CONCOURS NATIONAL MAROCAIN - SESSION 2009 - MP - ÉPREUVE I

EXERCICE

Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$; on définit la fonction g sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ par $g(x,y) = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

1. (a) Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et calculer ses dérivées partielles premières en fonction de φ'.

   (b) Calculer les dérivées partielles secondes $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$ en fonction de φ' et φ''.

2. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(1+t^2)x'' + 2tx' = t. \qquad (1)$$

3. On veut déterminer les fonctions φ pour lesquelles g vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = \frac{y}{x^3},\ (x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}. \qquad (2)$$

   (a) Montrer que si g vérifie (2) alors φ vérifie l'équation différentielle (1).

   (b) En déduire l'expression de φ puis celle de g.

   (c) Vérifier que les fonctions trouvées ci-dessus sont effectivement des solutions de (2).

PROBLÈME

Dans diverses démonstrations du théorème de WEIERSTRASS sur l'approximation uniforme sur un segment d'une fonction réelle ou complexe continue sur ce segment par des polynômes, l'étape clé est de montrer que l'application valeur absolue est limite uniforme sur $[-1,1]$ d'une suite de polynômes. L'objectif de ce problème est de présenter quelques unes de ces suites qui permettent de réaliser cette approximation.

Les deux parties du problème sont indépendantes.

Notations et rappels

Si α est un réel et n un entier naturel, on pose

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \quad \text{si} \quad n \geqslant 1 \quad \text{et} \quad \binom{\alpha}{0} = 1.$$

On rappelle que si n et m sont des entiers naturels avec $n \leqslant m$, $\binom{m}{n}$ est le nombre de parties à n éléments d'un ensemble à m éléments.

1re Partie
Approximation par les polynômes de Lebesgue

A. Une relation entre coefficients binomiaux

1. Soient n et m deux entiers naturels avec $n \leqslant m$; montrer que $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{m}{p}\binom{m}{n-p} = \binom{2m}{n}$.

   On pourra considérer deux ensembles disjoints E et F ayant m éléments chacun, puis calculer de deux façons différentes le nombre de parties à n éléments de $E \cup F$.

2. Soit n un entier naturel.

   (a) Vérifier que l'application $\alpha \mapsto \binom{2\alpha}{n} - \sum_{p=0}^{n} \binom{\alpha}{p}\binom{\alpha}{n-p}$ est polynomiale puis en donner des zéros.

   (b) Montrer alors que pour tout réel α, $\binom{2\alpha}{n} = \sum_{p=0}^{n} \binom{\alpha}{p}\binom{\alpha}{n-p}$.

B. Recherche d'un équivalent

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + w_n$ où $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite sommable. Étudier la suite $(\ln(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel **strictement positif**.
2. Soient $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs et γ un réel tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = 1 - \dfrac{\gamma}{n} + w'_n$ où $(w'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite sommable.

   (a) Étudier la suite $(n^\gamma b_n)_{n\geqslant 1}$ et en déduire qu'il existe une constante $\ell > 0$ telle que $b_n \sim \dfrac{\ell}{n^\gamma}$.

   (b) Quelle est la nature de la série de terme général b_n ?

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $c_n = (-1)^{n-1}\binom{1/2}{n}$.

   (a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{c_{n+1}}{c_n} = \dfrac{2n-1}{2(n+1)}$.

   (b) Établir qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\binom{1/2}{n} \sim C\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{3/2}}$.

C. Résultat d'approximation

1. Préciser le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \binom{1/2}{n}(-1)^n z^n$.
2. Montrer que cette série converge normalement sur le disque fermé de $\mathbb{C}$, de centre 0 et de rayon 1 ; sa somme sera notée $f(z)$ pour $|z| \leqslant 1$.
3. Montrer soigneusement que si $|z| \leqslant 1$ alors $f(z)^2 = 1 - z$.
4. Montrer que la fonction $x \mapsto f(x)$ ne s'annule pas sur l'intervalle $]-1,1[$ et justifier soigneusement que $f(x) > 0$ pour tout $x \in]-1,1[$, puis que $f(x) = \sqrt{1-x}$, $x \in [-1,1]$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $L_n = -\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} \dfrac{1}{(2k-1)2^{2k}}(1-X^2)^k$ (n^{e} polynôme de Lebesgue).

