Corrigé du Concours National Commun
Session 2009
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II
Filière MP

Par K. Chaira

$1^{\text{ème}}$ **partie : Étude de l'application** f_m

1. R est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n et admet $n+1$ racines $x_o, x_1, \cdots, x_n$ distinctes deux à deux, donc R est le polynôme nul.

2. Soit $(\lambda, P, Q) \in \mathbb{R} \times \mathcal{P}_m^2$.

$f_m(\lambda.P+Q) = ((\lambda.P+Q)(x_o), \cdots, (\lambda.P+Q)(x_n)) = ((\lambda.P(x_o)+Q(x_o), \cdots, (\lambda.P(x_n)+Q(x_n))$
$= \lambda.f_m(P) + f_m(Q)$.

3. (a) $P \in Kerf_m$ équivaut à $P(x_i) = 0$, pour tout $i \in \{0, 1, \cdots, n\}$, donc le polynôme $\pi = (X - x_o)(X - x_1)\cdots(X - x_n)$ divise P; et, comme $deg(P) \leq m$ et $deg(\pi) = n+1$, donc il existe $Q \in \mathcal{P}_{m-n-1}$ tel que $P = Q\ \pi$. D'où, $Kerf_m \subseteq \{Q\ \pi\ ;\ Q \in \mathcal{P}_{m-n-1}\}$. Pour l'autre inclusion, il suffit de remarquer que le polynôme π admet $x_o, x_1, \cdots, x_n$ comme racines.

(b) D'abord $Kerf_m$ et $\mathcal{P}_n$ sont des sous espaces vectoriels de $\mathcal{P}_m$, puisque $n+1 \leq m$.

$*$ Si $P \in Kerf_m \cap \mathcal{P}_m$, alors pour tout $i \in \{0, 1, \cdots, n\}$, $P(x_i) = 0$, et $deg(P) \leq n$; et, d'après la question 1), le polynôme P est nul. D'où, Ker $f_m \cap \mathcal{P}_m = \{0\}$.

$*$ Soit $H \in \mathcal{P}_m$. On effectue la division euclidienne de H par π, il existe $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que $H = Q\ \pi + R$ et $deg(R) < deg(\pi) = n+1$; donc $H \in Kerf_m + \mathcal{P}_n$. D'où, $\mathcal{P}_m = Kerf_m + \mathcal{P}_n$. Ainsi, $\mathcal{P}_m = Kerf_m \bigoplus \mathcal{P}_n$.

(c) $dim(Kerf_m) = dim(\mathcal{P}_m) - dim(\mathcal{P}_n) = (m+1) - (n+1) = m - n$.

$(X^i\ \pi)_{0 \leq i \leq m-n-1}$ est une famille de polynômes échelonnées de $Kerf_m$, donc elle est libre; et, comme son cardinal est égal à la dimension de $Kerf_m$, donc $(X^i\ \pi)_{0 \leq i \leq m-n-1}$ est une base de $Kerf_m$.

(d) $*$ $rg(f_m) = dim(\mathcal{P}_m) - dim(Kerf_m) = (m+1) - (m-n) = n+1$.

$*$ Comme $Im(f_m) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ et $rg(f_m) = n+1 = dim(\mathbb{R}^{n+1})$, donc $Im(f_m) = \mathbb{R}^{n+1}$. Ainsi, l'application f_m est surjective.

