

1<sup>ère</sup> Partie.

Résultats préliminaires.

**A-Calcul de la dimension d'un sous espace vectoriel de  $E$ .**

- 1) Conclusion immédiate du théorème de décomposition des noyaux car  $(X - \lambda)^p \wedge Q = 1$ , puisque  $Q(\lambda) \neq 0$  et du fait que  $(u - \lambda I_E)^p$  et  $Q(u)$  commutent avec  $u$  car sont des polynômes en  $u$ , donc leurs noyaux sont stables par  $u$ .
- 2) a)  $\forall x \in F_\lambda = \ker(u - \lambda I_E)^p$ , on a :  $(v - \lambda I_E)^p(x) = (u - \lambda I_E)^p(x) = 0_E$ , donc  $v - \lambda I_E$  est nilpotent, en particulier  $\chi_{v - \lambda I_E}(X) = (-1)^d X^d$ , où  $d = \dim F_\lambda$ .
  - b) 
$$\begin{aligned} \chi_v(X) &= \det(v - XI_E) \\ &= \det(v - \lambda I_E - (X - \lambda)I_E) \\ &= \chi_{v - \lambda I_E}(X - \lambda) \\ &= (-1)^d (X - \lambda)^d \end{aligned}$$

On a  $E = F_\lambda \oplus \ker Q(u)$  avec  $F_\lambda, \ker Q(u)$  stables par  $u, v = u|_{F_\lambda}$  et  $w = u|_{\ker Q(u)}$ , donc  $\chi_u = \chi_v \cdot \chi_w = (-1)^d (X - \lambda)^d \chi_w$ .
  - c) D'après ce qui précède on a :  $\chi_u = (-1)^d (X - \lambda)^d \chi_w = (X - \lambda)^p Q$ , ainsi  $(X - \lambda)^p$  divise  $(X - \lambda)^d \chi_w$ , or  $(X - \lambda)^p \wedge \chi_w = 1$ , car  $\chi_w(\lambda) \neq 0$ , d'où  $(X - \lambda)^p$  divise  $(X - \lambda)^d$ , donc  $p \leq d$ , de même et puisque  $Q(\lambda) \neq 0$ , on a aussi  $(X - \lambda)^d$  divise  $(X - \lambda)^p$ , donc  $p \geq d$ , d'où l'égalité.

**B-Un résultat sur le polynôme minimal.**

- 1) Posons  $\mathcal{J}_x = \{P \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que : } P(u)(x) = 0\}$ , on vérifie facilement, tenant compte de la relation  $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$ , que  $\mathcal{J}_x$  est un idéal non nul de  $\mathbb{K}[X]$  car contient  $\pi_u$ , donc engendré par un unique polynôme unitaire de degré minimal noté  $\pi_{x,u}$  qui vérifie  $\pi_{x,u}(u)(x) = 0_E$ , car  $\pi_{x,u} \in \mathcal{J}_x$  et qui divise  $\pi_u$  car  $\pi_u \in \mathcal{J}_x$  et  $\pi_{x,u}$  engendre  $\mathcal{J}_x$ .
- 2)  $\{\pi_{x,u} \text{ tel que : } x \in E, x \neq 0_E\}$  est fini car inclu dans  $\{P \in \mathbb{K}[X] \text{ qui divisent } \pi_u\}$  qui est fini.
- 3) Posons  $\pi = \bigvee_{x \neq 0_E} \pi_{x,u}$ , ce polynôme a bien un sens car  $\{\pi_{x,u} \text{ tel que : } x \in E, x \neq 0_E\}$  est fini, et il est divisible par tous les polynômes  $\pi_{x,u}$ , donc  $\pi(u)(x) = 0, \forall x \in E$ , d'où  $\pi_u = P_1^{\alpha_1} \dots P_r^{\alpha_r}$  divise  $\pi$ , car  $\pi$  polynôme annulateur de  $u$ , donc  $\forall 1 \leq i \leq r, P_i^{\alpha_i}$  divise  $\pi$ , donc  $\exists x \in E$  tel que :  $x \neq 0_E$ , qu'on notera  $y_i$  tel que :  $P_i^{\alpha_i}$  divise  $\pi_{y_i,u}$ , car  $P_i$  est irréductible.  
Comme  $\pi_u(u) = 0 = P_i^{\alpha_i}(u) \circ \prod_{j \neq i} P_j^{\alpha_j}(u)$ , alors  
$$E = \text{Ker } P_i^{\alpha_i}(u) \oplus \text{Ker } \prod_{j \neq i} P_j^{\alpha_j}(u) \text{ donc } y_i = x_i + z_i, \text{ avec}$$
  
