Mr Mamouni : *myismail@altern.org*
PCSI-CPGE Med V
Casablanca-Maroc

CORRIGÉ

PRÉLIMINAIRES

1) a) On a $A=\sum_{1\le k,l\le n} a_{k,l}E_{k,l}$, donc :

$$\begin{aligned} AE_{i,j} &= \sum_{1\le k,l\le n} a_{k,l}E_{k,l}E_{i,j} \\ &= \sum_{1\le k,l\le n} a_{k,l}\delta_{l,i}E_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}E_{k,j} \quad \text{car : } \delta_{l,i} \begin{array}{l} = 0 \text{ si } l\neq i \\ = 1 \text{ si } l=i \end{array} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{i,j}A &= \sum_{1\le k,l\le n} a_{k,l}E_{i,j}E_{k,l} \\ &= \sum_{1\le k,l\le n} a_{k,l}\delta_{k,j}E_{i,l} \\ &= \sum_{l=1}^{n} a_{j,l}E_{i,l} \quad \text{car : } \delta_{k,j} \begin{array}{l} = 0 \text{ si } k\neq j \\ = 1 \text{ si } k=j \end{array} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{j,k}E_{i,k} \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} AM = MA &\Longrightarrow AM - MA = 0 \\ &\Longrightarrow AE_{i,j} = E_{i,j}A \\ &\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}E_{k,j} - a_{j,k}E_{i,k} = 0 \\ &\Longrightarrow \sum_{k\neq i,j}^{n} a_{k,i}E_{k,j} - a_{j,k}E_{i,k} + \\ &\quad a_{i,i}E_{i,j} - a_{j,i}E_{i,i} + a_{j,i}E_{i,j} - a_{j,j}E_{i,j} = 0 \\ &\Longrightarrow \sum_{k\neq i,j}^{n} a_{k,i}E_{k,j} - a_{j,k}E_{i,k} + (a_{i,i} - a_{j,j})E_{i,j} = 0 \end{aligned}$$

Ainsi $a_{k,i} = a_{j,k} = 0$ si $k \neq i, j$ et $a_{i,i} = a_{j,j} = \lambda$, d'où $M = \lambda I_n$

2) a) On sait que la trace est linéaire et que : $Tr(E_{k,j}) \begin{array}{l} = 0 \text{ si } k \neq j \\ = 1 \text{ si } k = j \end{array}$,

donc $Tr(AE_{i,j}) = Tr\left(\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}E_{k,j}\right) = a_{j,i}$.

b) $Tr(AM) = 0 \Longrightarrow Tr(AE_{i,j}) = 0,\ \forall i,j \Longrightarrow a_{j,i},\ \forall i,j \Longrightarrow A = 0$.

3) Posons $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j}), AB = (c_{i,j}), BA = (d_{i,j})$, on a : $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}$ et $Tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,i}$ et on a aussi : $Tr(BA) = \sum_{i=1}^{n} d_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{i,k}a_{k,i}$, en échangeant les indices i et k, on voit bien que : $Tr(AB) = Tr(BA)$.

4) D'aprés le cours, toute composé à droite ou à gauche par un automorphisme laisse invariant le rang, donc toute multiplication à gauche ou à droite par une matrice inversible laisse le rang invariant, d'où $rg(PMQ) = rg(M)$ et $rg(P^tMQ) = rg({}^tM) = rg(M)$

PREMIŔE PARTIE

A. Étude des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui conservent le déterminant.

1) Posons $\lambda J_s + A = (b_{i,j})$, on a $b_{i,i} = \lambda_{i,i} + a_{i,i}$ si $1 \leq i \leq s$ et $b_{i,j} = a_{i,j}$ dans les cas restants. $\det(\lambda J_s + A) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\prod_{i=1}^{n} \varepsilon(\sigma)b_{i,\sigma(i)}$, or parmi les $b_{i,\sigma(i)}$, au maximum s coefficients dépondent de λ ceux pour lesquels $1 \leq i \leq s$ et $i = \sigma(i)$, donc $\det(\lambda J_s + A) = P(\lambda)$ où P est un polynôme en λ de degré inférieur à s.

