \psi'(x) \text{ si } x \in]0, \pi[\\ \psi'(2\pi - x) \text{ si } x \in]\pi, 2\pi[\end{cases}$ donc $\lim\limits_{\pi^-}\tilde{\psi}' = \psi'(\pi) = \lim\limits_{\pi^+}\tilde{\psi}'$ donc par théorème du prolongement de la dérivée on déduit que $\tilde{\psi}$ est dérivable en π et que sa dérivée est continue en π.

Par parité et périodicité on déduit que $\tilde{\psi}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

2.2) Dans la suite b_p désigne : $\boxed{b_p = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \psi(t)\sin(pt)dt.}$

$\tilde{\psi}$ est impair donc pour $p \geq 0$, $a_p(\tilde{\psi}) = 0$ et pour $p \geq 1$, $b_p(\tilde{\psi}) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \tilde{\psi}(t)\sin(pt)dt = b_p$.

2.3) On a $\tilde{\psi}$ est 2π périodique de classe C^1 donc la famille $(c_k(\tilde{\psi}))_{k\in\mathbb{Z}}$ est absolument sommable or pour $p \geq 1$, $c_p(\tilde{\psi}) = \frac{1}{2}(a_p(\tilde{\psi}) - ib_p(\tilde{\psi})) = -\frac{i}{2}b_p$ donc la série $\sum\limits_{p\geq 1} b_p$ converge absolument.

2.4) On fera les abréviations : cvn (resp cvu) désigne converge normalement (resp uniformément).

On a v_p est continue sur $D := \mathbb{R} \times [0, +\infty[$ et pour $(x,t) \in D$, $|v_p(x,t)| \leq |b_p|$ avec $\sum\limits_{p\geq 1} |b_p|$

converge donc la série $\sum_{p\geq 1} v_p$ cvn donc cvu sur D et par théorème de continuité on déduit que sa somme f est continue sur D.

2.5) On a $(x,t) \to x$ et $(x,t) \to t$ sont linéaire donc C^∞ sur $\mathbb{R}^2$, $u \to \sin(pu)$ et $u \to e^{-pu^2}$ sont C^∞ sur $\mathbb{R}$ et comme la composé et le produit d'applications C^∞ l'est alors $v_p \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

On a $\frac{\partial^2 v_p}{\partial x^2}(x,t) = -p^2 b_p \sin(px) e^{-p^2 t} = \frac{\partial v_p}{\partial t}(x,t)$.

2.6) Soit $(x,t) \in \mathbb{R} \times [a,+\infty[$, on a $|p^k v_p(x,t)| \leq p^k e^{-p^2 a}|b_p| = o(|b_p|)$, $|p^k \frac{\partial v_p}{\partial x}(x,t)| = p^{k+1}|\cos(pt)|e^{-pt^2}$ $\leq p^{k+1} e^{-p^2 a}|b_p| = o(|b_p|)$ et $\sum|b_p|$ converge donc les séries $\sum p^k v_p$ et $\sum p^k \frac{\partial v_p}{\partial x}$ cvn sur $\mathbb{R} \times [a,+\infty[$.

2.7) •Existence de $\frac{\partial f}{\partial x}$. On fixe $t > 0$. On a $\forall p \geq 1$, l'application $f_p : x \to v_p(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. D'aprés 2.4) la série $\sum_{p\geq 1} f_p$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. D'aprés 2.6) on a la série $\sum_{p\geq 1} \frac{\partial v_p}{\partial x}$ cvn sur $\mathbb{R} \times [t,+\infty[$ et comme $f_p'(x) = \frac{\partial v_p}{\partial x}(x,t)$ alors la série $\sum_{p\geq 1} f_p'$ cvn donc cvu sur $\mathbb{R}$ et par théorème de dérivation on déduit que $x \to f(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\partial v_p}{\partial x}(x,t)$.

•Continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$: On a $v_p \in C^1(\mathbb{R}^2)$ donc $\frac{\partial v_p}{\partial x} \in C(\mathbb{R} \times]0,+\infty[)$. Soit K un compact inclus dans $\mathbb{R} \times]0,+\infty[$, l'application $(x,t) \to t$ est continue sur K compact donc elle est bornée et atteint sa borne inférieure donc il existe $a \in]0,+\infty[$ tel que $\forall (x,t) \in K,\ t \geq a$ alors $K \subset \mathbb{R} \times [a,+\infty[$ donc par 2.6) la série $\sum_{p\geq 1} \frac{\partial v_p}{\partial x}$ cvn donc cvu sur K donc par théorème de continuité $\frac{\partial f}{\partial x} \in C(\mathbb{R} \times]0,+\infty[)$.