$$x_i \in \text{Ker } P_i^{\alpha_i}(u), z_i \in \text{Ker } \prod_{j \neq i} P_j^{\alpha_j}(u).$$
  
Supposons  $x_i = 0_E$ , alors  $y_i = z_i \in \text{Ker } \prod_{j \neq i} P_j^{\alpha_j}(u)$ , donc  
$$\prod_{j \neq i} P_j^{\alpha_j}(u)(y_i) = 0_E, \text{ d'où } \pi_{y_i,u} \text{ divise } \prod_{j \neq i} P_j^{\alpha_j}, \text{ or } P_i^{\alpha_i} \text{ divise } \pi_{y_i,u}, \text{ donc}$$
  
divise aussi  $\prod_{j \neq i} P_j^{\alpha_j}$ , impossible car les  $P_j^{\alpha_j}$  sont premiers entre eux deux à deux puisque les  $P_i$  sont irréductibles deux à deux distincts. Donc  $x_i \neq 0_E$ .

Montrons maintenant que  $\pi_{x_i, u} = P_i^{\alpha_i}$ , en effet  $R = \pi_{x_i, u}$  divise  $P_i^{\alpha_i}$  car  $x_i \in \text{Ker} P_i^{\alpha_i}(u)$ , mais aussi  $S = \pi_{x_i, u}$  divise  $\prod_{j \neq i} P_j^{\alpha_j}$ , pour la même raison, donc  $R \wedge S = 1$ , en utilisant la question suivante on aura  $P_i^{\alpha_i}$  divise  $\pi_{y_i, u} = RS$  et  $P_i^{\alpha_i} \wedge S = 1$ , donc  $P_i^{\alpha_i}$  divise  $R$ , d'où l'égalité.

- 4) Supposons  $x + y = 0$ , donc  $y = -x$  et par suite  $R(u)(y) = -R(u)(x) = 0$ , donc  $S = \pi_{y, u}$  divise  $R$ , absurde.

D'autre part :  $(RS)(u)(x + y) = R(u) \circ S(u)(x + y) = R(u) \circ S(u)(x) + S(u) \circ R(u)(y) = 0$ , car  $R(u)$  et  $S(u)$  commutent, donc  $\pi_{x+y, u}$  divise  $RS$ . Or  $\pi_{x+y}(u)(x + y) = 0$ , donc  $\pi_{x+y}(u)(y) = -\pi_{x+y}(u)(x)$ , d'où  $(R\pi_{x+y, u})(u)(y) = R(u) \circ \pi_{x+y, u}(u)(y) = -R(u) \circ \pi_{x+y, u}(u)(x) = -\pi_{x+y, u}(u) \circ R(u)(x) = 0$ , donc  $S = \pi_{y, u}$  divise  $R\pi_{x+y, u}$ , or  $S \wedge R = 1$ , d'où  $S$  divise  $\pi_{x+y, u}$ , de même  $R$  divise  $\pi_{x+y, u}$  et comme  $S \wedge R = 1$ , alors  $RS$  divise  $\pi_{x+y, u}$ , d'où l'égalité.

- 5) Prendre  $e = x_1 + \dots + x_r$ .

## 2<sup>ème</sup> Partie

Étude de  $\mathcal{C} = \{u \in \mathcal{L}(E) \text{ tel que : } \deg \pi_u = n - 1\}$

### A-Le cas d'un endomorphisme nilpotent.

- 1)  $x \in \text{Ker} v^k \implies v^k(x) = 0 \implies v^{k+1}(x) = v(0) = 0 \implies x \in \text{Ker} v^{k+1}$ .