2) a) C'est un résultat du cours, qui te dit que toute matrice de rang, r est équivalente à la matrice J_r.

b) $\det(\lambda M + N) = \det(R(\lambda J_r + K_r)S) = \det(R[(\lambda - 1)J_r + I_n]S) = \det(R)\det((\lambda-1)J_r + I_n)\det(S) = \det(R)(\lambda-1)^r\det(S)$, parceque $(\lambda - 1)J_r + I_n$ est la matrice diagonale dont les r premiers termes sont tous égaux à $\lambda - 1$ et les autres égaux à 1.

c) $rg(\Phi(M)) = s$, donc $\exists R, S$ matrices inversibles telles que : $\Phi(M) = RJ_sS$, d'où $\det(\lambda\Phi(M) + \Phi(N)) = \det(\lambda RJ_sS + \Phi(N)) = \det(R)\det(\lambda J_s + A)\det(S)$ avec $A = R^{-1}\Phi(N)S^{-1}$, or $\det(\lambda J_s + A) = P(\lambda)$ où P est un polynôme en λ de degré inférieur à s, d'où $\det(\lambda\Phi(M) + \Phi(N))$ est un polynôme en λ de degré inférieur à s.
D'autre part : Φ est linéaire et conserve le déterminant, donc $\det(\lambda\Phi(M)+\Phi(N)) = \det(\lambda M+N) = \det(R)(\lambda-1)^r\det(S)$, d'aprés la question précédente, c'est un donc un polynôme en λ de degré égal à r, d'où $r \leq s$.

3) $M \in Ker(\Phi) \Longrightarrow \Phi(M) = 0 \Longrightarrow rg(\Phi(M)) = 0 \Longrightarrow rg(M) = 0$ car $rg(\Phi(M)) \leq rg(M)$, donc $M = 0$, d'où Φ injective, comme c'est un endomorphisme en dimension finie alors c'est un automorphisme donc inversible.

4) Φ conserve le déterminant, donc $\det(M) = \det(\Phi(\Phi^{-1}(M))) = \det(\Phi^{-1}(M))$, donc Φ^{-1} conserve le déterminant.

5) On sait que, $rg(M) = \max\{\det(A) \text{ tel que } A \text{ sous-matrice de } M\}$, donc $rg(\Phi(M)) = \max\{\det(B) \text{ tel que } B = \Phi^{-1}(A) \text{ sous-matrice de } M\}$ car Φ^{-1} conserve le déterminant, d'où $rg(\Phi(M)) \leq rg(M)$ car $\{\det(B) \text{ tel que } B = \Phi^{-1}(A) \text{ sous-matrice de } M\} \subset \{\det(A) \text{ tel que } A \text{ sous-matrice de } M\}$ or $rg(M) \leq rg(\Phi(M))$ d'aprés la question précédente, d'où l'égalite, et donc Φ conserve le rang.
D'aprés la supposition au début de la 1ère partie, on conclut que : $\Phi = u_{P,Q}$ ou $\Phi = v_{P,Q}$.

B. Étude des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui conservent le polynôme caractéristique.

1) On sait que les valeurs propres d'une matrice sont exactement les racines de son polynôme caractéristique associé, que son déterminant est égal à leurs produit et que sa trace est égale à leurs somme, comptées avec leurs multiplicités. Donc deux matrices qui ont même polynôme caractéristique ont même déterminant et même trace, en particulier Φ conserve le déterminant et la trace.

2) C'est une conséquence immediate de la propriété admise au début de la 1ère partie.

