

Partie I

(1) L'application $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$ pour tout réel x .

(a) On a : $t^{x-1}e^{-t} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{x-1}$, donc $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0, 1[$ si, et seulement si $1 - x < 1$ soit $x > 0$.

(b) On a aussi $t^{x-1}e^{-t} = O_{t \rightarrow +\infty}(\frac{1}{t^2})$, donc $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

(2) L'application $t \mapsto t^{x-1}e^{-t} = e^{-t}e^{(z-1)\ln(t)}$ est continue sur $]0, +\infty[$, et que pour tout $t > 0$, $|e^{-t}t^{z-1}| = e^{-t}t^{\Re(z)-1}$, donc par la question 1°), l'application $t \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $\Re(z) > 0$.

(3) Quelques formules utiles :

(a) Les applications $t \mapsto t^z$ et $t \mapsto e^{-t}$ sont de classes C^1 sur $]0, +\infty[$ et que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(z) > 0$, on a : $|e^{-t}t^z| = e^{-t}t^{\Re(z)-1} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$. On applique alors une intégration par parties à l'intégrale

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} t^z e^{-z-1} dt :$$

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} t^z e^{-z-1} dt = [-e^{-t}t^z]_{t=0}^{+\infty} + z \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = z\Gamma(z) \text{ pour tout } z \text{ tel que } \Re(z) > 0$$

(b) Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(z) > 0$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\Gamma(z+p) = \Gamma((z+p-1)+1) = (z+p-1)\Gamma(z+p-1).$$

$$\text{D'où : } \prod_{k=1}^p \Gamma(z+k) = \prod_{k=1}^p (z-k-1)\Gamma(z-k-1) = \prod_{k=1}^{p-1} (z-k) \prod_{k=1}^{p-1} \Gamma(z-k) \text{ et par suite :}$$

$$\Gamma(z+p) = \prod_{k=1}^{p-1} (z-k)\Gamma(z)$$

On prend $z = \alpha + 1$, on a : $\Re(z) = \Re(\alpha + 1) = \Re(\alpha) + 1 > 0$ et par suite

$$\Gamma(\alpha + 1 + p) = \gamma(\alpha + 1) \prod_{k=1}^{p-1} (\alpha + 1 + k) = \Gamma(\alpha + 1)(\alpha + 1)\dots(\alpha + p)$$

(c) Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue et strictement positive, donc $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t} dt > 0$.

(d) Par un simple calcul, on a $\Gamma(1) = 1$ et par b) pour $\alpha = 0, p = n$, on a :

$$\Gamma(n+1) = \prod_{k=1}^n k = n!$$

(4) Développement en série de Γ .

(a) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(z) > 0$, on a : $\Gamma(z) = \int_{]0,1[} t^{z-1}e^{-t} dt + \int_{[1,+\infty[} t^{x-1}e^{-t} dt$

$$\text{Ecrivons } e^{-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^n, \text{ on a alors : } t^{z-1}e^{-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{z+n-1}$$

Si l'on pose $f_n(t) = \frac{(-1)^n}{n!} t^{z+n-1}$ pour $t \in]0, 1[$, on a : f_n est intégrable sur $]0, 1[$ pour tout entier naturel n et que $\int_{]0,1[} |f_n(t)| dt \leq \int_{]0,1[} \frac{1}{n!} dt = \frac{1}{n!}$ et puisque la série $\sum \frac{1}{n!}$ converge, il en résulte par le théorème d'intégration terme à terme que

$$\int_0^1 t^{z-1}e^{-t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 t^{z+n-1} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n}$$

(b) Posons $f_n(z) = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}\mathbb{Z}^-$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $\mathbb{C}\mathbb{Z}^-$ (fraction rationnelle en z)

pour tout $z \in \mathbb{C}\mathbb{Z}^-$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $|f_n(z)| = \frac{1}{n!} \frac{1}{|n+z|} \leq \frac{1}{n!} \frac{1}{|n+\Re(z)|}$ car $|n+\Re(z)| \leq |n+z|$, donc

$\sum f_n(z)$ converge absolument et par suite $\sum f_n$

converge simplement sur $\mathbb{C}\mathbb{Z}^-$.

