Concours Marocain 2005 : *Maths I, MP.*

Maths-MP.
Mr Mamouni : *myismail@altern.org*

Dimanche 26 Février 2006.

I. Résultats préliminaires.

A- Un résultat de dérivation.

1) La formule de Taylor-Young à l'ordre 2, s'écrit :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f``(x_0) + o(h^2) \qquad (1)$$
$$f(x_0-h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f``(x_0) + o(h^2) \qquad (2)$$

2) En faisant (1)+(2), on obtient :
$\dfrac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2} = f``(x_0) + o(1) \longrightarrow f''(x_0)$, quand $h \longrightarrow 0^+$.

3) Si $f`` = 0$, on peut affirmer que f est affine.

A- Un résultat de convergence.

1) a) ?

b)
$$\begin{aligned} ds \int_0^{2\pi} b_n^2 \sin^2(nx)dx &= \frac{b_n^2}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos(2nx))dx \\ &= \frac{b_n^2}{2}\left[x - \frac{\sin(2nx)}{2n}\right]_{x=0}^{x=2\pi} \\ &= \pi b_n^2 \end{aligned}.$$

Ainsi $b_n^2 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} v_n^2(x)dx \longrightarrow 0$, quand $n \longrightarrow +\infty$.

2) a) $c_n = \min(1, |b_n|)$, d'où $0 \leq c_n \leq 1$, donc (c_n) est bornée.
D'autre part $|w_n(x)| \leq |v_n(x)|$, et $(v_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers 0, donc $(w_n)_{n\geq 1}$ aussi.

b) Ainsi $(c_n)_{n\geq 1}$ est bornée et $(w_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers 0, en faisant jouer à c_n le rôle joué par b_n dans la question précédente, on déduit que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} c_n = 0$, donc à partir d'un certain rang $c_n < 1$, pour cela utilier la définition de la limite pour c_n avec $\varepsilon = 1$, et alors $c_n = |b_n|$ à partir d'un certain rang, donc $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} b_n| = 0$ et par suite $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} b_n = 0$.

II. Série trigonométrique dont la somme est continue.

1) a) Pour tout réel, x, la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} u_n(x)$ est convergent, donc son terme génbéral $u_n(x)$ converge vers 0.

b) En particulier $u_n(0) = a_n$ converge vers 0.

c) $0 \leq |v_n(x)| = |u_n(x) - a_n\cos(nx)| \leq |u_n(x)| + |a_n| \longrightarrow 0$, quand $n \longrightarrow +\infty$, donc $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} v_n(x) = 0$, pour tout réel, x. Ainsi (v_n) converge simplement vers 0, et d'aprés la partie **I.B**, on peut conclure que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} b_n = 0$.

2) a) $|u_n(x)| = |a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)| \leq |a_n| + |b_n| \leq M$, car $(|a_n|+|b_n|)$ est bornée, puisqu'elle converge vers 0, ainsi $\left|\dfrac{u_n(x)}{n^2}\right| \leq \dfrac{M}{n^2}$ et d'autre part $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc $\sum_{n\geq 1}\frac{u_n(x)}{n^2}$ converge normalement, dont le terme général est continue donc sa somme est aussi continue.

b) Pour tout réel, x et tout entier, N, on a $\sum_{n=1}^{N}\frac{u_n(x+2\pi)}{n^2}=\sum_{n=1}^{N}\frac{u_n(x)}{n^2}$, quand on fait tendre N vers $+\infty$, on obtient $F(x+2\pi)=F(x)$, donc F est 2π-périodique.
Calculons les coéfficients de Fourrier de F

$$\begin{aligned}a_n(F) &= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{p\geq 1}\frac{u_p(x)}{p^2}\cos(nx)dx\\ &= -\frac{1}{\pi}\sum_{p\geq 1}\frac{1}{p^2}\int_{-\pi}^{\pi}u_p(x)\cos(nx)dx\end{aligned}$$

On peut permuter signes somme et intégrale vu qu'il y a convergence normale sur $[-\pi,\pi]$.
D'autre part :

$$\int_{-\pi}^{\pi}u_p(x)\cos(nx)dx=a_p\int_{-\pi}^{\pi}\cos(px)\cos(nx)dx+b_p\int_{-\pi}^{\pi}\sin(px)\cos(nx)dx$$

Et on sait que : $\cos a\cos b=\frac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b))$, donc $\int_{-\pi}^{\pi}\cos(px)\cos(nx)dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(n+p)x+\cos(n-p)x)dx=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n+p)x}{n+p}+\frac{\sin(n-p)x}{n-p}\right]_{x=-\pi}^{x=\pi}=0$ si $n\neq p$

Si $n=p$, alors $\int_{-\pi}^{\pi}\cos(px)\cos(nx)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(n+p)x+1)dx=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n+p)x}{n+p}+x\right]_{x=-\pi}^{x=\pi}=\pi$.

