Maths-MPSI **Source disponible sur:**
Mr Mamouni : *myismail@altern.org* ©http://www.chez.com/myismail

Première partie

1) a) Au voisinage de 0 : On sait que $e^t = 1+t+o(t)$, donc $\dfrac{e^{-at}-e^{-bt}}{t} = b-a+o(1) \sim b-a$ intégrable au voisinage de 0.
Au voisinage de $+\infty$: On sait que $e^{-at} = o\left(\dfrac{1}{t}\right)$, donc $\dfrac{e^{-at}-e^{-bt}}{t} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ intégrable au voisinage de $+\infty$.

b) $I(a,b) = -I(b,a)$, trés evident.
Posons : $u = ta$, donc :
$I(a,b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}-e^{-\frac{b}{a}u}}{u}du = I\left(1,\frac{b}{a}\right)$.

c) i. L'application : $f : (x,t) \mapsto \dfrac{e^{-t}-e^{-xt}}{t}$ est continue sur $[1,+\infty[\times\mathbb{R}^*$ en tant que somme, rapport de fonctions continue, qui ne s'annule pas. En $(x,0)$ on a : $f(x,t) \sim x-1$ continue, donc f est continue sur $[1,+\infty[\times\mathbb{R}$.
D'autre part : pour $x \in [a,b] \subset [1,+\infty[$ on a : $\left|\dfrac{e^{-t}-e^{-xt}}{t}\right| = \dfrac{e^{-t}-e^{-xt}}{t} \leq \dfrac{e^{-t}-e^{-bt}}{t}$ qui est continue, intégrable sur $]0,+\infty[$, donc φ est continue sur $[1,+\infty[$.

ii. Pour $x \in [a,b] \subset [1,+\infty[$ on a : $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\right| = e^{-xt} \leq e^{-at}$ continue, intégrable sur $[0,+\infty[$. Donc φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,+\infty[$, avec $\varphi'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \frac{1}{x}$.

iii. D'aés le raisonnement fait dans la question précédente, on a : $\varphi'(x) = \dfrac{1}{x}$, donc $\varphi(x) = \ln x + K$, or $\varphi(1) = 0$, d'où $K = 0$ et donc $\varphi(x) = \ln x$.

d) Si $b \geq a$, alors $x = \frac{b}{a} \geq 1$, donc $I(a,b) = I(1,\frac{b}{a}) = \varphi\left(\frac{b}{a}\right) = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.
Si $b \leq a$, alors $x = \frac{a}{b} \geq 1$, donc :
$I(a,b) = -I(b,a) = -I(1,\frac{a}{b}) = -\varphi\left(\frac{a}{b}\right) = -\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.
Conclusion : $I(a,b) = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

2) a) Au voisinage de 0 : on sait que $\ln(1+t) = t+o(t)$, d'où $\dfrac{\ln(1+t)}{t} \sim 1$ intégrable au voisinage de 0, donc $t \mapsto \dfrac{\ln(1+t)}{t}$ est intégrable sur $]0,1]$.

b) Posons $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, donc le rayon de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n+1}x^n$ est égal à 1, dont la somme est $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$, puisqu'il s'agit de son développement en série entière.

c) Pour $x \in [0,1]$ fixé, on vérifie faciulement que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n+1}x^n$ est une série alternée, donc vérifie le critère spécial, en prticulier la majoration du reste par son 1ér terme, donc $\left|\displaystyle\sum_{k\geq n}\frac{(-1)^k}{k+1}x^k\right| \leq \left|\dfrac{(-1)^n}{n+1}x^n\right| \leq \dfrac{1}{n+1}$, donc le reste converge uniformément vers 0, et par suite la convergence de la série sur $[0,1]$ est uniforme.

d) $$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} t^n dt \quad \text{D'aprés 2.2}$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n}{n+1} t^n dt$$
Car la convergence est uniforme sur [0,1]
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$$
$$= \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+2)^2}$$
On divise la somme en deux $n = 2p, n = 2p+1$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+2)^2}$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - 2\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2}$$
Car $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+2)^2}$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$
Car $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$
$$= \frac{\pi^2}{12}$$

