CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

SESSION 2008

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE -FILIÈRE MP

MATHÉMATIQUES 1

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont autorisées.

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

AUTOUR DE LA FONCTION ZETA ALTERNÉE DE RIEMANN

Objectifs : On note F la fonction zeta alternée de Riemann, définie par

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x},$$

et ζ la fonction zeta de Riemann, définie sur $]1, +\infty[$ par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Ce problème propose une étude croisée de quelques propriétés de F et ζ.
Mise à part la partie **III.** qui utilise des résultats de la partie **I.**, les parties sont, dans une très large mesure, indépendantes.

I. Généralités

1. Déterminer l'ensemble de définition de F.
2. On considère la suite de fonctions $(g_n)_{n\geq 1}$ définies sur $[0, 1[$ par

$$g_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-t)^k.$$

   Déterminer la limite simple g de (g_n) puis, en utilisant le théorème de convergence dominée, montrer que $F(1) = \displaystyle\int_0^1 g(t)\, dt$. En déduire la valeur de $F(1)$.
3. Démontrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge normalement sur $[2, +\infty[$. En déduire la limite de F en $+\infty$.
4. *Dérivabilité de F*
   (a) Soit $x > 0$. Étudier les variations sur $]0, +\infty[$ de la fonction $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t^x}$ et en déduire que la suite $\left(\dfrac{\ln n}{n^x}\right)_{n\geq 1}$ est monotone à partir d'un certain rang (dépendant de x) que l'on précisera.
   (b) Pour $n \geq 1$, on pose $f_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.
   Si a est un réel strictement positif, démontrer que la série des dérivées $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.
   En déduire que F est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

5. *Lien avec ζ*
   Calculer, pour $x > 1$, $F(x) - \zeta(x)$ en fonction de x et de $\zeta(x)$. En déduire que :
$$F(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x).$$
   Puis en déduire la limite de ζ en $+\infty$.

II. Produit de Cauchy de la série alternée par elle-même

On rappelle que le produit de Cauchy de deux séries $\sum_{n\geq 1} a_n$ et $\sum_{n\geq 1} b_n$ est la série $\sum_{n\geq 2} c_n$, où $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}$. Dans cette partie, on veut déterminer la nature, selon la valeur de x, de la série $\sum_{n\geq 2} c_n(x)$, produit de Cauchy de $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ par elle-même.
Cette étude va illustrer le fait que le produit de Cauchy de deux séries convergentes n'est pas nécessairement une série convergente.
Dans toute cette partie, n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et x un réel strictement positif.

6. *Étude de la convergence*
   (a) Indiquer sans aucun calcul la nature et la somme, en fonction de F, de la série produit $\sum_{n\geq 2} c_n(x)$ lorsque $x > 1$.
   (b) Démontrer que, pour $x > 0$, $|c_n(x)| \geq \frac{4^x(n-1)}{n^{2x}}$.
   En déduire, pour $0 < x \leq \frac{1}{2}$, la nature de la série $\sum_{n\geq 2} c_n(x)$.
7. *Cas où $x = 1$*
   On suppose, dans cette question 7., que $x = 1$.
   (a) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{\mathrm{X}(n - \mathrm{X})}$.
   En déduire une expression de $c_n(x)$ en fonction de $\frac{H_{n-1}}{n}$, où $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ (somme partielle de la série harmonique).
   (b) Déterminer la monotonie de la suite $\left(\frac{H_{n-1}}{n}\right)_{n\geq 2}$.
   (c) En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 2} c_n(x)$.

III. Calcul de la somme d'une série à l'aide d'une étude de ζ au voisinage de 1

8. *Développement asymptotique en 1*
   (a) Écrire en fonction de $\ln 2$ et de $F'(1)$ le développement limité à l'ordre 1 et au voisinage de 1 de la fonction F, puis déterminer le développement limité à l'ordre 2 et au voisinage de 1 de la fonction $x \mapsto 1 - 2^{1-x}$.
   (b) En déduire deux réels a et b, qui s'écrivent éventuellement à l'aide de $\ln 2$ et $F'(1)$, tels que l'on ait, pour x au voisinage de 1^+ :
$$\zeta(x) = \frac{a}{x-1} + b + o(1).$$
9. *Développement asymptotique en 1 (bis)*
   On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} v_n$, où v_n est définie sur $[1, 2]$ par
$$v_n(x) = \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}.$$

(a) Justifier que, pour $n \geq 1$ et $x \in [1,2]$, on a :

$$0 \leq v_n(x) \leq \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}.$$

(b) Justifier que, pour $x \in [1,2]$, la série $\sum_{n\geq 1} v_n(x)$ converge. On note alors $\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(1)$ (c'est la constante d'Euler).