4. Dans cette question, $m \leq n$.

(a) Si $P \in Kerf_m$, alors les $n+1$ réels $x_o, x_1, \cdots, x_n$ sont des racines de P deux à deux distinctes et $deg(P) \leq m < n+1$, donc P est nul. D'où, f_m est injectif.
(b) f_m étant injective, donc $Kerf_m = \{0\}$; et, par suite
$rg(f_m) = dim(\mathcal{P}_m) - dim(Kerf_m) = m+1$.
(c) f_m est surjective si, et seulement si, $rg(f_m) = dim(\mathbb{R}^{n+1})$ si, et seulement si, $m = n$.
5. (a) D'après la question 4), l'application f_n est bijective de $\mathcal{P}_n$ sur $\mathbb{R}^{n+1}$. Donc, pour tout $y = (y_o, y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique polynôme $P_y \in \mathcal{P}_n$ tel que
$f_n(P_y) = y = (y_o, y_1, \cdots, y_n)$.
(b) i. Remarquons d'abord que, pour tout $i \in \{0, 1, \cdots, n\}$, $\varepsilon_i = (\delta_{i,1}, \delta_{i,2}, \cdots, \delta_{i,n})$.
Soit $i \in \{0, 1, \cdots, n\}$, $f_n(L_i) = \varepsilon_i$ équivaut à $(L_i(x_o), L_i(x_1), \cdots, L_i(x_n)) = (\delta_{i,1}, \delta_{i,2}, \cdots, \delta_{i,n})$.
Donc, pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{0, 1, \cdots, n\}$, $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$.
ii. Soit $(\alpha_O, \alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i.L_i = 0$. Donc, pour tout $j \in \{0, 1, \cdots, n\}$, on a $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i.L_i(x_j) = 0$ c'est-à-dire $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i.\delta_{i,j} = 0$ ce qui traduit à $\alpha_j = 0$. D'où, $(L_o, L_1, \cdots, L_n)$ est une famille libre; et, comme le cardinal de cette famille est égal à $dim(\mathcal{P}_n) = n+1$, donc $(L_o, L_1, \cdots, L_n)$ est une base de $\mathcal{P}_n$.
(c) D'après la question 5), $f_n(P_y) = (y_o, y_1, \cdots, y_n)$. Comme $P_y \in \mathcal{P}_n$ et $(L_o, L_1, \cdots, L_n)$ est une base de $\mathcal{P}_n$, donc il existe $(\beta_o, \beta_1, \cdots, \beta_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $P_y = \sum_{i=0}^{n} \beta_i.L_i$. Et, par suite $(y_o, y_1, \cdots, y_n) = f_n(P_y) = \sum_{i=0}^{n} \beta_i.f_n(L_i) = \sum_{i=0}^{n} \beta_i.\varepsilon_i = (\beta_o, \beta_1, \cdots, \beta_n)$. Ainsi, $P_y = \sum_{i=0}^{n} y_i.L_i$.
En particulier, pour $y = (1, \cdots, 1)$, on a $\sum_{i=0}^{n} L_i = P_y$.

$2^{\text{ème}}$ partie : Problème aux moindres carrés

1. Soit $u \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$ tel que ${}^tAAu = {}^tAb$.
(a) $*$ Soit $x \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$.
On a $< b - Au \ , \ Ax >_p = < {}^tA(b - Au) \ , \ x >_q = < {}^tAb - {}^tAAu \ , \ x >_q = < 0 \ , \ x >_q = 0$. Donc, $b - Au$ est orthogonal à tout vecteur de la forme Ax, $x \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$. Ce qui prouve que $b - Au$ est orthgonal à $Im(A)$.
$*$ Comme $Au \in Im(A)$ et $b - Au \in Im(A)^{\perp}$, donc Au est la projection orthgonale de b sur $Im(A)$.
(b) $*$ Soit $x \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$. On a $A(u - x) \in Im(A)$ et $b - Au \in Im(A)^{\perp}$; d'après le théorème de Pythagore, $\|b - Ax\|_p^2 = \|(b - Au) + (Au - Ax)\|_p^2 = \|b - Au\|_p^2 + \|A(u - x)\|_p^2$. Donc,

$min\{\|b-Ax\|_p^2\ ;\ x\in\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})\}\geq\|b-Au\|_p^2$; et ce minimum il est bien atteint en $\|b-Au\|_p^2$. Ainsi, $min\{\|b-Ax\|_p^2\ ;\ x\in\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})\}=\|b-Au\|_p^2$.