Deuxième partie

1) a) g est de classe $\mathcal{C}^1$, en tant que primitive de f qui est continue.
On a $\psi(f)(x) = \dfrac{g(x)}{x}$ pour $x > 0$, donc ψ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour $x \neq 0$, le théorème des accroissement finie, donc $g(x) - g(0) = xg'(c)$ avec c compris entre 0 et x, d'où $\psi(f)(x) = f(c) \longrightarrow f(0) = \psi(f)(0)$ car $g(0) = 0$ et $g' = f$ continue, donc $\psi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, autrement dit $\psi(f) \in E$.

b) $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \lambda \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0$ tel que $|f(t)-\lambda| \leq \dfrac{\varepsilon}{2} \quad \forall t \geq A$, donc pour $x \geq A$ on a :
$$\begin{aligned}
|\varphi(x) - \lambda| &= \frac{1}{x}\left|\int_0^x f(t)dt - \lambda x\right| \\
&= \frac{1}{x}\left|\int_0^x f(t)dt - \int_0^x \lambda dt\right| \\
&= \frac{1}{x}\left|\int_0^x (f(t)-\lambda)dt\right| \\
&\leq \frac{1}{x}\int_0^x |f(t)-\lambda|\,dt \\
&= \frac{1}{x}\int_0^A |f(t)-\lambda|\,dt + \frac{1}{x}\int_x^A |f(t)-\lambda|\,dt \\
&= \frac{K}{x} + \frac{1}{x}\int_x^A |f(t)-\lambda|\,dt \\
&\leq \frac{K}{x} + \frac{1}{x}\int_x^A \frac{\varepsilon}{2}dt \\
&= \frac{K}{x} + \frac{x-A}{x}\frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \frac{K}{x} + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{car } \frac{x-A}{x} \leq 1 \\
&\leq \varepsilon \quad \text{car } \lim_{x\to+\infty} \frac{K}{x} = 0
\end{aligned}$$
La réciproque est fausse, prenons pour contre-exemle la fonction $f(t) = \cos t$, on a : $\psi(f)(x) = \dfrac{\sin x}{x} \longrightarrow 0$ quand $x \longrightarrow +\infty$, alors que $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos x$ n'existe pas.

c) $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = +\infty \Longrightarrow \forall B > 0,\ \exists A > 0$ tel que $f(t) \geq \dfrac{B}{2} \quad \forall t \geq A$, donc

$$\begin{aligned}\varphi(f)(x) &= \frac{1}{x}\left(\int_0^A f(t)dt + \int_A^x f(t)dt\right)\\ &\geq \frac{1}{x}\left(K + \frac{B}{2}(x-A)\right)\\ &= \frac{K}{x} + \frac{x-A}{x}\frac{B}{2}\\ &\geq B \quad car \lim_{x\to+\infty} \frac{K}{x} + \frac{x-A}{x}\frac{B}{2} = \frac{B}{2}\end{aligned}$$

Donc $\lim_{x\to+\infty} \psi(f)(x) = +\infty$.

d) i. Dans $\psi(h)$ on va utiliser une intégration par partie, en posant $u = x, v' = f$, donc $u' = 1, v = g$, d'où :

$$\begin{aligned}\psi(h)(x) &= \frac{1}{x}\int_0^x tf(t)dt & &= \frac{1}{x}\left([tg(t)]_0^x - \int_0^x g(t)dt\right)\\ &= g(x) - \frac{1}{x}\int_0^x g(t)dt & &= g(x) - \psi(g)(x)\end{aligned}.$$

ii. f est intégrable sur $[0,+\infty[$, donc $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ admet une limite finie en $+\infty$, d'aprés la question 1.2) $\psi(h)$ admet aussi la même limite en $+\infty$, or $\psi(h) = g - \psi(g)$, donc $\lim_{x\to+\infty} \psi(h)(x) = 0$.

La réciproque n'est pas toujours vraie, prenons pour contre-exemple $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$, non intégrable au voisinage de 0, car $\dfrac{e^{-x}}{x} \sim \dfrac{1}{x}$, alors que $\psi(h)(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x e^{-t}dt = \dfrac{1}{x}(1-e^{-x}) \longrightarrow 0$, quand $x \longrightarrow +\infty$.

e) $\sqrt{f} \geq 0$ et $x \geq 0$, donc $\psi(\sqrt{f})(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \sqrt{f(t)}dt \geq 0$.