2.8) •Existence de $\frac{\partial f}{\partial t}$. On fixe $x \in \mathbb{R}$. On a $\forall p \geq 1$, l'application $f_p : t \to v_p(x,t)$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$. D'aprés 2.4) la série $\sum_{p\geq 1} f_p$ converge simplement sur $]0,+\infty[$. Soit $a > 0$. D'aprés 2.6) on a la série $\sum_{p\geq 1} p^2 v_p$ cvn sur $\mathbb{R} \times [a,+\infty[$ et comme $f_p'(t) = -p^2 v_p(x,t)$ alors la série $\sum_{p\geq 1} f_p'$ cvn donc cvu sur $[a,+\infty[$ en particulier $\sum_{p\geq 1} f_p'$ cvu sur tout segment inclus dans $]0,+\infty[$ donc par théorème de dérivation on déduit que $t \to f(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\partial v_p}{\partial t}(x,t)$.

•Continuité de $\frac{\partial f}{\partial t}$: On a $v_p \in C^1(\mathbb{R}^2)$ donc $\frac{\partial v_p}{\partial t} \in C(\mathbb{R} \times]0,+\infty[)$. Soit K un compact inclus dans $\mathbb{R} \times]0,+\infty[$, comme dans 2.7) il existe $a \in]0,+\infty[$ tel que $K \subset \mathbb{R} \times [a,+\infty[$ donc par 2.6) la série $\sum_{p\geq 1} \frac{\partial v_p}{\partial t} = \sum_{p\geq 1} -p^2 v_p$ cvn donc cvu sur K donc par théorème de continuité on a $\frac{\partial f}{\partial t} \in C(\mathbb{R} \times]0,+\infty[)$.

2.9) Posons $D = \mathbb{R} \times]0,+\infty[$. On a $v_p \in C^2(D)$, $\sum_{p\geq 1} \frac{\partial v_p}{\partial x}$ et $\sum_{p\geq 1} \frac{\partial v_p}{\partial t}$ convergent simplement sur D.

Soit K un compact inclus dans D, alors il existe $a \in]0,+\infty[$ tel que $K \subset \mathbb{R} \times [a,+\infty[$. On a $\frac{\partial^2 v_p}{\partial t^2} = p^4 v_p$, $\frac{\partial^2 v_p}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 v_p}{\partial x \partial t} = -p^2 \frac{\partial v_p}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 v_p}{\partial x^2} = -p^2 v_p$, donc par 2.6) les séries $\sum_{p\geq 1} \frac{\partial^2 v_p}{\partial t^2}$, $\sum_{p\geq 1} \frac{\partial^2 v_p}{\partial t \partial x}$, $\sum_{p\geq 1} \frac{\partial^2 v_p}{\partial x^2}$, $\sum_{p\geq 1} \frac{\partial^2 v_p}{\partial x \partial t}$ cvn donc cvu sur K, en particulier pour x fixé (resp t fixé) les séries $\sum_{p\geq 1} \frac{\partial^2 v_p}{\partial t^2}$, $\sum_{p\geq 1} \frac{\partial^2 v_p}{\partial t \partial x}$, (resp $\sum_{p\geq 1} \frac{\partial^2 v_p}{\partial x^2}$, $\sum_{p\geq 1} \frac{\partial^2 v_p}{\partial x \partial t}$) cvu sur tout segment $\subset]0,+\infty[$ (resp tout segment $\subset \mathbb{R}$) donc par théorème de dérivabilité $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}$ (resp $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}$) existent. Par théorème de continuité on a $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}$ sont dans $C(D)$ donc $f \in C^2(D)$. D'aprés 2.5) on a $\frac{\partial^2 v_p}{\partial x^2} = \frac{\partial v_p}{\partial t}$ donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial f}{\partial t}$ sur D.

2.10) On a $\Omega_R \subset \mathbb{R} \times]0,+\infty[$ donc d'aprés 2.9), $f \in C^2(\Omega_R)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial t} = 0$ sur Ω_R. On a pour $t \in [0,R]$, $\forall p \geq 1$, $v_p(0,t) = v(\pi,t) = 0$ donc $f(0,t) = f(\pi,t) = 0$. On a pour x dans $[0,\pi]$

$f(x,0) = \sum_{p=1}^{+\infty} v_p(x,0) = \sum_{p=1}^{+\infty} b_p \sin(px) = \sum_{p=1}^{+\infty} b_p(\tilde{\psi}) \sin(px)$ et comme $\tilde{\psi}$ est 2π périodique de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ alors par théorème de convergence normale la série de Fourier de $\tilde{\psi}$ cvn vers $\tilde{\psi}$ par suite $\forall x \in [0,\pi]$, $f(x,0) = \tilde{\psi}(x) = \psi(x)$, finalement la restriction de f à $\overline{\Omega}_R$ est solution problème posé.