Soit K un compact incluant dans $\mathbb{C}\mathbb{Z}^-$, et $\alpha = d(\mathbb{Z}^-, K)$, on a $\alpha > 0$ car \mathbb{Z}^- fermé et K compact. On a alors

pour tout $z \in K$, et tout $n \in \mathbb{N}$, $|n+z| = d(-n, z) \geq \alpha$, donc $|f_n(z)| \leq \frac{1}{n!} \frac{1}{|n+z|} \leq \frac{1}{n!} \frac{1}{\alpha}$. Comme la série $\sum \frac{1}{n!}$ converge, il en résulte que $\sum f_n$ converge localement uniformément sur $\mathbb{C}\mathbb{Z}^-$, donc par le théorème de continuité la fonction somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $\mathbb{C}\mathbb{Z}^-$.

On peut aussi montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue en tout point z_0 de $\mathbb{C}\mathbb{Z}^-$ en effet : Comme $\mathbb{C}\mathbb{Z}^-$ est un ouvert, on a pour tout $z_0 \in \mathbb{C}\mathbb{Z}^-$, il existe $r > 0$ tel $B(z_0, r) \subset \mathbb{C}\mathbb{Z}^-$, on prend alors le compact $K = \overline{B}(z_0, \alpha)$ et on termine comme avant.

(5) Soit $0 < a < b$ et $t > 0$, on a : $t^{a-1} = e^{(a-1)\ln(t)}$.

(a) Si $t \in]0, 1[$, alors $\ln(t) \leq 0$, donc $(a-1)\ln(t) \geq (b-1)\ln(t)$ et comme $x \mapsto e^x$ est croissante, on déduit que $t^{a-1} \geq t^{b-1}$. Soit $\max(t^{a-1}, t^{b-1}) = t^{a-1}$.

Si $t > 1$, alors $\ln(t) > 0$, donc $t^{a-1} < t^{b-1}$ et par suite $\max(t^{a-1}, t^{b-1}) = t^{b-1}$.

Conclusion finale : Pour tous $0 < a < b$ et $t > 0$, on a :

$$\max(t^{a-1}, t^{b-1}) \leq t^{a-1} + t^{b-1}.$$

(b) Pour $t \in]0, 1[$, on a d'après a) $0 < t^{x-1} \leq \max(t^{x-1}, t^{a-1}) = t^{a-1} = \max(t^{a-1}, t^{b-1})$ de même si $t > 1$, on a : $0 < t^{x-1} \leq \max(t^{x-1}, t^{b-1}) = t^{b-1} = \max(t^{a-1}, t^{b-1})$

En conclusion : $0 < t^{x-1} \leq \max(t^{a-1}, t^{b-1})$ pour tout $t \in]0, +\infty[$

(c) La fonction $f : (x, t) \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$

L'application $x \mapsto t^{x-1}e^{-t} = e^{-t}e^{(x-1)\ln(t)}$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* et $\frac{d}{dx}f(x, t) = \ln(t)f(x, t)$ pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

De plus pour tout compact $K = [a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$ et tout $(x, t) \in K \times \mathbb{R}_+^*$, on a : $|\frac{d}{dx}f(x, t)| \leq |\ln(t)|e^{-t}t^{x-1} \leq |\ln(t)|e^{-t}\max(t^{a-1}, t^{b-1}) \leq |\ln(t)|e^{-t}(t^{a-1} + t^{b-1})$ et que la fonction $\varphi : t \mapsto |\ln(t)|e^{-t}(t^{a-1} + t^{b-1})$ est intégrable sur \mathbb{R}_+^* car $\sqrt{t}\varphi(t) = \sqrt{t}(t^{a-1} + t^{b-1})e^{-t}|\ln(t)| \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$. Pour $t \geq 1$, $\varphi(t) \leq (t^{a-1} + t^{b-1})te^{-t} = (t^a + t^b)e^{-t}$.