D'autre part : en utilisant l'inégalité de Cauchy-schwarz pour 1 et $\sqrt{f}$, on aura :

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\int_0^x \sqrt{f(t)}dt &\leq \frac{1}{x}\sqrt{\int_0^x dt}\sqrt{\int_0^x f(t)dt}\\ &= \sqrt{\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt} = \sqrt{\psi(f)}\end{aligned}.$$

On aura égalité, s'il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-schwarz pour 1 et $\sqrt{f}$, donc s'ils sont proportionnels, c'est à dire f est constante.

2) a) Il est clair que $\psi(f+\lambda g) = \psi(f) + \lambda\psi(g)$, n'oubliez pas de le mentionner pour $x = 0$, donc ψ est linéaire.
D'autre part d'aprés 1.1) $\psi(f) \in E$, $\forall f \in E$, donc ψ est un endomorphisme de E.

b)
$$\begin{aligned}f \in \text{Ker }(\psi) &\Longrightarrow \psi(f)(x) = 0,\ \forall x > 0\\ &\Longrightarrow g(x) = \int_0^x f(t)dt = 0,\ \forall x > 0\\ &\Longrightarrow g'(x) = f(x) = 0,\ \forall x \geq 0\end{aligned}$$

Donc ψ est injective.

c) D'aprés 1.1) on peut affirmer que $\psi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc toute fonction de E qui ne l'est pas ne peut pas être de la forme $\psi(f)$, c'est à dire n'admet pas d'antécédant, donc ψ n'est pas surjective. $F(x) = |x-1|$ est un exemple de fonction de E qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, car non dérivable en 1.

3) a) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du 1ér ordre à coéfficients non constant, dont la solution est :

$$f(x) = Ke^{-\displaystyle\int_0^x \frac{\lambda-1}{\lambda}tdt} = Ke^{\frac{1-\lambda}{\lambda}\ln x} = Kx^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}.$$

b) f est prolongeable en 0^+ *si et seulement si* $\lim_{x\to} f(x)$ est finie *si et seulement si* $\dfrac{1-\lambda}{\lambda} \geq 0$ *si et seulement si* $0 < \lambda \leq 1$.

4) a) 0 ne peut pas être une valeur propre de ψ car elle est injective.

b) Soit $f \in E$ non nulle telle que $\psi(f) = \mu f$, donc $f = \dfrac{1}{\mu}\psi(f)$ car $\mu \neq 0$ d'aprés 4.1). De plus d'aprés 1.1) on peut affirmer que $\psi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc f aussi.

c) Soit λ valeur propre de ψ et f vecteur propr associé, donc $\psi(f)(x) = \lambda f(x)$, d'où $\displaystyle\int_0^x f(t)dt = \lambda xf(x)$, en dérivant cette égalité on obtient : $\lambda xf'(x) + (\lambda-1)f(x) = 0$, dont les solutions sont :
$f(x) = Kx^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$, dérivables sur $]0,+\infty[$ pour tout $\lambda \in]0,1]$.

Troisième partie

1) a) Pour tout segment $[a,b]\subset\mathbb{R}^+$, on a d'aprés l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)g(t)dt\right| \le \sqrt{\int_a^b f^2(t)dt}\sqrt{\int_a^b g^2(t)dt}$

$$\le M=\sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(t)dt}\sqrt{\int_0^{+\infty} g^2(t)dt}$$

Donc fg est intégrable sur $\mathbb{R}^+$

b) Il est clair que l'application nulle est de carré intégrable, donc appartient à E_2, d'autre part, soit $(f,g)\in E_2, \lambda\in\mathbb{R}$, alors : $(f+\lambda g)^2=f^2+2\lambda fg+g^2$ car f^2, fg, g^2 sont toutes intégrables, donc $f+\lambda g\in E_2$ et par suite E_2 est un sous-espace vectoriel de E.

c)
- Symétrie : $(f,g)=\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)dt=\int_0^{+\infty} g(t)f(t)dt=(g,f)$.
- Bilinéarité : $(f+\lambda g,h)=(f,h)+\lambda(g,h)$, car l'intégrale est linéaire, d'où la linéarité à gauche, à l'aide de la symétrie on conclut la bilinéarité.
- Positive : $(f,f)=\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(t)dt\ge 0$.
- Définie : $(f,f)=0\Longrightarrow\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(t)dt=0\Longrightarrow f^2=0$, car f^2 continue positive, donc $f=0$.