$*$ Puisque Au est la projection orthogonale de b sur $Im(A)$ et l'espace vectoriel $Im(A)$ est de dimension finie, donc Au est l'unique vecteur de $Im(A)$ qui assure le minimum de la quantité $\|b-y\|_p^2$ lorsque y décrit $Im(A)$ c'est-à-dire le minimum de la quantité $\|b-Ax\|_p^2$ lorsque x décrit $\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$.

Ainsi, v est un vecteur de $\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$ en lequel ce minimum est atteint si, et seulement si, $g(b)=Av$ si, et seulement si, $v\in u+Ker(A)$.

2. Réciproquement, si $u\in\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$ est un vecteur qui réalise le minimum de la quantité $\|b-Ax\|_p^2$ lorsque x décrit $\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$, alors $b-Au\in Im(A)^{\perp}$ cela signifie que, pour tout $x\in\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$, $<b-Au\ ,\ Ax>_p=0$. Donc, pour tout $x\in\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$, $<\ {}^tAb-\ {}^tAAu\ ,\ x>_q=0$; et, par suite ${}^tAb-\ {}^tAAu\in[\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})]^{\perp}=\{0\}$. D'où, le resultat demandé.

3. (a) Soit $x\in Ker\ {}^tAA$, donc ${}^tAAx=0$. On a $<Ax\ ,\ Ax>_p=<x\ ,\ {}^tAAx>_q=<x\ ,\ 0>_q=0$.

(b) D'abord $KerA\subset Ker\ {}^tAA$.

Si $x\in Ker\ {}^tAA$, alors $\|Ax\|_p^2=<Ax\ ,\ Ax>_p=0$; et, par suite $Ax=0$. Ainsi, $Ker\ {}^tAA\subset KerA$.

(c) $r(\ {}^tA)=rg(A)=dim(\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R}))-dim(KerA)=dim(\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R}))-dim(Ker\ {}^tAA)$
$=rg(\ {}^tAA)$.

(d) Si $y\in Im(\ {}^tAA)$, il existe $x\in\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$ tel que $y=\ {}^tAAx$. On remarque que le vecteur $y=\ {}^tA(Ax)\in Im(\ {}^tA)$. D'où, $Im(\ {}^tAA)\subset Im(\ {}^tA)$; et, comme $r(\ {}^tA)=rg(\ {}^tAA)$, on déduit l'égalité de ces deux sous-espaces vectoriels.

4. (a) $*$ Soit g la projection orthgonale de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ sur $Im(A)$. L'espace $Im(A)$ étant de dimension finie, donc d'après le théorème de projection, pour le vecteur b il existe un unique vacteur $g(b)\in Im(A)$ vérifiant $min\{\|b-y\|_p^2\ ;\ y\in Im(A)\}=\|b-g(b)\|_p^2$ ce qui traduit par $min\{\|b-Ax\|_p^2\ ;\ x\in\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})\}=\|b-g(b)\|_p^2$, avec $g(b)=Au$.

D'après les quetions 1) et 2) de la deuxième partie, u est exactement une solution du système ${}^tAAu=bu$.

(b) Le problème a une unique solution u si, et seulement si, $u+Ker(A)=\{u\}$ si, et seulement si, $Ker(A)=0$.

3ème partie : Approximation polynômiale au moindres carrés

A. On suppose $m\geq n+1$.

1. D'après la question d-3) de la première partie, l'application f_m est surjective de $\mathcal{P}_m$ vers $\mathbb{R}^{n+1}$. Donc, pour l'élément $(y_o,y_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$, il existe $Q_o\in\mathcal{P}_m$ tel que

$f_m(Q_o) = (y_o, y_1, \cdots, y_n)$.

2. $*$ On rappelle que $f_m(Q_o) = (Q_o(x_o), \cdots, Q_o(x_n))$. Pour tout $P \in \mathcal{P}_m$, $\Phi_m(P) = \sum_{i=0}^{n}(y_i - P(x_i))^2$ est positif; et, comme $\Phi_m(Q_o) = \sum_{i=0}^{n}(y_i - Q_o(x_i))^2 = 0$, donc la valeur minimal λ_m de $\Phi_m(P)$ lorsque P décrit $\mathcal{P}_m$ est nulle.