$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(px)\cos(nx)dx=0$ car il s'agit d'intégrer sur $[-\pi,\pi]$ une fonction impaire.

Conclusion : $a_n(F)=-\frac{1}{n^2}$. Et pareil pour le calcul de $b_n(F)$.

3) a) On a φ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, avec $\varphi'(t)=\frac{2\sin t(t\cos t-\sin t)}{t^3}\sim_0 -\frac{t}{3}\longrightarrow 0$ quand $t\longrightarrow 0$, donc φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

b) $|\varphi'(t)|=\left|\frac{2\sin t(t\cos t-\sin t)}{t^3}\right|\leq\frac{2t+1}{t^3}\sim_{+\infty}\frac{2}{t^2}$, intégrable au voisinage de $+\infty$, donc φ' aussi.

4) a) $\frac{F(x+2h)+F(x-2h)-2F(x)}{4h^2}$

On peut se permettre de regrouper les sommes vu qu'il y a convergence simple

$$=-\frac{1}{4(nh)^2}\sum_{n=1}^{+\infty}a_n(\cos(nx+2nh)+\cos(nx-2nh)-2\cos(nx))$$
$$-\frac{1}{4(nh)^2}\sum_{n=1}^{+\infty}b_n(\sin(nx+2nh)+\sin(nx-2nh)-2\sin(nx))$$

Utiliser les formules :
$\cos a+\cos b=2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right),\sin a+\sin b=2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right.$

$$=-\frac{1}{4(nh)^2}\sum_{n=1}^{+\infty}2(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))(\cos(2nh)-1)$$

Utiliser la formule : $\cos(2\theta)-1=-2\sin^2(\theta)$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))\varphi(nh)$$

b) Commençons par le 2 ème membre de l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(S_n(x)-f(x))(\varphi(nh)-\varphi((n+1)h))$$

On peut se permettre de séparer les sommes vu qu'il y a convergence simple

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(x)\varphi(nh)-\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(x)\varphi((n+1)h)$$

$$-f(x)\sum_{n=0}^{+\infty}(\varphi(nh)-\varphi((n+1)h))$$

On remplace $n+1$ par n dans la 2 ème somme et on remarque que la 3 ème est telescopique, et que $\varphi(0)=1$, $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\varphi(nh)=0$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(x)\varphi(nh)-\sum_{n=1}^{+\infty}S_{n-1}(x)\varphi(nh)-f(x)$$

On peut se permettre de regrouper les sommes vu qu'il y a convergence simple

$$=S_0(x)\varphi(0)+\sum_{n=1}^{+\infty}(S_n(x)-S_{n-1}(x))\varphi(nh)-f(x)$$

On remarque que : $S_0(x)=0, S_n(x)-S_{n-1}(x)=u_n(x)$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)\varphi(nh)-f(x)$$

On utilise la question précédente et le fait que : $u_n(x)=a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$

$$=\frac{F(x+2h)+F(x-2h)-2F(x)}{4h^2}-f(x)$$

c) i. Découle de la définition de la limite : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}S_n(x)=f(x)$ pour x, fixé.

ii. On a :$\varphi(nh)-\varphi((n+1)h)=\int_{nh}^{(n+1)h}\varphi'(t)dt$, donc

$$\left|\sum_{n=N}^{+\infty}(S_n(x)-f(x))(\varphi(nh)-\varphi((n+1)h))\right|$$

$$\leq\sum_{n=N}^{+\infty}|(S_n(x)-f(x))|\,|(\varphi(nh)-\varphi((n+1)h))|$$

$$\leq\frac{\varepsilon}{2A}\sum_{n=N}^{+\infty}\left|\int_{nh}^{(n+1)h}\varphi'(t)dt\right|$$

$$\leq\frac{\varepsilon}{2A}\sum_{n=N}^{+\infty}\int_{nh}^{(n+1)h}|\varphi'(t)|\,dt$$