2) a) $\dfrac{g^2(t)}{t}=g(t)\psi(f)(t)\longrightarrow g(0)\psi(f)(0)=0$, quand $t\longrightarrow 0^+$, car g et $\psi(f)$ sont continues sur $\mathbb{R}^+$ et $g(0)=0$.

b) $\dfrac{g^2(t)}{t^2}=(\psi(f)(t))^2\longrightarrow(\psi(f)(0))^2$, quand $t\longrightarrow 0^+$, car $\psi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, donc $t\mapsto\dfrac{g^2(t)}{t^2}$ est intégrable sur $]0,b]$ car prolongeable par continuité en 0^+.

D'autre part : $\displaystyle\int_0^b\psi(f)^2(t)dt=\int_0^b\frac{g^2(t)}{t^2}dt$, par définition de $\psi(f)$, pour l'autre égalité on va utiliser une intégration par parties, avec $u=g^2(t), v'=\dfrac{1}{t^2}$, donc $u'=2g'(t)g(t)$ et $v=-\dfrac{1}{t}$, d'où :

$$\begin{aligned}\int_0^b\frac{g^2(t)}{t^2}dt&=\left[-\frac{g^2(t)}{t}\right]_0^b+2\int_0^b\frac{g'(t)g(t)}{t}dt\\&=-\frac{g^2(b)}{b}+2\int_0^b\frac{g'(t)g(t)}{t}dt\\&\qquad\text{car : }\lim_{t\to0^+}\frac{g^2(t)}{t}=0\\&=-\frac{g^2(b)}{b}+2\int_0^b f(t)\psi(f)(t)dt\\&\qquad\text{car : }g'(t)=f(t),\ \frac{g(t)}{t}=\psi(f)(t)\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}\int_0^b\psi(f)^2(t)dt&\le 2\int_0^b f(t)\psi(f)(t)dt\quad\text{D'aprés (1)}\qquad,\\&\le 2\sqrt{\int_0^b f^2(t)dt}\sqrt{\int_0^b\psi(f)^2(t)dt}\end{aligned}$$

D'aprés l'inégalité de Cauchy-Shwarz.

Si $\displaystyle\int_0^b\psi(f)^2(t)dt=0$, c'est terminé, sinon on peut simplifier avec et on obtient encore le résultat demandé.

d) Découle immédiatement de 2-4) en faisant tendre b vers $+\infty$.

e) D'aprés 2-5) on peut conclure que ψ_2 est 2-lipshitzienne, donc continue.

3) a)

b) Faire tendre b vers $+\infty$ dans (1), en utilisant 3-1).

4)
$$\begin{aligned}||\psi(f)-2f||^2&=(\psi(f)-2f,\psi(f)-2f)\\&=(\psi(f),\psi(f))-4(\psi(f),f)+4(f,f)\\&=||\psi(f)||^2-4(\psi(f),f)+4||f||^2\\&=-4(\psi(f),f)+8||f||^2\quad\text{Car : }||\psi(f)||=2||f||\\&=-4(\psi(f),f)+2||\psi(f)||^2\quad\text{Car : }||\psi(f)||=2||f||\\&=0\quad\text{D'aprés 3-2)}\end{aligned}$$

Donc $\psi(f)-2f=0$, ainsi si $f\neq0$, on aurait 2 est une valeur propre de ψ, impossible puisque les valeurs propres de ψ sont les $\lambda\in]0,1]$.

Quatrième partie

1) a) $f_a^2(x)=e^{-2ax}$ est évidement intégrable sur $\mathbb{R}^+$, avec :
$||f_a||^2=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-2ax}dx=\frac{1}{2a}$.

b) Pour $x\neq 0$, on a : $\psi(f_a)(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x e^{-at}dt=\frac{1-e^{-ax}}{ax}$.
Pour $x=0$, on a : $\psi(f_a)(0)=f_a(0)=1$.

$$\begin{aligned}(f_a,\psi(f_a)) &= \int_0^{+\infty}f_a(x)\psi(f_a)(x)dx\\ &= \frac{1}{a}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-2ax}}{x}dx\\ &= \frac{1}{a}I(a,2a)\\ &= \frac{\ln a}{a}\quad \text{D'aprés 1-4 de la 1ère partie}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{||\psi(f_a)||}{||f_a||}\right)^2 &= 2a(\psi(f_a),\psi(f_a)\quad \text{D'aprés 1-1}\\ &= 4a(f_a,\psi(f_a))\quad \text{D'aprés 3-2, 3ème partie}\\ &= 4\ln a\end{aligned}$$

D'où : $\dfrac{||\psi(f_a)||}{||f_a||}=2\sqrt{\ln a}$.