$*$ $(Q \in \mathcal{P}_m,\ \Phi_m(Q) = 0)$ équivaut à $(Q \in \mathcal{P}_m,\ Q(x_i) = y_i = Q_o(x_i),\ \textit{pour tout } i \in \{0, 1, \cdots, n\})$ équivaut à $Q - Q_o \in Ker f_m$.

L'ensemble des polynômes en lesquels cette valeur minimale est atteinte est $Q_o + Ker f_m$.

B. On suppose que $m \leq n$.

1. (a)

${}^tAA = [c_{ij}]_{1 \leq i,j \leq m+1}$, où $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n+1} x_{k-1}^{i-1} x_{k-1}^{j-1} = \sum_{k=1}^{n+1} x_{k-1}^{i+j-2}$, pour tout $(i, j) \in \{1, \cdots, m+1\}^2$.

(b) On désigne par $C_o, C_1 \cdots, C_m$ les colonne de la matrice A. Soient $\alpha_o, \alpha_1, \cdots, \alpha_m$ des réels vérifiant $\sum_{i=0}^{m} \alpha_i.C_i = 0$. Donc, pour tout $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$, $\sum_{i=0}^{m} \alpha_i.x_k^i = 0$. Comme, le polynôme $P = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i X^i$ s'annulle en $n+1$ points $x_o, \cdots, x_n$ distinctes deux à deux et $deg(P) \leq m < n+1$, donc ce polynôme est nul; et, par suite ces coefficients sont nuls. Ainsi, les colonnes de A sont linéairement indépendantes. D'où, $rg(A) = Card(\{C_o, \cdots, C_m\}) = m + 1$.

(c) En tenant compte que A est inversible et du résultat c-3) de la deuxième partie, $rg({}^tAA) = r(A) = m + 1$, donc ${}^tAA \in \mathcal{M}_{m+1,m+1}(\mathbb{R})$ est inversible.

2. (a) $AV_P = {}^t(P(x_o), P(x_1), \cdots, P(x_n))$.

(b) $\Phi_m(P) = \sum_{i=0}^{n}(y_i - P(x_i))^2 = \|b - AV_p\|_{n+1}^2$, où ${}^tb = (y_o, y_1, \cdots, y_n)$.

3. (a) Comme $rg(A) = m + 1 = dim(\mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbb{R}))$, donc $Ker(A) = \{0\}$. D'après la question b-4) de la deuxième partie, il existe une unique solution $U \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbb{R})$ minimisant la quantité $\|b - AV\|_{n+1}^2$ lorsque V décrit $\mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbb{R})$ ce qui traduit par l'existence et l'unicité d'un polynôme $P_o \in \mathcal{P}_m$, $AU = (P_o(x_o), \cdots, P_o(x_n))$, minimisant la quantité $\Phi_m(P) = \|b - AV_P\|_{n+1}^2$ lorsque P décrit $\mathcal{P}_m$. On note $U = V_{P_o}$.

(b) D'après la question a-4) de la deuxième partie, le vecteur V_{P_o} vérifie le système ${}^tAAZ = {}^tAb$, d'inconnue Z; et, comme ${}^tAA$ est inversible, ce système est donc de Cramer; et, par suite V_{P_o} est l'unique solution de ce système.

(c) $\lambda_m = \|b - AV_{P_o}\|_{n+1}^2$.

4. (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ et ${}^tAA = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 8 & 18 \\ 6 & 8 & 18 & 32 \\ 8 & 18 & 32 & 66 \end{pmatrix}$.

(b) ${}^tAb = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(c) On pose $Z = {}^t(x, y, z, t)$.