Comme on a déjà  $\text{Ker} v^{k+1} \subset \text{Ker} v^{k+2}$ , il suffit de montrer l'autre inclusion.

En effet,  $x \in \text{Ker} v^{k+2} \implies v^{k+2}(x) = v^{k+1}(v(x)) = 0$   
 $\implies v(x) \in \text{Ker} v^{k+1} = \text{Ker} v^k$   
 $\implies v^k(v(x)) = v^{k+1}(x) = 0$   
 $\implies x \in \text{Ker} v^{k+1}$

- 2) Utilisons la contraposée de l'implication précédente, donc  $v^{n-1} = 0, v^{n-2} \neq 0 \implies E = \text{Ker} v^{n-1} \neq \text{Ker} v^{n-2}$ ,  
 $\implies \text{Ker} v^{n-2} \neq \text{Ker} v^{n-3}$

⋮

$\implies \{0\} = \text{Ker} v^0 \neq \text{Ker} v$

or  $\{0\} \subset \text{Ker} v \subset \dots \subset \text{Ker} v^{n-1} = E$ , donc les inclusions sont strictes.

- 3) Montrer  $k \leq \text{Ker} v^k$ , par récurrence sur  $k$  en utilisant le fait que  $\dim \text{Ker} v^k < \dim \text{Ker} v^{k+1}$ , donc  $\dim \text{Ker} v^k + 1 \leq \dim \text{Ker} v^{k+1}$ .

Montrer  $\text{Ker} v^k \leq k$ , par récurrence descendante sur  $k$  en utilisant le fait que  $\dim \text{Ker} v^{k-1} < \dim \text{Ker} v^k$ , donc  $\dim \text{Ker} v^{k-1} \leq \dim \text{Ker} v^k - 1$ .

- 4) Si  $\text{Ker} v^{p+1} = \text{Ker} v^p \oplus F$ , alors  $\dim F = 2$ .

De plus  $v|_F : F \longrightarrow v(F)$  est bijective car  $\text{Ker} v|_F = F \cap \text{Ker} v \subset F \cap \text{Ker} v^p = \{0\}$ , donc  $\dim v(F) = \dim F = 2$

$$\begin{aligned} x \in F &\implies v^{p+1}(x) = 0 && \text{car } F \subset \text{Ker} v^{p+1} \\ &\implies v(x) \in \text{Ker} v^p && \text{car } v^p(v(x)) = 0 \end{aligned}$$

Donc  $v(F) \subset \text{Ker} v^p$ , mais aussi  $\text{Ker} v^{p-1} \subset \text{Ker} v^p$ , donc  $\text{Ker} v^{p-1} + v(F) \subset \text{Ker} v^p$ .

D'autre part :

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker} v^{p-1} \cap v(F) &\implies \exists x' \in F \text{ tel que : } x = v(x') \text{ et } v^{p-1}(x) = 0 \\ &\implies \exists x' \in F \text{ tel que : } x = v(x') \text{ et } v^p(x') = 0 \\ &\implies \exists x' \in F \cap \text{Ker} v^p \text{ tel que : } x = v(x') \\ &\implies x = 0 \end{aligned}$$

$$\text{car } x = v(x') \text{ tel que : } x' \in F \cap \text{Ker} v^p = \{0\}$$

Ainsi  $\text{Ker} v^{p-1} \cap v(F) = \{0\}$ , d'où  $\text{Ker} v^{p-1} \oplus v(F) \subset \text{Ker} v^p$ , et donc  $\dim \text{Ker} v^p \geq \dim \text{Ker} v^{p-1} + \dim v(F) = \dim \text{Ker} v^{p-1} + 2$ . Or  $\dim \text{Ker} v^{p-1} \geq p - 1$ , d'où  $\dim \text{Ker} v^{p-1} \leq p - 2$ , or  $\dim \text{Ker} v^{p-1} \geq p - 1$ , absurde.