   (a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\binom{1/2}{n} = (-1)^{n-1}\binom{2n}{n}\dfrac{1}{(2n-1)2^{2n}}$.

   (b) Vérifier que pour tout $x \in [-1,1]$, $|x| = f(1-x^2)$ et montrer que la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des polynômes de Lebesgue converge uniformément sur $[-1,1]$ vers la fonction $x \mapsto |x|$.

2^e Partie
Approximation par d'autres suites de polynômes plus simples

A. Intégrales de Wallis

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n t \,\mathrm{d}t$.

1. (a) Calculer I_0 et I_1 et justifier que $I_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, $nI_n = (n-1)I_{n-2}$.
   (c) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, $nI_nI_{n-1} = \pi/2$.
2. (a) Montrer que la suite $(I_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{n-1}{n} \leqslant \dfrac{I_n}{I_{n-1}} \leqslant 1$.
   (b) Justifier alors que $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

B. Étude d'une suite de fonctions

1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1-(1-t^2)^n}{t^2}$ est intégrable sur $]0,1]$. Dans la suite, on considère les fonctions u_n et v_n définies, pour tout entier $n \geqslant 1$, par

$$v_n(0) = u_n(0) = 0\ ;\ v_n(x) = \int_0^x \frac{1-(1-t^2)^n}{t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad u_n(x) = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} v_n(x) \quad \text{si } x \in]0,1].$$

2. Étude de la suite $(v_n(1))_{n\geqslant 1}$
   (a) Montrer que pour tout entier $p \geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^p \,\mathrm{d}t = I_{2p+1}$.
   (b) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n(1) = \displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} I_{2p+1}$.
   (c) Montrer alors que $v_n(1) \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\displaystyle\int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ puis justifier que $v_n(1) \sim \sqrt{n\pi}$.
3. Étude de la suite $(u_n(1))_{n\geqslant 1}$
   (a) Montrer que $\dfrac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} = \dfrac{2}{\pi} I_{2n}$.
   (b) En déduire un équivalent de $\dfrac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$ et préciser la constante C de la question **B.**3(b) de la première partie.
   (c) Montrer alors que la suite $(u_n(1))_{n\geqslant 1}$ converge vers 1.
4. Soit $a \in]0,1[$.
   (a) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, la restriction de la fonction u_n au segment $[a,1]$ est k_n-lipschitzienne avec $k_n = \dfrac{\binom{2n}{n}}{a^2 2^{2n}}$.
   (b) En utilisant ce qui précède et le fait que la suite $(u_n(1))_{n\geqslant 1}$ converge vers 1, montrer que la suite de fonctions $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers 1 sur le segment $[a,1]$.
5. (a) Justifier que pour tout entier $n \geqslant 1$, la fonction u_n est croissante sur le segment $[0,1]$.

(b) En déduire qu'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times [0,1], \quad 0 \leqslant u_n(x) \leqslant M.$$

C. D'autres suites de polynômes approchant uniformément la valeur absolue sur $[-1,1]$

On considère la suite $(P_n)_{n\geqslant 1}$ des polynômes suivants :

$$P_n = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{1}{2k-1} X^{2k}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

1. Montrer que pour tout $(n,x) \in \mathbb{N}^* \times [0,1]$, $P_n(x) = x u_n(x)$.
2. Déduire des questions 4. et 5. de la section précédente que la suite $(P_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers la valeur absolue sur le segment $[-1,1]$; on remarquera que les polynômes P_n sont pairs et on choisira convenablement le a de la question 4.
3. On pose $Q_n = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{2k}{2k-1} X^{2k}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la suite $(Q_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers la valeur absolue sur $[-1,1]$.
4. Montrer de même que les suites $(\widetilde{P}_n)_{n\geqslant 1}$ et $(\widetilde{Q}_n)_{n\geqslant 1}$ convergent vers la valeur absolue sur le segment $[-1,1]$, où

$$\widetilde{P}_n = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{1}{2k-1} X^{2k} \quad \text{et} \quad \widetilde{Q}_n = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{2k}{2k-1} X^{2k}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

FIN DE L'ÉPREUVE