Le système ${}^tAAZ = {}^tAb$ èquivaut à (S) $\begin{cases} 2x + y + 3z + 4s = 2 \ \ (L_1) \\ x + 3y + 4z + 9s = 0 \ \ (L_2) \\ 3x + 4y + 9z + 16s = 1 \ \ (L_3) \\ 4x + 9y + 16z + 33s = 0 \ \ (L_4) \end{cases}$

On effectue les opérations suivantes : $2L_2 - L_1 \to L_2$, $2L_3 - 3L_1 \to L_3$ et $L_4 - 2L_1 \to L_4$, on obtient $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 3z + 4s = 2 \\ 5y + 5z + 14s = -2 \\ 5y + 9z + 20s = -4 \\ 7y + 10z + 25s = -4 \end{cases}$.

On effectue les opérations suivantes : $L_3 - L_2 \to L_3$ et $5L_4 - 7L_2 \to L_4$, on obtient

$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 3z + 4s = 2 \\ 5y + 5z + 14s = -2 \\ 4z + 6s = -2 \\ 15z + 27s = -6 \end{cases}$

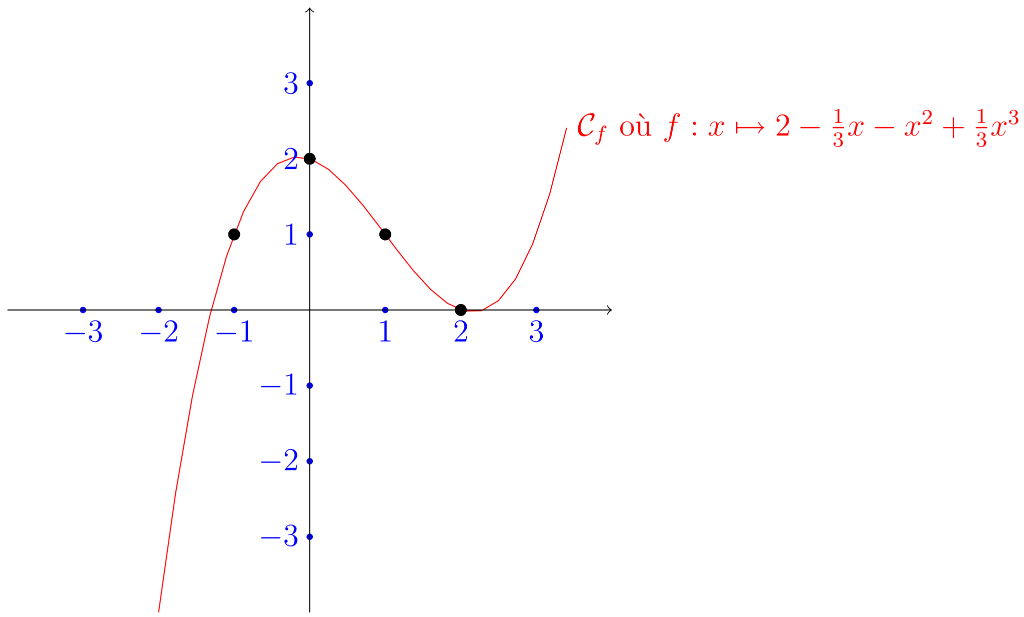
On effectue l'opérations suivante : $4L_4 - 15L_3 \to L_4$, on obtient $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 3z + 4s = 2 \\ 5y + 5z + 14s = -2 \\ 4z + 6s = -2 \\ 18s = 6 \end{cases}$.

Ainsi, $(S) \Leftrightarrow (x, y, z, t) = (2, -\frac{1}{3}, -1, \frac{1}{3})$.

(d) On a $V_{P_o} = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{3} \\ -1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $P_o = 2 - \frac{1}{3}X - X^2 + \frac{1}{3}X^3$ et

$\lambda_3 = (1 - P_o(-1))^2 + (2 - P_o(0))^2 + (1 - P_o(1))^2 + (0 - P_o(2))^2 = 0$.

La représentation graphique de la courbe de la fonction $t \mapsto P_0(t)$ et les points (x_i, y_i) est :



3
2
1
−1
−2
−3
−3
−2
−1
1
2
3
$\mathcal{C}_f$ où $f : x \mapsto 2 - \frac{1}{3}x - x^2 + \frac{1}{3}x^3$