- 5) D'après la question 3) on a :

$0 \leq \dim (\text{Ker} v^{k+1}) - \dim (\text{Ker} v^k) \leq 2$ , d'après les questions précédentes on a  $\dim (\text{Ker} v^{k+1}) - \dim (\text{Ker} v^k) \notin \{0, 2\}$ , donc  $\dim (\text{Ker} v^{k+1}) = \dim (\text{Ker} v^k) + 1$ , or  $\dim (\text{Ker} v^{n-1}) = n$  car  $\text{Ker} v^{n-1} = E$ , donc par récurrence descendante on montre facilement que  $\dim (\text{Ker} v^k) = k + 1$ .

- 6) Supposons  $\text{Ker} v \subset \text{Im} v$ , et soit  $F$  un supplémentaire de  $\text{Ker} v$  dans  $\text{Im} v$ , donc  $\text{Im} v = \text{Ker} v \oplus F$ , d'où

$$\text{Im} v^2 = v(\text{Im} v) = v(F) = \text{Im} v|_F \text{ et}$$

$\text{Ker} v|_F = F \cap \text{Ker} v = \{0\}$ , d'après la formule du rang appliquée à  $v|_F$ , on conclut que :  $\dim F = \dim \text{Im} v^2 = n - \dim \text{Ker} v^2 = n - 3$  mais aussi,  $\dim F = \dim \text{Im} v - \dim \text{Ker} v = n - 2 - 2 = n - 4$ , absurde.

7) a) Si on montre que  $\{y, v(y), \dots, v^{n-2}(y)\}$  est libre, alors  $\dim H = n-1$ .  
En effet : Soit  $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-2}$  tel que :  $\lambda_0 y + \dots + \lambda_{n-2} v^{n-2}(y) = 0$ ,  
composons par  $v^{n-2}$ , donc  $\lambda_0 v^{n-2}(y) = 0$ , car  $v^{n-1} = 0$  et donc  
 $v^k = 0, \forall k \geq n-1$ , or  $v^{n-2}(y) \neq 0$ , car  $y \notin \text{Ker} v^{n-2}$ , donc  $\lambda_0 = 0$ ,  
en composant après par  $v^{n-3}$ , on trouve  $\lambda_1 = 0$  et ainsi de suite.

b) Soit  $x \in H \cap \mathbb{K}x_0$ , donc  $x = \lambda x_0 = \lambda_0 y + \dots + \lambda_{n-2} v^{n-2}(y)$ , or  $x_0 \in \text{Ker} v$ , donc  $x$  aussi d'où  $v(x) = 0$  mais surtout  $v^{n-2}(x) = 0$ , en reprenant la même démarche que dans la question précédente, on montre que tous les  $\lambda_i$  sont nuls donc  $x = 0$ , donc  $H \cap \mathbb{K}x_0 = \{0\}$ , ainsi leur somme est directe, de plus  $\dim \mathbb{K}x_0 = 1$ , donc  $\dim (H \oplus \mathbb{K}x_0) = n$  donc  $H \oplus \mathbb{K}x_0 = E$ .

Montrons maintenant  $H$  et  $\mathbb{K}x_0$  sont stables par  $v$ .

Soit  $x \in H$ , donc  $x = \lambda_0 y + \dots + \lambda_{n-2} v^{n-2}(y)$ , d'où  
 $v(x) = \lambda_0 v(y) + \dots + \lambda_{n-3} v^{n-2}(y) \in H$ , car  $v^{n-1} = 0$ .

Soit  $x \in \mathbb{K}x_0$ , donc  $x = \lambda x_0$ , d'où  $v(x) = 0 \in \mathbb{K}x_0$  car  $x_0 \in \text{Ker} v$ .

c)  $\mathcal{B} = \{y, v(y), \dots, v^{n-2}(y), x\}$  est une base de  $E$  car réunion de deux bases de  $H$  et  $\mathbb{K}x_0$  avec  $H \oplus \mathbb{K}x_0 = E$ . Dans ce cas

$$J = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

### B- Cas général.

1) a) D'après la forme de  $M$ , on a :  
 $u(e_1) = e_2, \dots, u(e_{n-2}) = e_{n-1}, u(e_{n-1}) = \alpha_0 e_1 + \dots + \alpha_{n-2} e_{n-1}$  et  
enfin  $u(e_n) = \alpha e_n$ . Donc  $u^2(e_1) = u(e_2) = e_3$  et par récurrence  
sur  $1 \leq k \leq n-2$ , on montre que  $u^k(e_1) = e_{k+1}$  et enfin  
 $u^{n-1}(e_1) = u(u^{n-2}(e_1)) = u(e_{n-1}) = \alpha_0 e_1 + \dots + \alpha_{n-2} e_{n-1}$ .