$$=\frac{\varepsilon}{2A}\int_{Nh}^{+\infty}|\varphi'(t)|\,dt$$

$$\leq\frac{\varepsilon}{2A}\int_{0}^{+\infty}|\varphi'(t)|\,dt$$

$$=\frac{\varepsilon}{2}\text{ car }\int_{0}^{+\infty}|\varphi'(t)|\,dt=A$$

iii. D'aprés la question précédente, on peut conclure que $\lim\limits_{h\longrightarrow0^+}\sum\limits_{n=N}^{+\infty}(S_n(x)-f(x))(\varphi(nh)-\varphi((n+1)h))=0$, d'autre part $\lim\limits_{h\longrightarrow0^+}\varphi(nh)-\varphi((n+1)h)=0$ pour tout $0\leq n\leq N-1$, donc $\lim\limits_{h\longrightarrow0^+}\sum\limits_{n=0}^{N-1}(S_n(x)-f(x))(\varphi(nh)-\varphi((n+1)h))=0$, puisqu'il s'agit d'une somme finie, et par suite $\lim\limits_{h\longrightarrow0^+}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(S_n(x)-f(x))(\varphi(nh)-\varphi((n+1)h))=0$, donc tenant comte de la question **4.2**, on peut conclure que $\lim\limits_{h\longrightarrow0^+}\frac{F(x+2h)+F(x-2h)-2F(x)}{4h^2}=f(x)$

5) a) Dans cette question il semble y avoir une erreur d'énoncé, il fallait plutôt montrer que $\frac{F}{4}-F_1$ est affine au lieu de $F-F_1$

Posons $G(x)=\int_0^x f(t)dt$, et utilisons une intégration par partie dans F_1 où $\begin{array}{ll} u'(t) = f(t) & u = G(t) \\ v(t) = x - t & v'(t) = -1 \end{array}$, alors $F_1(x) = [(x-t)G(t)]_{t=0}^{t=x} + G(t) = \int_0^x G(t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^2$ car G est de classe $\mathcal{C}^1$ l'est en tant que primitive d'une fonction continue, avec $F_1' = G$ et $F_1" = G' = f$.

b) D'aprés le préliminaire $\lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{F_1(x+2h) + F_1(x-2h) - 2F_1(x)}{h^2} = F_1"(x) = f(x)$, on pose $F_2 = \frac{F}{4} - F_1$, alors :

$$\begin{aligned}
&\lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{F_2(x+2h) + F_2(x-2h) - 2F_2(x)}{h^2} \\
&= \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{F(x+2h) + F(x-2h) - 2F(x)}{4h^2} \\
&- \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{F_1(x+2h) + F_1(x-2h) - 2F_1(x)}{h^2} \\
&f(x) - f(x) = 0
\end{aligned}$$

, donc $F_2 = \frac{F}{4} - F_1$ est affine et par suite $F_2" = 0$, d'où $F" = 4F_1'' = 4f$.

c) f est 2π-périodique en tant que limite simple de fonctions 2π-périodique.
Calculons les coéfficients de Fourier associés à f.

$$\begin{aligned}
a_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} (a_p \cos(pt) + b_p \sin(pt)) \cos(nt)dt
\end{aligned}$$

Aprés avoir justifié la permutation des signes somme et intégrale

$$= \frac{1}{\pi} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_p \int_{-\pi}^{\pi} \cos(pt)\cos(nt)dt + b_p \int_{-\pi}^{\pi} \sin(pt)\cos(nt)dt \right)$$

Or $\cos(pt)\cos(nt) = \frac{1}{2}(\cos(p+n)t + \cos(p-n)t)$, donc :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(pt)\cos(nt)dt = \begin{array}{l} \pi \text{ si } n = p \\ 0 \text{ si } n \neq p \end{array}$$

et $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(pt)\cos(nt)dt = 0$, comme integrale sur $[-\pi, \pi]$ d'une fonction impaire.
Donc $a_n(f) = a_n$ et de même on montre que $b_n(f) = b_n$.

III. Séries trigonométriques impaires.

A- Une application à l'étude précédente.

1) Pour tout réel, x fixé on a $\lim_{n \longrightarrow +\infty} v_n(x) = 0$, en tant que terme général d'une série numérique convergente, et d'aprés la partie **I.B** on peut affirmer que $\lim_{n \longrightarrow +\infty} b_n = 0$.