3) a) Si $\Phi = u_{P,Q}$, alors $Tr\,(PE_{i,j}Q) = Tr\,(\Phi(E_{i,j})) = Tr(E_{i,j})$ car Φ conserve la trace.
Si $\Phi = u_{P,Q}$, alors $Tr\,(PE_{i,j}Q) = Tr\,(\Phi({}^tE_{i,j})) = Tr({}^tE_{i,j}) = Tr(E_{i,j})$.

b) On a $Tr(AB) = Tr(BA)$, qu'on peut généraliser ainsi :
$Tr(ABC) = Tr(CAB)$, en particulier :
$Tr(QPE_{i,j}) = Tr(PE_{i,j}Q) = Tr(E_{i,j})$, or la trace est linéaire et $(E_{i,j})$ constitue une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donc $Tr(QPM) = Tr(M)$, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, d'où $Tr((QP - I_n)M) = 0$, d'aprés la question 2.b) 1ère partie, on déduit que $PQ = I_n$, d'où $Q = P^{-1}$.

4) D'aprés tout ce qui précède on conclut que les endomorphismes qui conservent le polynôme caractéristique sont ceux de la forme $u_{P,Q}$ ou $v_{P,Q}$ tel que $Q = P^{-1}$.

DEUXIÉME PARTIE

1) a) On a $\chi_{\Phi(A)\Phi(B)} = \chi_{AB}$, donc d'aprés la question 1.B), 1ère partie, $\Phi(A)\Phi(B)$ et AB ont même trace, en particulier $Tr(\Phi(E_{i,j})\Phi(E_{k,l})) = Tr(E_{i,j}E_{k,l}) = Tr(\delta_{j,k}E_{i,l}) = \delta_{j,k}Tr(E_{i,l}) = \delta_{j,k}\delta_{i,l}$.

b) On a $\text{Card}(\Phi(E_{i,j})) = n^2 = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$, pour montrer que c'est une base il suffit alors de montrer qu'elle est libre.
En effet soit $(\lambda_{i,j})$ des nombres complexes tels que $\sum\limits_{1\le i,j\le n} \lambda_{i,j}\Phi(E_{i,j}) = 0$, on multiplie par $\Phi(E_{k,l})$, la trace de la somme est toujours nulle, tenant compte de la linéarité de la trace et de la relation pécédente on obtient : $\sum\limits_{1\le i,j\le n} \lambda_{i,j}\delta_{j,k}\delta_{i,l} = \lambda_{l,k} = 0 \quad \forall\, k, \forall\, l$, d'où la famille est libre.

2) a)
$$\begin{aligned} & Tr\,((\Phi(A+B) - \Phi(A) - \Phi(B))\Phi(E_{i,j})) \\ = \; & Tr\,(\Phi(A+B)\Phi(E_{i,j}) - \Phi(A)\Phi(E_{i,j}) - \Phi(B)\Phi(E_{i,j})) \\ = \; & Tr\,(\Phi(A+B)\Phi(E_{i,j})) - Tr\,(\Phi(A)\Phi(E_{i,j})) - Tr\,(\Phi(B)\Phi(E_{i,j})) \\ = \; & Tr\,((A+B)E_{i,j}) - Tr\,(AE_{i,j}) - Tr\,(BE_{i,j})) \\ = \; & 0 \quad \text{car la trace est linéaire et . distributive par rapport à } + \end{aligned}$$

b) Comme la trace est linéaire et que $(\Phi(E_{i,j}))$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et tenant compte de la question précédente alors $Tr\,((\Phi(A+B) - \Phi(A) - \Phi(B))M)$ pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et enfin d'aprés la question 2.b) 1ére partie, on conclut que $\Phi(A+B) - \Phi(A) - \Phi(B) = 0$.

3) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, mn montre comme dans la question précédente que : $Tr\,((\Phi(\lambda A) - \lambda\Phi(A))\Phi(E_{i,j})) = 0$, puis on en déduit que $Tr\,((\Phi(\lambda A) - \lambda\Phi(A))M)) = 0 \quad \forall \quad M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, puis enfin que : $\Phi(\lambda A) - \lambda\Phi(A)$, d'où Φ est linéaire.
D'autre part : Soit $A \in$ Ker (Φ), donc $Tr(AE_{i,j}) = Tr(\Phi(A)\Phi(E_{i,j})) = 0$, comme $(E_{i,j})$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors $Tr(AM) = 0 \quad \forall\; M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donc $A = 0$ et par suite Φ est injective, comme c'est un endomrphisme en dimension finie, alors c'est un automorphisme.