$$\begin{aligned} \text{b) } R(u)(e_1) &= u^{n-1}(e_1) - \sum_{k=0}^{n-2} \alpha_k u^k(e_1) \\ &= \alpha_0 e_1 + \dots + \alpha_{n-2} e_{n-1} - \sum_{k=0}^{n-2} \alpha_k e_{k+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Pour  $k \in \{2, \dots, n-1\}$ , on a  $e_k = u^{k-1}(e_1)$ , donc  $R(u)(e_k) = R(u) \circ u^{k-1}(e_1) = u^{k-1} \circ R(u)(e_1) = 0$ .

D'autre part  $u(e_n) = \alpha e_n$ , donc  $u^k(e_n) = \alpha^k e_n$  et  $R(u)(e_n) = R(\alpha)(e_n) = 0$  car  $\alpha$  racine de  $R$ .

Ainsi  $R(u)$  s'annule sur une base de  $E$ , donc sur  $E$ , d'où  $R(u) = 0$ , donc  $R$  est un polynôme annulateur de  $u$ .

c) Supposons  $\deg \pi_u \leq n-2$ , donc  $\pi_u = \lambda_0 + \dots + \lambda_{n-2} X^{n-2}$ , avec les  $\lambda_k$  non tous nuls. Or  $\pi_u(e_1) = 0$  et  $u^k(e_1) = e_{k+1}$ , donc  $\lambda_0 e_1 + \dots + \lambda_{n-2} e_{n-1} = 0$ , avec les  $\lambda_k$  non tous, donc la famille  $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$  est liée, absurde car incluse dans une base. D'après la question précédente on a  $\pi_u$  divise  $R$ , et  $\deg R = n-1$ , donc  $\deg \pi_u \leq n-1$ , or  $\deg \pi_u \geq n-1$ , donc  $\deg \pi_u = \deg R = n-1$ , or  $\pi_u$  divise  $R$  et sont tous les deux unitaires donc égaux. D'où  $u \in \mathcal{C}$ .

d) En développant suivant la dernière ligne, on trouve que

$$\chi_u = (\alpha - X)\chi_{M'} \text{ où } M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & \alpha_{n-3} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \alpha_{n-2} \end{pmatrix},$$

matrice classique appelée matrice compagnon dont le polynôme caractéristique est exactement  $(-1)^{n-1}R$ , formule qu'on obtient en développant le déterminant suivant la dernière colonne.

D'où  $\chi_u = (-1)^n(X - \alpha)R$ .

2) a)  $\pi_u$  qui est unitaire de degré  $n-1$  divise  $\chi_u$  de degré  $n$  et de coefficient dominant  $(-1)^n$ , donc  $\chi_u = (-1)^n(X - \alpha)\pi_u$ , or  $\chi_u$  et  $\pi_u$  ont les mêmes racines qui sont les valeurs propres de  $u$ , donc  $\alpha$  qui est racine de  $\chi_u$  est aussi racine de  $\pi_u$ .

b) On a  $\chi_u = (X - \alpha)^k Q$  et  $Q \wedge (X - \alpha)^k = 1$  car  $Q(\alpha) \neq 0$ ,

or  $\chi_u(u) = 0$ , d'après le théorème des noyaux on conclut que :  
 $E = \text{Ker}\chi_u(u) = \text{Ker}(u - \alpha I_E)^k \oplus \text{Ker}Q(u)$ .

De façon pareille puisque,  $\pi_u = (X - \alpha)^{k-1}Q$  et  $\pi_u(u) = 0$ , on a aussi  $E = \text{Ker}(u - \alpha I_E)^{k-1} \oplus \text{Ker}Q(u)$ .