Donc par le théorème de dérivation sous le signe intégral, il en résulte que Γ est de classe C^1 sur l'ouvert \mathbb{R}_+^* et que

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dx}f(x, t)dt = \int_0^{+\infty} \ln(t)t^{x-1}e^{-t}dt.$$

(d) On a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$, et comme Γ est continue en 1, on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \Gamma(x+1) = \Gamma(1) = 1$, donc

$$\Gamma(x) \sim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$$

Partie II :

$$\lambda > 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad y_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+\alpha}$$

(1) $a_0 \neq 0$ et y_α est solution sur $]0, R[$ de l'équation (F_λ) .

L'application $x \mapsto x^\alpha$ est de classe C^∞ sur \mathbb{R}_+^* et que $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]0, R[$ (somme d'une série entière), donc y_α est de classe C^∞ sur $]0, R[$ (produit de fonctions de classes C^∞).

Par calculs : $y'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + x^\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha + n) a_n x^{\alpha+n-1}$

$$y''_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha + n)(\alpha + n - 1) a_n x^{\alpha+n-2}$$

Donc

$$\begin{aligned} y_\alpha \text{ est solution sur }]0, R[\text{ de } (F_\lambda) &\Leftrightarrow \forall x \in]0, R[, \quad -(x^2 + \lambda) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{\alpha+n} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha + n) a_n x^{\alpha+n} + \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha + n)(\alpha + n - 1) a_n x^{\alpha+n} = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in]0, R[\\ &\quad \sum_{n=0}^{+\infty} ((n + \alpha)^2 - \lambda^2) a_n x^{\alpha+n} - \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^{\alpha+n} = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in]0, R[\\ &\quad \sum_{n=0}^{+\infty} ((n + \alpha)^2 - \lambda^2) a_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n = 0 \text{ car } x^\alpha \neq 0 \end{aligned}$$

On fait tendre x vers 0^+ , obtenir $\alpha^2 - \lambda^2 = 0$ car $a_0 \neq 0$ et puis $((\alpha + 1)^2 - \lambda^2) a_1 = 0$ et une récurrence $((\alpha + n)^2 - \lambda^2) a_n = a_{n-2}$.

(2) $\alpha = \lambda$, $a_0 \neq 0$ et y_λ est solution sur $]0, R[$ de (F_λ) .

(a) On a : $y_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\lambda+n} = x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. On sait que (1) $((\lambda+n)^2 - \lambda^2)a_n = a_{n-2}$ pour tout $n \geq 2$

Puisque $(\lambda+1)^2 - \lambda^2 \neq 0$, on a $a_1 = 0$ et par la relation (1), on a : $a_{2p+1} = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$

et $a_{2p} = \frac{1}{(\lambda+2p)^2 - \lambda^2} a_{2(p-1)}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. Donc $\prod_{k=1}^p a_{2k} = \prod_{k=1}^p \frac{1}{(\lambda+2k)^2 - \lambda^2} \prod_{k=1}^p a_{2(k-1)} = \prod_{k=1}^p \frac{1}{(\lambda+2k)^2 - \lambda^2} \prod_{k=0}^{p-1} a_{2k}$ soit : $a_{2p} = \prod_{k=1}^p \frac{1}{(\lambda+2k)^2 - \lambda^2} a_0$.

Mais $(\lambda+2k)^2 - \lambda^2 = 4\lambda k + 4k^2 = 4k(\lambda+k)$, d'où $\prod_{k=1}^p \frac{1}{(\lambda+2k)^2 - \lambda^2} = \prod_{k=1}^p \frac{1}{4k(\lambda+k)} = \frac{1}{4^p p!} \prod_{k=1}^p \frac{1}{\lambda+k} =$

$$\frac{1}{2^{2p} p!} \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+p+1)}.$$

En conclusion :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad a_{2p} = \frac{a_0}{2^{2p} p!} \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+p+1)}$$

(b) Pour $x > 0$, on a : $\left| \frac{a_{2p} x^{2p}}{a_{2(p-1)} x^{2(p-1)}} \right| = \frac{a_{2p}}{a_{2(p-1)}} x^2 = \frac{1}{(\lambda+2p)^2 + \lambda^2} x^2 \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$, donc le rayon de convergence R est infini.