2) a) Pour $x\neq 0$, on a : $\psi(f)(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x\frac{1}{1+t}dt=\frac{\ln(1+x)}{x}$.
Pour $x=0$, on a : $\psi(f)(0)=f(0)=1$.

b) Au voisiange de 0 : $f^2(x)\sim 1$
Au voisinage de $+\infty$: $f^2(x)\sim\dfrac{1}{x^2}$, donc f^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, or f continue, donc $f\in E_2$.

$$\begin{aligned}(f|\psi(f)) &= \int_0^{+\infty}f(t)\psi(f)(t)dt\\ &= \int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+t)}{t(1+t)}dt\\ &= \int_0^1\frac{\ln(1+t)}{t(1+t)}dt+\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+t)}{t(1+t)}dt\\ &= \int_0^1\frac{\ln(1+t)}{t(1+t)}dt+\int_0^1\frac{\ln\left(\frac{1+u}{u}\right)}{1+u}du \qquad \text{Avec : } u=\frac{1}{t}\\ &= \int_0^1\left(\frac{\ln(1+t)}{t(1+t)}+\frac{\ln\left(\frac{1+t}{t}\right)}{1+t}\right)dt \quad \text{On remplace u par t}\\ &= \int_0^1\frac{(1+t)\ln(1+t)-t\ln t}{t(1+t)}dt\\ &= \int_0^1\left(\frac{\ln(1+t)}{t}-\frac{\ln t}{1+t}\right)dt\end{aligned}$$

c) $(\ln t\ln(1+t))'=\dfrac{\ln(1+t)}{t}+\dfrac{\ln t}{1+t}$, donc $\ln t\ln(1+t)$ est une primitive de $\dfrac{\ln(1+t)}{t}+\dfrac{\ln t}{1+t}$.
Calculons d'abord : $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1+t)}{t}dt$ et $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln t}{1+t}dt$, en effet :

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{\ln(1+t)}{t}dt &= [\ln t\ln(1+t)]_0^1-\int_0^1\frac{\ln t}{1+t}dt\\ &\quad\text{Intégration par parties avec :}\\ &\quad u=\ln(1+t)\quad v'=\frac{1}{t}\\ &\quad u'=\frac{1}{1+t}\qquad v=\ln t\\ &= -\int_0^1\frac{\ln t}{1+t}dt\\ &\quad\text{Car au voisinage de } 0^+ :\ \ln t\ln(1+t)\sim t\ln t\longrightarrow 0\end{aligned}$$

3)

4) a) les application $f\mapsto ||f||$ et $f\mapsto\psi(f)$ sont continue, or $f\neq 0$, donc l'application $f\mapsto\dfrac{||\psi(f)||}{||f||}$ est continue en tant que composée et rapport d'applications continues.

b) $\left\{\dfrac{||\psi(f)||}{||f||} \text{ tel que } f \in E_2 - 0\right\}$ est un connexe dans $\mathbb{R}$ en tant qu'image d'un connexe par une application continue, d'autre part : $0 < \dfrac{||\psi(f)||}{||f||} < 2$, puisque $\psi(f)$ est injective et d'aprés la question 2-4) 3ème partie, donc c'est un intervalle contenu dans $]0,2[$.

5) a) i. L'application f est définie ainsi :

$$\begin{aligned} f(t) &= t^s & &\text{si : } 0 \le t \le a \\ &= -a^s(t-a-1) & &\text{si : } a \le t \le a+1 \\ &= 0 & &\text{si : } t \ge a+1 \end{aligned}$$

f^2 est intégrable car son intégrale sur $\mathbb{R}^+$ est égale à celui sur $[0, a+1]$, avec :

$$\begin{aligned} ||f||^2 &= \int_0^a t^{2s}dt - a^{2s}\int_a^{a+1}(t-a-1)^2dt \\ &= \frac{a^{2s+1}}{2s+1} - \frac{a^{2s}}{3} \sim \frac{a^{2s+1}}{2s+1} \end{aligned}$$

ii. D'abord pour $0 \le x \le a$, on a :

$\psi(f)(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt = \dfrac{1}{x}\int_0^x t^s dt = \dfrac{x^s}{s+1}$, car :

$2s+1 > 0 \Longrightarrow s > -\frac{1}{2} \Longrightarrow s+1 > 0 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} x^{s+1} = 0$.