En utilisant l'inégalité précédente on conclut que :

$\dim \text{Ker}(u - \alpha I_E)^k = \dim \text{Ker}(u - \alpha I_E)^{k-1}$ , or  $\text{Ker}(u - \alpha I_E)^{k-1} \subset \text{Ker}(u - \alpha I_E)^k$ , d'où l'égalité.

D'autre part, supposons que

$\text{Ker}(u - \alpha I_E)^{k-2} = \text{Ker}(u - \alpha I_E)^{k-1}$ , donc

$E = \text{Ker}(u - \alpha I_E)^{k-2} \oplus \text{Ker}Q(u) = \text{Ker}(u - \alpha I_E)^{k-2} \circ Q(u)$ , d'après le théorème des noyaux, ainsi  $(X - \alpha)^{k-2}Q$  est un polynôme annulateur de  $u$  donc divisible par  $\pi_u = (X - \alpha)^{k-1}Q$  ce qui est impossible, donc  $\text{Ker}(u - \alpha I_E)^{k-2} \neq \text{Ker}(u - \alpha I_E)^{k-1}$ , or  $\text{Ker}(u - \alpha I_E)^{k-2} \subset \text{Ker}(u - \alpha I_E)^{k-1}$ , d'où l'inclusion est stricte.

c) i.  $\forall x \in \text{Ker}(u - \alpha I_E)^k = \text{Ker}(u - \alpha I_E)^{k-1}$ , on a  $(u - \alpha I_E)^{k-1}(x) = 0$ , donc  $v^k(x) = 0$ .

Or  $\text{Ker}(u - \alpha I_E)^{k-2} \neq \text{Ker}(u - \alpha I_E)^{k-1}$  donc  $v^{k-2} \neq 0$ .

ii. Raisonner de façon pareille que dans la question II.A.7

d) On a  $H_1 \subset \text{Ker}(u - \alpha I_E)^k$  donc

$H_1 \cap \text{Ker}Q(u) \subset \text{Ker}(u - \alpha I_E)^k \cap \text{Ker}Q(u) = \{0\}$  car  $(X - \alpha)^k \wedge Q = 1$  puisque  $Q(\alpha) \neq 0$ , donc la somme  $H_1 + \text{Ker}Q(u)$  est directe. Or  $E = \text{Ker}(u - \alpha I_E)^k \oplus \text{Ker}Q(u) = \mathbb{K}x_0 \oplus H_1 \oplus \text{Ker}Q(u) = \mathbb{K}x_0 \oplus H$ , avec  $H = H_1 + \text{Ker}Q(u)$  stable par  $u$  en tant que somme de deux sous espace vectoriel stables par  $u$ .

e) i. Soit  $\mathcal{B}'$  une base de  $H$ , alors  $\mathcal{B} = \{x_0\} \cup \mathcal{B}'$  est une base de  $E$  avec

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(w) & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \text{ et ceci car } u(x_0) = \alpha x_0, u = w$$

sur  $H$  qui est stable par  $u$ . Donc  $\chi_u = (\alpha - X)\chi_w$ .

Or  $\chi_u = (-1)^n(X - \alpha)^kQ$ , donc  $\chi_w = (-1)^{n-1}(X - \alpha)^{k-1}Q = (-1)^{n-1}\pi_u$  et  $\pi_u(\alpha) = 0$ , donc  $\chi_w(\alpha) = 0$ , or  $\pi_w$  et  $\chi_w$  ont les mêmes racines, donc  $\pi_w(\alpha) = 0$ .

ii. D'abord  $\pi_w(u) = 0$  sur  $H$ , car  $w = u$  sur  $H$ , d'autre part, comme

$u(x_0) = \alpha x_0$ , alors  $\pi_w(u)(x_0) = \pi_w(\alpha)x_0 = 0$ , donc  $\pi_w(u) = 0$  sur  $\mathbb{K}x_0$ , et comme  $E = \mathbb{K}x_0 \oplus H$ , alors  $\pi_w(u) = 0$ .