2) La suite (b_n) est bornée par un réel M, car convergente, donc

$$\begin{aligned}
\left| \frac{v_n(x)}{n^2(n^2+1)} \right| &= \left| \frac{b_n \sin(nx)}{n^2(n^2+1)} \right| \\
&\leq \frac{M}{n^2(n^2+1)} \\
&\leq \frac{M}{n^4}
\end{aligned}$$

et $\frac{1}{n^4}$ est le terme général d'une série de Rieman convergente, donc $\sum_{n \geq 1} \frac{v_n(x)}{n^2(n^2+1)}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

D'autre part :

$$\begin{aligned}
\left| \frac{v_n'(x)}{n^2(n^2+1)} \right| &= \left| \frac{nb_n \cos(nx)}{n^2(n^2+1)} \right| \\
&\leq \frac{M}{n(n^2+1)} \\
&\leq \frac{M}{n^3}
\end{aligned}$$

et $\frac{1}{n^3}$ est le terme général d'une série de Rieman convergente, donc $\sum_{n \geq 1} \frac{v_n'(x)}{n^2(n^2+1)}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, et enfin

$$\begin{aligned}
\left| \frac{v"_n(x)}{n^2(n^2+1)} \right| &= \left| -\frac{n^2 b_n \sin(nx)}{n^2(n^2+1)} \right| \\
&\leq \frac{M}{(n^2+1)} \\
&\leq \frac{M}{n^2}
\end{aligned}$$

et $\frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série de Rieman convergente, donc $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{v``_n(x)}{n^2(n^2+1)}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Et ainsi on peut dériver sous le signe somme, d'où $\psi$ est de classe $\mathcal{C}^2$, avec : $\displaystyle\psi``(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{v''_n(x)}{n^2(n^2+1)}=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n\sin(nx)}{n^2+1}$.

3) g est bien définie car elle converge normalement d'aprés la question précédente, d'autre part $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n\sin``(nx)}{n^2}=-f(x)$ converge simplement et continue, donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n\sin(nx)}{n^2}$ est de classe $\mathcal{C}^2$, et aussi $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n\sin(nx)}{n^2(n^2+1)}=\psi(x)$, avec la possibilité de dériver sous le signe somme, donc g est de classe $\mathcal{C}^2$, avec :

$$\begin{aligned}
g``(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n\sin``(nx)}{n^2}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n\sin``(nx)}{n^2(n^2+1)}\\
&= -\sum_{n=1}^{+\infty}b_n\sin(nx)+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n\sin(nx)}{n^2+1}\\
& -f(x)+g(x)
\end{aligned}$$

et donc $-g``+g=f$.

4) La solution générale est de la forme $y=y_H+y_0$ où y_H solution générale de l'équation sans second membre $-y``+y=0$, alors $y_H(x)=Ae^x+Be^{-x}$ et $y_0$ solution particulière avec second membre $-y``+y=f$, d'aprés la question précédente g en est une, donc on peut prendre $y_0=g$, d'où $y(x)=Ae^x+Be^{-x}+g(x)$, or $y(0)=y(\pi)=0$ et $y(0)=y(\pi)=0$, d'où $y=g$.

B- Cas où la suite $(b_n)_{n\geq 1}$ des coéfficients est décroissante.

1) a)

$$\begin{aligned}
A_n(x)+iB_n(x) &= \sum_{k=1}^{n}\cos(kx)+i\sin(kx)\\
&= \sum_{k=1}^{n}e^{ikx}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(e^{ix}\right)^k
\end{aligned}$$

Somme d'une suite géometrique de raison e^{ix}

$$=\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}e^{ix}$$

D'autre part en utilisant la relation $1-e^{i\theta}=-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$, on a :

$$\begin{aligned}
A_n(x)+iB_n(x) &= \frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}e^{ix}\\
&= \frac{-2i\sin\left(\frac{nx}{2}\right)e^{i\frac{nx}{2}}}{-2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}}e^{ix}\\
&= \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}e^{i(n+1)\frac{x}{2}}\\
&= \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\left(\cos\left((n+1)\frac{x}{2}\right)+i\sin\left((n+1)\frac{x}{2}\right)\right)
\end{aligned}$$

D'où $\displaystyle B_n(x)=\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\sin\left((n+1)\frac{x}{2}\right)$,

$$A_n(x)=\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\cos\left((n+1)\frac{x}{2}\right)$$

donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}+A_n(x) &= \frac{2\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cos\left((n+1)\frac{x}{2}\right)+\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\\
&= \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}
\end{aligned}$$

En utilisant la formule $2\sin a\cos b=\sin(a+b)-\sin(a-b)$.

b) Il faut ajouter dans la question ceci : $x\notin 2\pi\mathbb{Z}$, dans ce cas $\displaystyle|B_n(x)|\leq\frac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|}$ nombre réel qui ne dépond pas de n.