3.1.1) On a pour $t \in]a,b[$, $\frac{g(t)-g(b)}{t-b} \geq 0$ en faisant tendre t vers b on a $g'(b) \geq 0$.

3.1.2) g présente un maximum local en x_0 donc il existe $\alpha, \beta \in]a,b[$ tels que $\alpha < x_0 < \beta$ et $\forall t \in [\alpha,\beta]$, $g(t) \leq g(x_0)$ donc d'aprés 3.1.1) on a $g'(x_0) \geq 0$, d'autre part on a $\forall t \in]x_0,\beta]$,

$\frac{g(t)-g(x_0)}{t-x_0} \leq 0$ en faisant tendre t vers x_0 on a $g'(x_0) \leq 0$ d'où $g'(x_0) = 0$ donc par la formule de taylor on a $g(t) - g(x_0) \underset{t\to x_0}{=} \frac{1}{2}(t-x_0)^2[g''(x_0) + o(1)]$ donc $\lim\limits_{t\to x_0} \frac{g(t)-g(x_0)}{(t-x_0)^2} = \frac{1}{2}g''(x_0)$ et comme $\forall t \in]x_0, \beta]$, $\frac{g(t)-g(x_0)}{(t-x_0)^2} \leq 0$ alors $g''(x_0) \leq 0$.

3.2) On a $\overline{\Omega}_r \subset \overline{\Omega}_R$ donc F est continue sur $\overline{\Omega}_r$ qui est compact(fermé borné en dimension finie) donc F est bornée sur $\overline{\Omega}_r$ et atteint ses bornes, d'où $\exists(x_0, t_0) \in \overline{\Omega}_r$ tel que $\sup\limits_{(x,t)\in\overline{\Omega}_r} F(x,t) = F(x_0,t_0)$.

3.2.1) Si $(x_0,t_0) \in \Omega_r$ alors F présente un maximum local en (x_0,t_0) donc $\operatorname{grad} F(x_0,t_0) = 0$ càd $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,t_0) = \frac{\partial F}{\partial t}(x_0,t_0)$ de plus $F \in C^2(\Omega_r)$ donc d'aprés 1.2.3) on a $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0,t_0) \leq 0$.

3.2.2) Si $(x_0,t_0) \in \wedge_r$ càd $x_0 \in]0,\pi[$ et $t_0 = r$, alors la fonction $g_1 : x \to F(x,r)$, $x \in]0,\pi[$, présente un maximum local en x_0 donc d'aprés 3.1.2) on a $g_1''(x_0) \leq 0$ càd $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0,t_0) \leq 0$. On a aussi l'application $g_2 : t \to F(x_0,t)$, $t \in [0,r]$, est dérivable sur $]0,r]$ et vérifie $\forall t \in]0,r]$, $g_2(t) \leq g_2(r)$ donc d'aprés 3.1.1) on a $g_2'(r) \geq 0$ càd $\frac{\partial F}{\partial t}(x_0,t_0) \geq 0$.

3.2.3) De 3.2.1) et 3.2.2) résulte que si $(x_0,t_0) \in \Omega_r \cup \wedge_r \subset \Omega_R$ alors $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0,t_0) - \frac{\partial F}{\partial t}(x_0,t_0) \leq 0$ ce qui contredit $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial F}{\partial t} > 0$ sur Ω_R donc $(x_0,t_0) \in \Gamma_r$.

3.3.1) Soit $R > 0$, $\Gamma_R \subset [0,\pi] \times [0,R]$ donc Γ_R est borné, $\Gamma_R = f^{-1}(\{0\})$ où $f : [0,\pi] \times [0,R] \to \mathbb{R}$, $(x,t) \to tx(x-\pi)$ est continue donc Γ_R est fermé borné en dimension finie donc compact et comme $z_p \in \Gamma_{r_p} \subset \Gamma_R$ alors on peut extraire de $(z_p)_{p\geq 1}$ une sous-suite $(z_{\sigma(p)})_{p\geq 1}$ qui converge vers un point $z = (x^*, t^*) \in \Gamma_R$, or $F \in C(\overline{\Omega}_R)$ et $(z_{\sigma(p)})_{p\geq 1}$ converge vers z alors $(F(z_{\sigma(p)}))_{p\geq 1}$ tend vers $F(z)$. D'autre part si $r \leq s$ alors $\overline{\Omega}_r \subset \overline{\Omega}_s$ donc $\sup\limits_{\overline{\Omega}_r} F \leq \sup\limits_{\overline{\Omega}_s} F$, il en résulte que $\sup\limits_{\overline{\Omega}_{\sigma(p)}} F \leq \sup\limits_{\overline{\Omega}_{\sigma(p+1)}} F$, d'où la croissance de la suite $(F(z_{\sigma(p)}))_{p\geq 1}$.