(c) On suppose $a_0 2^\lambda \Gamma(\lambda+1) = 1$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \forall x > 0, \quad y_\lambda(x) &= \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p} x^{2p+\lambda} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{a_0}{2^{2p} p!} \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+p+1)} x^{2p+\lambda} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{a_0}{p!} \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+\lambda} 2^\lambda \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} \frac{1}{\Gamma(\lambda+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+\lambda} \text{ car } a_0 2^\lambda \Gamma(\lambda+1) = 1. \end{aligned}$$

Equivalent au voisinage de 0 :

D'après les propriétés des séries entières, on a :

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \frac{1}{\Gamma(\lambda+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}$$

Donc

$$y_\lambda(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda$$

(3) On suppose ici que $2\lambda \notin \mathbb{N}$.

(a) D'après la question 1 et 2) la fonction $y_{-\lambda}$ est aussi solution sur \mathbb{R}_+^* de (F_λ) .

(b) Montrons $(y_\lambda, y_{-\lambda})$ est un système fondamental de solutions sur \mathbb{R}_+^* de (F_λ) .

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha y_\lambda + \beta y_{-\lambda} = 0$.

Comme $y_\lambda(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda$ et $y_{-\lambda}(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{\Gamma(-\lambda+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\lambda}$, on a : $y_\lambda(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ et $y_{-\lambda}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$,

donc si l'on suppose $\alpha \neq 0$, alors en faisant tendre x vers 0, on aboutit à une contradiction.

On conclut que $\alpha = 0$ et puis $\beta = 0$, donc les solutions y_λ et $y_{-\lambda}$ sont linéairement indépendantes.

(F_λ) est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients continus et sans second membre, son ensemble de solutions est donc un espace vectoriel réel de dimension deux. En conséquence : $(y_\lambda, y_{-\lambda})$ est un système fondamental de solutions de (F_λ) et que toute solution sur \mathbb{R}_+^* de (F_λ) est de la forme :

$$y = \alpha y_\lambda + \beta y_{-\lambda} \quad \text{où} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Partie III.

A- Etude de (F_0) :

Pour $x > 0$, on a : $y_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2^n n!)^2} x^{2n}$.

(1) .

(a) Pour tout entier $k \geq 1$: $\prod_{k=1}^p a_{2k}(\alpha) = \prod_{k=1}^p \frac{1}{(\alpha+2k)^2} \prod_{k=1}^p a_{2(k-1)}$, donc $a_{2p}(\alpha) = \prod_{k=1}^p \frac{1}{(\alpha+2k)^2} a_0(\alpha)$.

Or $a_0(\alpha) = 1$, d'où la formule cherchée :

$$a_{2p}(\alpha) = \prod_{k=1}^p \frac{1}{(\alpha+2k)^2} \text{ pour tout } p \geq 1.$$

(b) D'après les notations de l'énoncé, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a : $a_{2p}(\alpha) = \exp\left(\sum_{k=1}^p \ln\left(\frac{1}{(\alpha + 2k)^2}\right)\right) = \exp\left(-2 \sum_{k=1}^p \ln(\alpha + 2k)\right)$, donc : $a'_{2p}(\alpha) = -\sum_{k=1}^p \frac{2}{\alpha + 2k} a_{2p}(\alpha)$ et puis $a'_{2p}(0) = -2 \sum_{k=1}^p \frac{1}{2k} a_{2p}(0) = -\sum_{k=1}^p \frac{1}{k} a_{2p}(0) = -H_p \cdot a_{2p}(0)$

Or $a_{2p}(0) = \prod_{k=1}^p \frac{1}{(2k)^2} = \frac{1}{2^{2p}(p!)^2} = \left(\frac{1}{2^p p!}\right)^2$, donc :

$$b_p = a'_{2p}(0) = -\left(\frac{1}{2^p p!}\right)^2 H_p$$

(c) Calcul du rayon de convergence R_b :

On a $b_p \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{(2^p p!)^2} \ln(p) = o\left(\frac{1}{2^p p!}\right)$ car $H_p \sim \ln(p)$, donc le rayon de convergence de la série entière $\sum b_p x^p$ est infini :

$$R_b = +\infty$$

(2) .