2) a) $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kx) &= \sum_{k=1}^{n} b_k(B_k(x) - B_{k-1}(x)) \\ &= \sum_{k=1}^{n} b_k B_k(x) - \sum_{k=1}^{n} b_k B_{k-1}(x)\end{aligned}$$

On remplace $k-1$ par k dans la 2ème somme

$$\begin{aligned}&= \sum_{k=1}^{n} b_k B_k(x) - \sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1} B_k(x) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1}(b_k - b_{k+1}) B_k(x) + b_n B_n(x) \qquad \text{car } B_0 = 0\end{aligned}$$

b) $$\sum_{p=1}^{n-1} |(b_p - b_{p+1}) B_p(x)| \leq \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|} \sum_{p=1}^{n-1} |b_p - b_{p+1}|$$

Et comme la suite$(b_p)_{p\geq 1}$ est décroissante vers 0.

$$= \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|} \sum_{p=1}^{n-1} b_p - b_{p+1}$$

On se retrouve devant une somme télescopique.

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|} b_0 - b_n \\ &\leq \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|} b_0\end{aligned}$$

D'où la convergence absolue.

c) D'aprés **2.1** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k(x) = \sum_{k=1}^{n-1}(b_k - b_{k+1}) B_k(x) + b_n B_n(x)$, avec $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(b_k - b_{k+1}) B_k(x)$ qui converge absolument, $(B_n(x))_{n\geq 1}$ qui est bornée et $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} b_n = 0$, d'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k(x)$ converge simplement dont la somme est impaire et 2π-périodique, en tant que limite simple de fonctions impaires et 2π-périodiques.

3) Un exemple.

a) D'aprés la question **III.B.1.1** on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = -\frac{1}{2} + \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)},$$ on integre cette inégalité entre x et π et on obtient : $$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2} - \frac{1}{2}\int_x^{\pi} \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt$$

b) Ca découle d'un résultat classique dont l'énoncé est le suivant :

Si φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\lim_{\lambda\longrightarrow+\infty} \int_a^b \varphi(t)\sin(\lambda t)dt = 0$

En effet, en posant $u' = sin(\lambda t)dt$ $\quad u = -\dfrac{cos(\lambda t)}{\lambda}$,

$v = \varphi(t)$ $\quad v' = \varphi'(t)$

$M_0(\varphi) = \displaystyle\sup_{[a,b]} |\varphi(t)|$ et $M_1(\varphi) = \displaystyle\sup_{[a,b]} |\varphi'(t)|$ On aura :

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b \varphi(t)\sin(\lambda t)dt\right| &= \left|\left[-\frac{cos(\lambda t)}{\lambda}\varphi(t)\right]_{t=a}^{t=b} + \int_a^b \frac{cos(\lambda t)}{\lambda}\varphi'(t)dt\right| \\ &\leq \frac{2M_0}{\lambda} + \frac{M_1(b-a)}{\lambda} \longrightarrow 0\end{aligned}$$

quand $\lambda \longrightarrow +\infty$

Et donc $S(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2}$.

c) $S(0) = \dfrac{\pi}{2}$, ainsi S est discontinue en 0, car $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k0)}{k} = 0$.

4) Une condition nécessaire de continuité.

a) $$\begin{aligned}G(-\theta) &= \int_0^{-\theta} f(t)dt \\ &= -\int_0^{\theta} f(-u)du \quad \text{On pose } u = -t \\ &= \int_0^{\theta} f(u)du \qquad f \text{ est impaire.} \\ &= G(\theta)\end{aligned}$$.

D'autre part :

$$
\begin{aligned}
G(\theta+2\pi) &= \int_0^{\theta+2\pi} f(t)dt \\
&= \int_0^{2\pi} f(t)dt + \int_{2\pi}^{\theta+2\pi} f(t)dt && \text{Relation de Chasles.} \\
&= \int_0^{2\pi} f(u)du + G(\theta) && u=t-2\pi, \\
& && f\ 2\pi-\text{périodique.} \\
&= \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nu)du + G(\theta) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \int_0^{2\pi} \sin(nu)du + G(\theta) \\
&= G(\theta)
\end{aligned}
$$

b) Dans cette question il s'agit d'un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0, comme G est de classe $\mathcal{C}^1$, en tant que primitive d'une fonction continue, alors ce développement est $G(\theta) = G(0)+\theta G'(0)+o(\theta)$, or $G(0)=0$ et $G'(0)=f(0)=0$ car f impaire. donc $G(\theta)=o(\theta)$.