Ainsi  $\pi_u$  divise  $\pi_w$ , or  $\deg \pi_u = n - 1$  car  $u \in \mathcal{C}$ , d'où  $\deg \pi_w \geq n - 1$  et comme  $w$  est un endomorphisme de  $H$  et  $\dim H = n - 1$ , alors  $\deg \pi_w \leq n - 1$ , d'où l'égalité.

f) Soit  $e \in H$  tel que :  $\pi_{e,w} = \pi_w$ , et supposons que la famille  $\{e, w(e), \dots, w^{n-2}(e)\}$  est liée, donc ils existent des coefficients  $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-2}$  non tous nuls tels que  $\lambda_0 e + \lambda_1 w(e) + \dots + \lambda_{n-2} w^{n-2}(e) = 0$ , donc  $P(u)(e) = 0$  avec  $P(X) = \lambda_0 + \lambda_1 X + \dots + \lambda_{n-2} X^{n-2}$  de degré inférieur à  $n - 2$ , or  $\deg \pi_{e,w} = n - 1$  ce qui contredit le fait que  $\deg \pi_{e,w}$  est un polynôme annulateur pour  $e$  de degré minimal. Ainsi  $\mathcal{B} = \{e, w(e), \dots, w^{n-2}(e)\}$  est libre dans  $H$  de cardinal  $n - 1 =$

$$\dim H, \text{ donc base de } H, \text{ avec } \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(w) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & \alpha_{n-3} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \alpha_{n-2} \end{pmatrix}$$

En prenant  $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cup \{x_0\}$ , on obtient  $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$  de la forme (1).

3) Le sens direct découle de la question précédente, celui inverse découle de la question II.B.1.c

### 3<sup>ème</sup> Partie

1) a) On sait que le déterminant est une forme  $n$ -linéaire donc continue. D'autre part  $G(\mathbb{C}) = \det^{-1}(\mathbb{C}^*)$  et  $G(\mathbb{R}) = \det^{-1}(]0, +\infty[)$  sont ouverts car  $\mathbb{C}^*$  et  $]0, +\infty[$  sont ouverts et  $\det$  continue.

b) Posons  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ ,  $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  et  $AB = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ , avec

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}, \text{ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a :}$$

$$c_{i,j}^2 \leq \left( \sum_{k=1}^n a_{i,k}^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n b_{k,j}^2 \right), \text{ donc}$$

$$\begin{aligned}
\|AB\|^2 &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} c_{i,j}^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^n a_{i,k}^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n b_{k,j}^2 \right) \\
&= \left( \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k}^2 \right) \left( \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n b_{k,j}^2 \right) \\
&= \|A\|^2 \|B\|^2
\end{aligned}$$

c) Montrons d'abord ce résultat, si  $E$  est muni d'une norme d'algèbre  $\|\cdot\|$  et si  $x \in E$  tel que :  $\|x\| < 1$ , alors  $(1 - x)$  inversible d'inverse  $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ .

En effet, on sait que  $(1 - x) \sum_{k=0}^n x^k = 1 - x^{n+1}$  et

$$\|x^{n+1}\| < \|x\|^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ car } \|x\| < 1, \text{ donc } (1 - x) \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = 1.$$

Revenons à notre problème maintenant, donc

$$\|H\| < \|A^{-1}\|^{-1} \implies \|A^{-1}H\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|H\| < 1$$

$$\implies I_n + A^{-1}H \text{ inversible, d'inverse } \sum_{k=0}^{+\infty} (-A^{-1}H)^k$$

Donc  $A + H = A(I_n + A^{-1}H)$  est aussi inversible, d'inverse

$$(I_n + A^{-1}H)^{-1} A^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-A^{-1}H)^k A^{-1} = A^{-1} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-A^{-1}H)^k A^{-1},$$

$$\text{d'où } (A + H)^{-1} - A^{-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-A^{-1}H)^k A^{-1}.$$

d) Il suffit de montrer que  $\lim_H 0(A + H)^{-1} = A^{-1}$ .