3.3.2) Soit $(x,t) \in [0,\pi] \times [0,R[$, comme $t < R$ et $r_{\sigma(p)}$ tend vers R alors il existe p tel que $t < r_{\sigma(p)}$, donc $(x,t) \in \overline{\Omega}_{r_{\sigma(p)}}$, d'où $F(x,t) \leq \sup\limits_{\overline{\Omega}_{r_{\sigma(p)}}} F = F(z_{\sigma(p)}) \leq F(z)$. (car $F(z_{\sigma(p)})$ croit vers $F(z)$). On a donc $\forall(x,t) \in [0,\pi] \times [0,R[,\ F(x,t) \leq F(z)$ et par continuité de F sur $\overline{\Omega}_R$ on déduit en faisant tendre t vers R que l'inégalité reste valable pour $t = R$, ainsi $\forall(x,t) \in \overline{\Omega}_R,\ F(x,t) \leq F(x^*,t^*)$.

3.4.1) Notons $D = C(\overline{\Omega}_R) \cap C^2(\Omega_R)$. L'application $g : (x,t) \to \frac{x^2}{p}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ en particulier $g \in D$, on a aussi $F \in D$ donc $F_p = F + g \in D$. On a $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \frac{\partial g}{\partial t} = \frac{2}{p}$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial F}{\partial t} \geq 0$ sur Ω_R, donc $\frac{\partial^2 F_p}{\partial x^2} - \frac{\partial F_p}{\partial t} = \frac{2}{p} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial F}{\partial t} \geq \frac{2}{p} > 0$ sur Ω_R.

3.4.2) Dans 3.3) on a vu que si $F \in C(\overline{\Omega}_R) \cap C^2(\Omega_R)$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial F}{\partial t} > 0$ sur Ω_R alors il existe $(x^*,t^*) \in \Gamma_R$ tel que $\forall(x,t) \in \overline{\Omega}_R,\ F(x^*,t^*) \geq F(x,t)$ càd $\sup\limits_{\overline{\Omega}_R} F$ est atteint en un point de Γ_R.

En appliquant ceci à $F_p \in C(\overline{\Omega}_R) \cap C^2(\Omega_R)$ avec $\frac{\partial^2 F_p}{\partial x^2} - \frac{\partial F_p}{\partial t} > 0$ sur Ω_R on obtient l'existence de $(x_p,t_p) \in \Gamma_R$ tel que $\sup\limits_{(x,t)\in\overline{\Omega}_R} F_p(x,t) = F_p(x_p,t_p)$.

3.4.3) On a vu dans 3.3.1 que Γ_R est compact, donc de la suite $z_p = (x_p,t_p)$ on peut extraire $(z_{\sigma(p)})$ qui converge vers un certain $z = (x^*,t^*) \in \Gamma_R$. Pour $(x,t) \in \overline{\Omega}_R,\ F(x,t) + \frac{x^2}{\sigma(p)} \leq F(z_{\sigma(p)}) + \frac{x^2_{\sigma(p)}}{\sigma(p)}$ et en faisant tendre p vers $+\infty$ on a par continuité de F, $F(x,t) \leq F(z)$ d'où $F(z) = \sup\limits_{(x,t)\in\overline{\Omega}_R} F(x,t)$.

3.5) On a sur Ω_R, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \geq 0$ donc d'aprés 3.4) il existe $z \in \Gamma_R$, tel que $F(z) = \sup\limits_{\overline{\Omega}_R} F$ et comme F est nulle sur Γ_R alors $\sup\limits_{\overline{\Omega}_R} F = 0$ donc $F \leq 0$, d'autre part $-F$ vérifie les mêmes hypothèses que F donc $-F \leq 0$ finalement F est nulle sur $\overline{\Omega}_R$.

3.6) On a f et f_1 sont dans $C^2(\Omega_R) \cap C(\overline{\Omega}_R)$ donc $G = f_1 - f$ l'est.

Sur Ω_R, on a: $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} - \frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} - \frac{\partial f_1}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial t}\right) = 0.$

$\forall t \in [0,R],\ G(0,t) = f_1(0,t) - f(0,t) = 0$ de même $G(\pi,t) = 0$.

$\forall x \in [0,\pi],\ G(x,0) = f_1(x,0) - f(x,0) = \psi(x) - \psi(x) = 0$.

Ainsi G est nulle sur Γ_R et $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} - \frac{\partial G}{\partial t} = 0$ sur Ω_R donc d'aprés 3.5), $G = 0$ d'où $f_1 = f$.