D'autre part :

$$||\psi(f)||^2 = \int_0^{+\infty}\psi(f)^2(x)dx \ge \int_0^a \psi(f)^2(x)dx = \int_0^a \frac{x^{2s}}{(s+1)^2}dx = \frac{a^{2s+1}}{(s+1)^2(2s+1)} = \frac{2a^{2s+1}}{(s+1)(2s+1)}.\frac{1}{2(s+1)} \ge \frac{2a^{2s+1}}{(s+1)(2s+1)},$$

car $2(s+1) = 2s+2 > 1$.

iii. D'aprés les deux questions précèdentes, en faisant tendre a vers $+\infty$, on aura : $\sup\left(\dfrac{||\psi(f)||^2}{||f||^2}\right) \ge \dfrac{2}{s+1}$ $\forall s \in \mathbb{R}$ tel que $2s+1 > 0$, donc pour $s \ge -\frac{1}{2}$, en faisant tendre s vers $-\frac{1}{2}$, on obtient : $\sup\left(\dfrac{||\psi(f)||^2}{||f||^2}\right) \ge 4$, d'où : $\sup\left(\dfrac{||\psi(f)||}{||f||}\right) \ge 2$, or d'aprés la question 4.2) on a : $\sup\left(\dfrac{||\psi(f)||}{||f||}\right) \le 2$, d'où l'égalité.

b) i. Au voisinage de $+\infty$ on a : $f^2(t) = \dfrac{1}{t^{2\alpha+2}}$ est bien intégrable car $2\alpha+2 > 1$, avec :

$$\begin{aligned} ||f||^2 &= \int_0^{+\infty} f^2(t)dt = \int_0^1 t^{2\alpha}dt + \int_1^{+\infty}\frac{1}{t^{2\alpha+2}}dt \\ &= \frac{1}{2\alpha+1} + \frac{1}{2\alpha+1} = \frac{2}{2\alpha+1} \end{aligned}$$

ii. Déterminons d'abord $\psi(f)(x)$ pour $x \ge 0$.

1ér cas : $0 \le x \le 1$, alors :

$\psi(f)(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt = \dfrac{1}{x}\int_0^x t^\alpha dt = \dfrac{x^\alpha}{\alpha+1}$.

2ème cas : $x \ge 1$, alors :

$$\begin{aligned} \psi(f)(x) &= \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{x}\left(\int_0^1 f(t)dt + \int_1^x f(t)dt\right) \\ &= \frac{1}{x}\left(\int_0^1 t^\alpha dt + \int_1^x \frac{1}{t^{\alpha+1}}dt\right) \\ &= \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{x^\alpha} - 1\right)\right) \\ &= \frac{2\alpha+1}{x\alpha(\alpha+1)} - \frac{1}{\alpha x^{\alpha+1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ||\psi(f)||^2 &= \int_0^{+\infty}\psi(f)^2(x)dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^{2\alpha}}{(\alpha+1)^2}dx + \int_1^{+\infty}\left(\frac{2\alpha+1}{x\alpha(\alpha+1)} - \frac{1}{\alpha x^{\alpha+1}}\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{(2\alpha+1)(\alpha+1)^2} + \frac{(2\alpha+1)^2}{\alpha^2(\alpha+1)^2} - \frac{2(2\alpha+1)}{\alpha^2(\alpha+1)^2} \\ &\quad + \frac{1}{\alpha^2(2\alpha+1)} \\ &= \frac{1}{(2\alpha+1)(\alpha+1)^2} + \frac{4\alpha^2-1}{\alpha^2(\alpha+1)^2} + \frac{1}{\alpha^2(2\alpha+1)} \\ &\sim_{+\infty} \frac{4}{\alpha^2} \end{aligned}$$

iii. D'aprés les deux questions précèdentes, on aura : $\inf\left(\dfrac{||\psi(f)||^2}{||f||^2}\right) \le \dfrac{2(2\alpha+1)}{\alpha^2}$ pour $\alpha > 0$ assez grand, quand

$\alpha \longrightarrow +\infty$, on obtient $\inf\left(\dfrac{||\psi(f)||^2}{||f||^2}\right) \leq 0$, or d'aprés la question 4.2) on a : $\inf\left(\dfrac{||\psi(f)||}{||f||}\right) \geq 0$, d'où l'égalité.

$\boxed{\text{Fin.}}$