(c) Exprimer, pour $x \in]1,2]$, la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$ à l'aide de $\zeta(x)$ et $1-x$.

(d) Démontrer que la série $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge uniformément sur $[1,2]$ (on pourra utiliser le reste de la série).

(e) En déduire que l'on a, pour x au voisinage de 1^+ :

$$\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1).$$

10. *Application*
Déduire des résultats précédents une expression, à l'aide de $\ln 2$ et γ, de la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} \ln n}{n}.$$

IV. Calcul des $F(2k)$ à l'aide des nombres de Bernoulli

Dans cette partie, on se propose d'établir une formule permettant de calculer la valeur des $\zeta(2k)$ avec un entier $k \geq 1$.
Pour cela, on introduit les polynômes et nombres de Bernoulli.
$\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ désigne la $\mathbb{R}$-algèbre des polynômes à coefficients réels.
On identifie un polynôme et sa fonction polynômiale associée.

On dit qu'une suite (B_n) de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ est une suite de polynômes de Bernoulli si elle vérifie les propriétés suivantes :

$$B_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ B_n' = nB_{n-1} \text{ et } \int_0^1 B_n(t)\ \mathrm{d}t = 0.$$

On admet qu'il existe **une et une seule** suite de polynômes de Bernoulli que l'on notera (B_n). On l'appelle **la** suite de polynômes de Bernoulli.
On pose $b_n = B_n(0)$, b_n est appelé le n-ième nombre de Bernoulli.

11. Calculer B_1 et B_2. En déduire b_1 et b_2.
12. Calculer, pour $n \geq 2$, $B_n(1) - B_n(0)$.
13. *Symétrie*
Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n(\mathrm{X}) = (-1)^n B_n(1-\mathrm{X})$.
14. *Développement en série de Fourier*
Soit k un entier naturel. On définit l'application g_k de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$g_k(x) = B_{2k}\left(\frac{x}{2\pi}\right) \text{ pour } x \in [0, 2\pi[\text{ et } g_k \text{ est périodique de période } 2\pi.$$

Justifier avec soin qu'il existe une unique suite de réels $(a_n(k))_{n\geq 0}$ telle que, pour tout réel x, on ait :

$$g_k(x) = \frac{a_0(k)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(k) \cos(nx).$$

15. *Expression des coefficients*
(a) Soient $n \geq 1$ et $k \geq 1$. Montrer que l'on a :

$$a_n(k) = \frac{k}{(n\pi)^2}\Big(B_{2k-1}(1) - B_{2k-1}(0)\Big) - \frac{(2k)(2k-1)}{(2n\pi)^2} a_n(k-1).$$

(b) En déduire la valeur de $a_n(1)$ pour $n \geq 1$.

(c) Conclure que, pour $n \geq 1$ et $k \geq 2$, on a :

$$a_n(k) = \frac{(-1)^{k-1}(2k)!}{2^{2k-1}(n\pi)^{2k}}.$$

On remarquera pour la suite (sans le démontrer) que cette formule reste vraie pour $k = 1$.

16. *Conclusion*

Déterminer, pour $k \geq 1$, une relation entre $\zeta(2k)$ et b_{2k}.

17. *Calcul effectif des b_n*

(a) Démontrer, en utilisant une formule de Taylor, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$B_n(\mathrm{X}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} \mathrm{X}^k.$$

(b) En déduire une relation de récurrence permettant de calculer les nombres de Bernoulli sans avoir à déterminer les polynômes de Bernoulli associés. Écrire, dans un des langages au programme, un petit algorithme permettant d'obtenir la valeur de b_n pour un entier n donné.

Fin de l'énoncé