En effet, dans ce cas on peut supposer  $\|H\| < \|A^{-1}\|^{-1}$  et donc  $\exists r < 0$  tel que :  $\|A^{-1}H\| < r < 1$ , donc

$$\begin{aligned}
\|(A + H)^{-1} - A^{-1}\| &= \left\| \sum_{k=1}^{+\infty} (-A^{-1}H)^k A^{-1} \right\| \\
&\leq \|A^{-1}H\|^k A^{-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \|A^{-1}H\|^k \\
&\leq \|H\| \cdot \|A^{-1}\|^2 \sum_{k=0}^{+\infty} r^k \\
&= \frac{\|H\| \cdot \|A^{-1}\|^2}{1 - r} \xrightarrow{H \rightarrow 0} 0
\end{aligned}$$

2) a) Posons  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ ,  $B = (b_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ , donc

$$T(x) = \det(xB + (1 - x)A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \prod_{i=1}^n (x b_{i, \sigma(i)} + (1 - x) a_{i, \sigma(i)}) \text{ est un polynôme en } x \text{ de degré inférieur à } n \text{ non nul, car } T(1) = \det B \neq 0.$$

b) i.  $\lim_t \frac{1}{2} \gamma(t) = \lim_t \frac{1}{2} \gamma(t) = \frac{1 + 2ir}{2} = \gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ , donc  $\gamma$  est continue et par suite  $\phi$  aussi, or  $\gamma(0) = 0$  et  $\gamma(1) = 1$ , donc  $\phi(0) = A$  et  $\phi(1) = B$ .

ii. On a  $\det \phi(t) = T(\gamma(t))$  et  $T(x) = \prod_{i=1}^p x - z_i$ , donc  $\det \phi(t) =$

$$\prod_{i=1}^p \gamma(t) - z_i, \text{ or } \begin{aligned} \operatorname{Im}(\gamma(t) - z_i) &= 2tr - \operatorname{Im} z_i & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ &= 2r(1 - t) - \operatorname{Im} z_i & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{aligned}$$

Supposons  $\operatorname{Im}(\gamma(t) - z_i) = 0$ .

- 1<sup>er</sup> cas :  $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ , dans ce cas  $\operatorname{Im} z_i = 2tr \leq r$ , absurde.

- 2<sup>ème</sup> cas :  $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ , dans ce cas  $\operatorname{Im} z_i = 2(1 - t)r \leq r$ , absurde.

Ainsi  $t \mapsto \phi(t)$  est un chemin inclu dans  $\operatorname{GL}_n(\mathbb{C})$ , joignant  $A$  et  $B$ , donc  $\operatorname{GL}_n(\mathbb{C})$  est connexe par arcs.

3) Découle du fait que les applications  $P \mapsto PJ, P \mapsto P^{-1}$  sont continues donc leur produit aussi, et du fait que l'image d'un connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs.

$$4) \text{ On a : } M(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & \beta_{n-3} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \beta_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}, \text{ avec } \begin{cases} \beta = t\alpha \\ \beta_k = t\alpha, \forall k \geq 1 \\ \beta_0 = \beta^{n-1} - \sum_{k=1}^{n-2} \beta_k \beta^k \\ \beta^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-2} \beta_k \beta^k \end{cases}$$

Ainsi  $M(t)$  remplit les conditions des matrices de la forme (1), donc  $M(t) \in \mathcal{C}(\mathbb{K})$ .

D'autre part les coefficients de  $M(t)$  sont des fonctions polynômiales en  $t$ , donc  $\psi : t \mapsto M(t)$  est continue, c'est donc un chemin inclu dans  $\mathcal{C}(\mathbb{K})$ ,

joignant  $J = \psi(0)$  et  $M = \psi(1)$ .

- 5) D'après la question précédente toute matrice peut être jointe à  $J$  par un chemin continue inclu dans  $\mathcal{C}(\mathbb{K})$ , si on prend deux matrices quelconques  $M$  et  $N$  dans  $\mathcal{C}(\mathbb{K})$ , on jointe  $M$  à  $J$ , puis  $J$  à  $N$ , donc  $M$  à  $N$ , d'où  $\mathcal{C}(\mathbb{K})$  est connexe par arcs.

**Fin.**