4) $E_{i,j}^2 = E_{i,j}E_{i,j} = \delta_{i,j}\delta_{j,i} = 0$ car $i \neq j$, donc $E_{i,j}$ est nilpotente.
D'autre part : $\chi_{\Phi(E_{i,j}^2}(X) = \chi_{E_{i,j}^2}(X) = (-1)^n X^n$ car $E_{i,j}^2 = 0$, en utilisant le théorème de Cayley-Hamiltion on conclut que $\Phi(E_{i,j}^{2n} = 0$, donc $\Phi(E_{i,j})$ est nilpotente.

5) a) D'aprés la supposition de la partie 3, on a : $\chi_{AG} = \chi_{\Phi(A)\Phi(G)} = \chi_{\Phi(A)}$ car $\Phi(G) = I_n$.

b) Tout calcul fait $E_{i,j}G$ est la matrice dont toutes les lignes sont nulle sauf la i éme, $E_{i,j}G = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ g_{j,1} & \dots & g_{j,i} & \dots & g_{j,n} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$, donc sont polynôme caractéristique est $(-1)^n X^{n-1}(X - g_{j,i})$.

c) Pour $i \neq j$, la matrice $\Phi(E_{i,j})$ est nilpotente, donc $\chi_{\Phi(E_{i,j})} = (-1)^n X^n$, or $(-1)^n X^{n-1}(X - g_{j,i}) = \chi_{E_{i,j}G} = \chi_{\Phi(E_{i,j})} = (-1)^n X^n$, donc $g_{j,i} = 0$ si $i \neq j$, d'où G est diagonale.
D'autre part, $\chi_{G^2} = \chi_{\Phi(G)}$ (1), d'aprés 5.a) 3éme partie, or $\Phi(G) = I_n$ et $G^2 = Diag(g_{1,1}^2, \dots, g_{n,n}^2)$, (matrice diagonale), la relation (1) devient $(-1)^n (X-1)^n = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} (X - g_{i,i}^2)$, d'où $g_{i,i}^2 = 1$ et par suite $G^2 = I_n$.

6) a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a : $\chi_{\Psi(A)} = \chi_{\Phi(AG)} = \chi_{AG^2} = \chi_A$ en utilisant la question 5.a) 3éme partie pour AG et le fait que $G^2 = I_n$. Donc Ψ conserve le polynôme caractéristique.

b) On a Ψ conserve le polynôme caractéristique, d'aprés les résultats de la 2ème partie $\exists G$ inversible telle que $\Psi = u_{P,P^{-1}}$ ou $\Psi = v_{P,P^{-1}}$, or $\Phi(M) = \Psi(MG^{-1}) = \Psi(MG)$ car $G^{-1} = G$ puisque $G^2 = I_n$, donc $\Phi(M) = \Psi(MG) = u_{P,P^{-1}} = PMGP^{-1}$ ou $\Phi(M) = \Psi(MG) = v_{P,P^{-1}} = P^tMGP^{-1}$.

7) a) $Tr(AGBG) = Tr(AB)$ car le produit matriciel est commutatif à l'interieur de la trace et que $G^2 = I_n$.

b) D'aprés la question précédente et vu que la trace est linéaire, on conclut que : $Tr\left((GBG - B)A\right) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, d'aprés la question 2.b) 1ére partie, on concult que $GBG - B = 0$.

c) $GBG = B \Longrightarrow GB = BG^{-1} = BG$ et d'aprés 1.b) 1ére partie, on a $G = \lambda I_n$, or $G^2 = I_n$, d'où $\lambda \in \{-1, 1\}$.

8) Si $w = \varepsilon u_{P,P^{-1}}$, on a : $\chi_{w(A)w(B)} = \chi_{\varepsilon PAP^{-1}\varepsilon PBP^{-1}} = \chi_{PABP^{-1}} = \chi_{AB}$ car deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.
Le même raisonnement est encore valable pour le cas où $w = \varepsilon v_{P,P^{-1}}$.