(a) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a : $(2p)^2 b_p + 4pa_{2p}(0) = -(2p)^2 a_{2p}(0) + 4pa_p(0)$.
 $= a_{2p}(0) (-(2p)^2 H_p + 4p)$

Mais $(2p)^2 a_{2p}(0) = a_{2(p-1)}(0)$, donc :

$$\begin{aligned} (2p)^2 b_p + 4pa_{2p}(0) &= -a_{2p}(0)H_p + 4pa_{2p}(0) \\ &= -a_{2(p-1)}(0)H_{p-1} - \underbrace{\frac{1}{p} a_{2(p-1)}(0) + 4pa_{2p}(0)}_{=0} \\ &= b_{p-1} \end{aligned}$$

D'où le résultat demandé .

(b) L'application $x \mapsto y_0(x) \ln(x)$ est de classe C^∞ sur \mathbb{R}_+^* (Opérations), donc z_0 est de classe C^∞ sur \mathbb{R}_+^* . Pour tout $x > 0$, on a :

$$z_0(x) = y_0(x) \ln(x) + \sum_{p=1}^{\infty} b_p x^{2p}$$

$$z'_0(x) = \frac{1}{x} y_0(x) + \ln(x) \cdot y'_0(x) + 2 \sum_{p=1}^{\infty} p b_p x^{2p-1}$$

$$z''_0(x) = -\frac{1}{x^2} y_0(x) + \frac{2}{x} y'_0(x) + \ln(x) \cdot y''_0(x) + 2 \sum_{p=1}^{\infty} p(2p-1) b_p x^{2p-2}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } x^2 z''_0(x) + x z'_0(x) - (x^2 + 0) z_0(x) &= -y_0(x) + 2x y'_0(x) + \ln(x) \cdot x^2 y''_0(x) + \sum_{p=1}^{\infty} 2p(2p-1) b_p x^{2p} \\ &\quad + y_0(x) + \ln(x) \cdot x y'_0(x) + \sum_{p=1}^{\infty} b_p 2p x^{2p} \\ &\quad - x^2 \ln(x) y_0(x) - \sum_{p=1}^{\infty} b_p x^{2p+2} \end{aligned}$$

En tenant compte du fait que y_0 est solution sur \mathbb{R}_+^* de (F_0) et de la question précédente, il vient :

$$\begin{aligned} x^2 z''_0(x) + x z'_0(x) - (x^2 + 0) z_0(x) &= 2x y'_0(x) + \sum_{p=1}^{\infty} b_p (2p)^2 x^{2p} - \sum_{p=1}^{\infty} b_p x^{2p+2} \\ &= \underbrace{\sum_{p=1}^{\infty} 4pa_{2p}(0) x^{2p} + \sum_{p=1}^{\infty} b_p (2p)^2 x^{2p} - \sum_{p=1}^{\infty} b_p x^{2p+2}}_{\sum_{p=1}^{\infty} b_{p-1} x^{2p}} \\ &\quad \text{car } x y'_0(x) = \sum_{p=1}^{\infty} 2p a_{2p}(0) x^{2p} \\ &= b_0 x^2 = 0 \end{aligned}$$

Ce qui permet de conclure .

(3) Comme $y_0(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{\Gamma(0+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^0 = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{p=1}^{\infty} b_p x^{2p} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$, on a :

$$z_0(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \ln(x).$$

ceci permet de prouver (comme à la question II 3.b) que les solutions y_0 et z_0 sur \mathbb{R}_+^* de (F_0) sont linéairement indépendantes .et avec les mêmes raisons que dans III.3b), toute solution de (F_0) est de la forme :

$y = \alpha y_0 + \beta z_0$ où α, β sont des constantes réelles arbitraires .

B- Etude de (F_1) :

(1) .