c)
$$
\begin{aligned}
a_n(G) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(t)\cos(nt)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^t f(u)du\right)\cos(nt)dt
\end{aligned}
$$

On utuilise Fubini pour permuter les deux intégrales avec $-\pi \le u \le t \le \pi$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\left(\int_u^{\pi}\cos(nt)dt\right)du \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sin(nt)du \\
&= -\frac{b_n}{n}
\end{aligned}
$$

D'autre part $b_n(G) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} G(t)\sin(nt)dt = 0$ car $t\mapsto G(t)\sin(nt)$ est impaire puisque G paire.

d) Ainsi la série de Fourier associée à G est $\left(-\displaystyle\sum_{n\ge1}\frac{b_n}{n}\cos(nx)\right)$, elle converge simplement vers $G(x)-\dfrac{a_0(G)}{2}$, puisque G est de classe $\mathcal{C}^1$, ici il faut faire attention le $a_0(G)$ définie dans l'énoncé n'est pas le coéfficient de Fourier pour $n=0$ car ce dernier est donné par la formule $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} G(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(t)dt = \frac{a_0(G)}{2}$, puisque G est paire.

Pour $x=0$ la série $\left(\displaystyle\sum_{n\ge1}\frac{b_n}{n}\right)$ est convergente dont la somme est $\dfrac{a_0(G)}{2}$.

e) i. On a : $E\left(\dfrac{k}{2}\right) = \dfrac{k}{2}$ si k pair
$= \dfrac{k-1}{2}$ si k impair .

Dans tous les cas : $E\left(\dfrac{k}{2}\right) \ge \dfrac{k-1}{2}$, si $E\left(\dfrac{k}{2}\right)+1 \le n \le k$, alors $\dfrac{k+1}{2} \le n \le k$, donc $\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2k} \le \dfrac{n\pi}{k} \le \pi$, et alors $\dfrac{\pi}{2} \le \dfrac{n\pi}{k} \le \pi$, donc $\cos\left(\dfrac{n\pi}{k}\right) \le 0$. Et donc $1-\cos\left(\dfrac{n\pi}{k}\right) \ge 1$, d'où $\dfrac{b_n}{n}\left(1-\cos\left(\dfrac{n\pi}{k}\right)\right) \ge \dfrac{b_n}{n}$, or $E\left(\dfrac{k}{2}\right)+1 \le n \le k$, donc $\dfrac{1}{n} \ge \dfrac{1}{k}$ et (b_n) est décroissante, donc $b_n \ge b_k$, d'où

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=E\left(\frac{k}{2}\right)+1}^{k} \frac{b_n}{n}\left(1-\cos\left(\frac{n\pi}{k}\right)\right) &\ge \sum_{n=E\left(\frac{k}{2}\right)+1}^{k} \frac{b_k}{k} \\
&\ge \left(k-E\left(\frac{k}{2}\right)\right)\frac{b_k}{k} \\
&\ge \frac{b_k}{2}
\end{aligned}
$$

car $E\left(\dfrac{k}{2}\right) \le \dfrac{k}{2}$, donc $k-E\left(\dfrac{k}{2}\right) \ge \dfrac{k}{2}$

ii. $$\begin{aligned} G\left(\frac{\pi}{k}\right) &= \frac{a_0(G)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(G)\cos\left(\frac{n\pi}{k}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n}\cos\left(\frac{n\pi}{k}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n}\left(1-\cos\left(\frac{n\pi}{k}\right)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi} \quad G\left(\frac{\pi}{k}\right) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n}\left(1-\cos\left(\frac{n\pi}{k}\right)\right) \\ &\geq \sum_{n=E\left(\frac{k}{2}\right)+1}^{k} \frac{b_n}{n}\left(1-\cos\left(\frac{n\pi}{k}\right)\right) \\ &\geq \frac{b_k}{2} \end{aligned}$$

Et donc $0 \leq \dfrac{b_k}{2} \leq G\left(\dfrac{\pi}{k}\right) = o\left(\dfrac{\pi}{k}\right)$, d'où $0 \leq nb_n \leq 2o(\pi) = o(1)$, donc $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} nb_n = 0$.

$$\boxed{\text{Fin du corrigé.}}$$