



EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE MP

MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

Le sujet est composé de trois exercices et d'un problème, tous indépendants.

EXERCICE 1 : NORMES ÉQUIVALENTES

On note E l'espace vectoriel des applications de classe C^1 définies sur l'intervalle $[0;1]$ et à valeurs dans \mathbb{R} .

1. On pose pour $f \in E$:

$$\|f\| = |f(0)| + 2 \int_0^1 |f'(t)| dt \quad \text{et} \quad \|f\|' = 2|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)| dt .$$

(a) Démontrer que $\|\cdot\|$ définit une norme sur E .

De même, $\|\cdot\|'$ est une norme sur E , il est inutile de le démontrer.

(b) i. Donner la définition de deux normes équivalentes.

ii. Démontrer que les deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont équivalentes sur E .

2. Toutes les normes sur E sont-elles équivalentes à la norme $\|\cdot\|$?

EXERCICE 2 : CONTINUITÉ D'UNE FONCTION DÉFINIE PAR INTÉGRALE

1. Soient I et J deux intervalles de \mathbb{R} et g une application de $I \times J$ dans \mathbb{R} telle que pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto g(x, t)$ soit intégrable sur J .

$$\text{On pose, pour tout } x \in I, f(x) = \int_J g(x, t) dt.$$

Donner toutes les hypothèses du théorème de continuité d'une fonction définie par intégrale dépendant d'un paramètre permettant de conclure que la fonction f est continue sur I .

2. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{1+t^2} dt$.

Démontrer que la fonction f_1 est continue sur \mathbb{R} .

3. On pose, pour tout $x \in [0, +\infty[$, $f_2(x) = \int_0^{+\infty} x e^{-xt} dt$.

Calculer $f_2(x)$ pour tout $x \in [0, +\infty[$.

La fonction f_2 est-elle continue sur $[0, +\infty[$?

Que peut-on en conclure concernant l'hypothèse de domination ?

EXERCICE 3 : UNE INTÉGRALE CURVILIGNE

Calculer l'intégrale curviligne $\int_{\gamma} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$ le long du cercle γ de centre 0 et de rayon 1, orienté dans le sens direct.

PROBLÈME : COMPARAISON DE CONVERGENCES

Dans tout le problème, $\sum f_n$ est une série de fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} et à valeurs réelles.

Partie I

Une série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument sur I lorsque, pour tout $x \in I$, la série $\sum |f_n(x)|$ converge. Dans les deux premières questions on supposera, pour simplifier les démonstrations, que toutes les fonctions f_n sont bornées sur I .

- (a) Rappeler la définition de la convergence normale de la série de fonctions $\sum f_n$ sur I .

(b) On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I , démontrer que $\sum f_n$ converge absolument sur I .
- On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I , démontrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur I .

On pourra démontrer que la suite des restes converge uniformément sur I vers la fonction nulle ou utiliser toute autre méthode.
- On pose pour $x \in [0; 1]$, $f_n(x) = (-1)^n \left(\frac{x^2 + n}{n^2} \right)$.

Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement puis converge uniformément sur $[0; 1]$ mais ne converge absolument en aucune valeur de $[0; 1]$.
- Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument sur I , a-t-on nécessairement $\sum f_n$ qui converge uniformément sur I ?

On attend une réponse détaillée et on pourra utiliser une série entière.

Partie II

Dans toute cette partie, $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est une suite décroissante de réels positifs, $I = [0; 1[$ et pour tout $x \in I$, $f_n(x) = \alpha_n x^n (1 - x)$.

- Justifier que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est bornée et que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur I .
- (a) Calculer pour $n \geq 1$, $\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in I} |f_n(x)|$.

(b) Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur I si et seulement si la série de réels positifs $\sum_{n \geq 1} \frac{\alpha_n}{n}$ converge.

7. (a) Calculer pour tout $x \in I$, $\sum_{k=n+1}^{\infty} x^k$.
- (b) Si on suppose que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0, démontrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur I .
On pourra observer que pour $k \geq n + 1$, $\alpha_k \leq \alpha_{n+1}$.
- (c) Réciproquement, démontrer que si la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur I , alors la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0.
8. Dans chacun des cas suivants, donner, en détaillant, un exemple de suite décroissante de réels positifs $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ telle que :
- (a) La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur I .
- (b) La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur I .
- (c) La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur I mais ne converge pas normalement sur I .
9. Résumer à l'aide d'un schéma toutes les implications possibles, pour une série de fonctions quelconque, entre les convergences : normale, uniforme, absolue et simple sur I .

Fin de l'énoncé