- (a) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a : $c_{2p}(\alpha) = \frac{1}{(\alpha + 2p)^2 - 1} c_{2(p-1)}$, donc $\prod_{k=1}^p c_{2k}(\alpha) = \prod_{k=1}^p \frac{1}{(\alpha + 2k)^2 - 1} \prod_{k=1}^p c_{2(k-1)}$ et par suite $c_{2p}(\alpha) = \prod_{k=1}^p \frac{1}{(\alpha + 2k)^2 - 1} c_0(\alpha)$.
et comme $c_0(\alpha) = 1$, on déduit que :

$$c_{2p}(\alpha) = \prod_{k=1}^p \frac{1}{(\alpha + 2k)^2 - 1}$$

- (b) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $d_p = \frac{d}{d\alpha} c_{2p}(1)$. Comme $c_{2p}(\alpha) = \exp(-\sum_{k=1}^p \ln((\alpha + 2k)^2 - 1))$, on a : $c'_{2p}(\alpha) = -\sum_{k=1}^p \frac{2(\alpha + 2k)}{(\alpha + 2k)^2 - 1} c_{2p}(\alpha)$. D'où

$$d_p = -\sum_{k=1}^p \frac{2(1+2k)}{(1+2k)^2 - 1} \prod_{k=1}^p \frac{1}{(\alpha + 2k)^2 - 1} = -\sum_{k=1}^p \frac{2(1+2k)}{4k(1+k)} \prod_{k=1}^p \frac{1}{(1+2k)^2 - 1}.$$

$$\text{Or } \prod_{k=1}^p \frac{1}{(1+2k)^2 - 1} = \prod_{k=1}^p \frac{1}{4k(1+k)} = \frac{1}{2^{2p}} \prod_{k=1}^p \frac{1}{k(1+k)} = \frac{1}{2^{2p}} \frac{1}{p!(p+1)!},$$

et

$$\frac{2(1+2k)}{4k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \right)$$

$$\text{donc } \sum_{k=1}^p \frac{2(1+2k)}{4k(k+1)} = \frac{1}{2} (H_p + H_{p+1} - 1). \text{ D'où le résultat demandé :}$$

$$d_p = \frac{1}{2^{2p+1} p!(p+1)} (H_p + H_{p+1} - 1)$$

- (c) On a :

$$d_p = \frac{1}{2^{2p+1} p!(p+1)} (H_p + H_{p+1} - 1) = \frac{1}{2^{2p+1} p!(p+1)!} (2H_p + \frac{1}{p+1} - 1) \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2^{2p}} \frac{1}{p!(p+1)!} \ln(p), \text{ donc le rayon de convergence demandé :}$$

$$R_d = +\infty$$

(2) .

- (a) On a : Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $((1+2p)^2 - 1) d_p + 2(1+2p)c_{2p}(1) = d_{p-1}$. En effet :
par dérivation de l'identité $c_{2p}(\alpha) ((1+2p)^2 - 1) = c_{2(p-1)}(\alpha)$, on a : $c'_{2p}(\alpha) ((\alpha + 2p)^2 - 1) + 2(\alpha + 2p)c_{2p}(\alpha) = c'_{2(p-1)}(\alpha)$
Pour $\alpha = 1$, on a :

$$d_p((1+2p)^2 - 1) + 2(1+2p)c_{2p}(1) = d_{p-1}$$

- (b) Il est clair que les fonctions y_1 et $x \mapsto \sum_{p=1}^{\infty} d_p x^{2p+1}$ sont de classe C^∞ sur \mathbb{R}_+^* et par dérivation on obtient pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} x^2 u_1''(x) + x u_1'(x) - (1+x^2) u_1(x) &= x^2 \left(2y_1'(x) \ln(x) + \frac{4}{x} y_1'(x) - \frac{2}{x^2} y_1(x) + \sum_{p=1}^{\infty} 2p(2p+1) d_p x^{2p-1} \right) \\ &\quad + x \left(2y_1'(x) \ln(x) + \frac{2}{x} y_1(x) + \sum_{p=1}^{\infty} (2p+1) d_p x^{2p} \right) \\ &\quad - (1+x^2) \left(2y_1(x) \ln(x) + \sum_{p=0}^{\infty} d_p x^{2p+1} \right) \\ &= 2 \ln(x) (x^2 y_1''(x) + x y_1'(x) - (1+x^2) y_1(x)) + 4x y_1'(x) \\ &\quad + \sum_{p=0}^{\infty} (2p+1)^2 d_p x^{2p+1} - (1+x^2) \sum_{p=0}^{\infty} d_p x^{2p+1} \end{aligned}$$