TROISIÉME PARTIE

1) a) C'est un résultat du cours, qui dit que toute matrice symétrique peut étre diagonalisable dans une base orthonormée, donc la matrice de passage, P est une matrice orthogonale, donc $P^{-1} = {}^t P$, d'où $A = {}^t PDP$ avec D diagonale dont les coéfficients diagonaux $(\lambda_i)_{1 \le i \le n}$ sont exactement les valeurs propres de A.

b) $$\begin{aligned} A \text{ positive } &\Longleftrightarrow {}^t XAX \geq 0 \ \forall X \in \mathbb{R}^n \\ &\Longleftrightarrow {}^t X{}^tPDPX \geq 0 \ \forall X \in \mathbb{R}^n \\ &\Longleftrightarrow {}^t(PX)PDPX \geq 0 \ \forall X \in \mathbb{R}^n \\ &\Longleftrightarrow {}^t YPDY \geq 0 \ \forall Y \in \mathbb{R}^n \\ &\quad \text{car } \forall Y \in \mathbb{R}^n, \exists X = P^{-1}Y \text{ tel que } y = PX \\ &\Longleftrightarrow {}^t E_iDE_i \geq 0 \ \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ &\quad \text{avec } (E_i) \text{la base canonique de } \mathbb{R}^n \\ &\Longleftrightarrow \lambda_i \geq i \ \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ &\Longleftrightarrow \text{Toutes les valeurs propres de A sont positives} \end{aligned}$$

c) Même raisonnement que ce qui précède.

2) a) $$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A + \mu I_n) &\Longleftrightarrow \exists X \neq 0 \text{ tel que } (A + \mu I_n)X = \lambda X \\ &\Longleftrightarrow \exists X \neq 0 \text{ tel que } AX = (\lambda - \mu)X \\ &\Longleftrightarrow \lambda - \mu \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \\ &\Longleftrightarrow \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) + \mu \end{aligned}$$
Donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A + \mu I_n) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) + \mu$.

b) $$\begin{aligned} A + xI_n \text{ définie positive } &\Longleftrightarrow \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A + xI_n) \subset]0, +\infty[\\ &\quad \text{D'aprés 1.b) 3ème partie} \\ &\Longleftrightarrow \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) + x \subset]0, +\infty[\\ &\quad \text{D'aprés 2.a) 3ème partie} \\ &\Longleftrightarrow \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset]-x, +\infty[\\ &\Longleftrightarrow -x < \min(\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)), \ \forall x > \alpha \\ &\Longleftrightarrow x > -\min(\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)), \ \forall x > \alpha \end{aligned}$$
En prenant $\alpha = -\min(\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A))$, on obtient le résultat.

3) a) $I_n \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) = \Phi\left(\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})\right) \subset Phi\left(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})\right)$, donc $\exists J \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tel que $I_n = \Phi(J)$.
D'autre part, soit A matrice symétrique, d'aprés 2.b) 3ème partie,

on peut trouver $alpha$ et x des réels tels que $x > \alpha$ et $A + xI_n \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) = \Phi\left(\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})\right)$, donc $\exists B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A + xI_n = \Phi(B)$, d'où $A = \Phi(B) - xI_n = \Phi(B) - x\Phi(J) = \Phi(C)$ où $C = B - xJ$ car Φ est linéaire, donc Φ est surjectif.

b) Φ est un endomorphisme surjectif, en dimension finie, donc c'est un automorphisme.

4) Pour réponrde aux deux questions a) et b), on va d'abord montrer que $\overline{\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})} = \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$, où $\overline{\mathcal{A}}$ désigne l'adhérance de la partie $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
En effet, soit $A \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$, donc ses valeurs propres, λ_i sont positives, d'où $A_k = A + \dfrac{1}{k}I_n \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, car ses valeurs propres, $\lambda_i + \dfrac{1}{k}$ sont strictement positives, de plus $\lim\limits_{k \longrightarrow +\infty} A_k = A$, d'où $A \in \overline{\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})}$, et par suite $\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R}) \subset \overline{\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})}$.
D'autre part, soit $A \in \overline{\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})}$, alors $\exists A_k \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $\lim\limits_{k \longrightarrow +\infty} A_k = A$, donc $\forall X \in \mathbb{R}^n$ tel que $X \neq 0$, on a ${}^tA_k = A_k$ et ${}^tA_kX > 0$, en passant à la limite, quand $k \longrightarrow +\infty$, car les fonctions $A \mapsto^t A$ et $A \mapsto^t XAX$ sont continues sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, puisque linéaires en dimension finie, on obtient ${}^tA = A$ et ${}^tXAX \geq 0$, d'où A symétrique et postive, d'où $A \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ et par suite : $\overline{\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})} \subset \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$.
Conclusion : $\overline{\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})} = \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$.