Comme y_1 est solution sur \mathbb{R}_+^* de (F_1) , on a : $x^2 y_1''(x) + x y_1'(x) - (1+x^2) y_1(x) = 0$ et donc
CNCMath1_2007.tex - page 5

$$\begin{aligned}
x^2 u_1''(x) + x u_1'(x) - (1 + x^2) u_1(x) &= 4x y_1'(x) + \sum_{p=0}^{\infty} (2p+1)^2 d_p x^{2p+1} - (1+x^2) \sum_{p=0}^{\infty} d_p x^{2p+1} \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{4(2p+1)}{p!(p+1)!2^{2p+1}} x^{2p+1} + \sum_{p=0}^{\infty} (2p+1)^2 - 1) d_p x^{2p+1} \\
&\quad - \sum_{p=0}^{\infty} d_p x^{2(p+1)+1}, \quad d_0 = 0 \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{p!(p+1)!2^{2p}}}_{=c_{2p}(1)} \frac{4(2p+1)}{2} x^{2p+1} \\
&\quad + \sum_{p=0}^{\infty} (2p+1)^2 - 1) d_p x^{2p+1} - \sum_{p=1}^{\infty} d_{p-1} x^{2p+1} \\
&= \sum_{p=1}^{\infty} \underbrace{(2(2p+1)c_{2p}(1) + ((2p+1)^2 - 1)d_p - d_{p-1})}_{=0} x^{2p+1} + 2x \\
&= 2x
\end{aligned}$$

On déduit alors que u_1 est bien solution sur \mathbb{R}_+^* de (E_1) .

(3) .

(a) On pose $u_1(x) = \frac{e_0}{x} + \sum_{p=1}^{\infty} e_p x^{p-1}$ avec $R = Rcv(\sum_{p \geq 1} e_p x^{p-1}) > 0$.

$$\text{Sur }]0, R[, \text{ on a : } x^2 u_1''(x) + x u_1'(x) - (1 + x^2) u_1(x) - 2x = x^2 \left(\frac{2e_0}{x^3} + \sum_{p=1}^{\infty} (p-1)(p-2) e_p x^{p-2} \right) +$$

$$x \left(\frac{-e_0}{x^2} + \sum_{p=1}^{\infty} (p-1) e_p x^{p-2} \right) - 2x = \sum_{p=0}^{\infty} (p(p-1) e_p - e_{p-2}) x^{p-1} - (e_0 + 2)x - e_1 = 0. \text{ comme dans la question}$$

$$\dots, \text{ on déduit : } \begin{cases} e_0 = -2 \\ e_1 = 0 \\ \forall p \geq 3, p(p-2) e_p - e_{p-2} = 0 \end{cases}, \text{ ce qui permet de conclure par une récurrence que : } \forall p \in \mathbb{N},$$

$e_{2p+1} = 0$ et $e_{2p} = \frac{e_0}{2^{2p} p!(p+1)!} = -2c_{2p}(1)$ car $e_0 = -2$ et par suite R est infini et que u_1 est solution sur \mathbb{R}_+^* de (E_1) .

(b) (F_1) est une équation différentielle linéaire sans second membre associée à (E_1) et comme z_1 et u_1 sont solutions sur \mathbb{R}_+^* de (E_1) , il en résulte que $z_1 - u_1$ est solution sur \mathbb{R}_+^* de (F_1) .

(4) Comme dans la question....., en étudiant le comportement des solutions z_1 et y_1 au voisinage de 0^+ , on déduit que (y_1, z_1) est système fondamental de solutions sur \mathbb{R}_+^* de (F_1) , donc toute solution sur \mathbb{R}_+^* de (F_1) est de la forme : $y : x \mapsto \alpha y_1(x) + \beta z_1(x)$ où α et β sont des constantes réelles arbitraires .