a) $\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ est fermé car $\overline{\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})} = \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$

b) Φ autoprphisme, en dimension finie, donc continue et Φ^{-1} aussi, donc pour toute partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a : $\overline{\Phi(\mathcal{A})} = \overline{\mathcal{A}}$, or $\Phi\left(\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})\right) = \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, en passant à l'adhérance, on obtient $\Phi\left(\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})\right) = \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$.

5) a) A est symétrique, donc diagonalisable, or elle admet une unique valeur propre, λ, donc $D = \lambda I_2$, d'où $A = P^{-1}\lambda I_2 P = \lambda I_2$ et donc $\Phi(A) = \Phi(\lambda I_2) = \lambda\Phi(I_2) = \lambda I_2 = A$.

b) i. $A - \mu I_2$ est symetrique car A et I_2 sont symétriques, d'autre part $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A - \mu I_2) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) - \mu = \{\lambda, \mu\} - \mu = \{\lambda - \mu, 0\} \subset \mathbb{R}^+$, donc $A - \mu I_2$ est positive.
On a $0 \leq rg(A - \mu I_2) \leq 2$, et μ valeur propre de A, donc A n'est pas inversible, donc $rg(A - \mu I_2) \neq 2$, de plus $A \neq \mu I_2$ car admet deux valeurs propres distinctes, donc $A - \mu I_2 \neq 0$, donc $rg(A - \mu I_2) \neq 0$, donc $rg(A - \mu I_2) = 1$

ii. On a : $\Phi\left(\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})\right) = \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$, or $A - \mu I_2$ est symétrique, positive, donc $\phi(A) - \mu I_2 = \phi(A - \mu I_2) \in \Phi\left(\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})\right) = \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$, symétrique, positive.
Supposons que : $rg\left(\Phi(A) - \mu I_2\right) = 0$, alors $\Phi(A) = \mu I_2 = \mu\Phi(I_2) = \Phi(\mu I_2)$, or Φ est bijective, donc $A = \mu I_2$, absurde.
Supposons que : $rg\left(\Phi(A) - \mu I_2\right) = 2$, alors $\Phi(A) - \mu I_2$ est inversible, donc n'admet pas de valeur propre nulle, or elle est symétrique, positive, donc devient symétrique définie positive, c'est à dire $\Phi(A) - \mu I_2 = \Phi(A - \mu I_2) \in \left(\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})\right) = \Phi\left(\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})\right)$, or Φ automorphisme, donc $A - \mu I_2 = \Phi^{-1} \circ \Phi(A - \mu I_2) \in \Phi^{-1}\left(\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})\right) = \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, en particulier $A - \mu I_2$ est inversible, impossible puisque μ est une valeur propre de A.
Conclusion : $rg\left(\Phi(A) - \mu I_2\right) = 1$, et par suite μ est une valeur propre de $\Phi(A)$.

iii. Les valeurs propres de $-A$ sont $-\lambda$ et $-\mu$ avec $-\mu > lambda$, de la même façon que dans 5.b.i) on montre que $-A + \lambda I_2$ est symétrique, positive et de rang 1, puis que $-\Phi(A) + \lambda I_2$ est aussi de rang 1, puis on conclut que λ est une valeur propre de $\Phi(A)$.

c) D'aprés ce qui précède on a : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(\Phi(A))$, d'où $\chi_{\Phi(A)} = \chi_A = X^2 - (\lambda + \mu)X + \lambda\mu$.

Fin.